Mecânica Básica – Resumo Teórico

Conceitos principais:

- Força
- Potencial
- Energia
- Momento

Força (F)

Força conservativa

Uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza independe do caminho.

Em uma dimensão, uma força será conservativa se depender apenas da posição.

Toda força conservativa está associada a um potencial.

Segunda Lei de Newton

Massa constante e variável

$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$, se m constante.

Se a massa não for constante, uma ideia comum seria fazer o seguinte:

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}(t)\frac{dm}{dt}$$

Em *princípio*, a fórmula acima está errada, porém dará o resultado certo em alguns casos.

A fórmula correta é:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{u}(t)\frac{dm}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Onde $\vec{u}(t)$ é a velocidade de ejeção, ou absorção da massa, relativa ao corpo que ejeta ou absorve a massa. (Exemplo: um foguete ejetando massa como forma de propulsão, $\vec{u}(t)$ seria a velocidade da massa em relaçao ao foguete).

Distinção importante: $\vec{u}(t)$ é a velocidade da massa ejetada, e $\vec{v}(t)$ é a velocidade do corpo. Este é o princípio errado na primeira fórmula. Pois $\vec{v}(t)$ depende do referencial, então a força dependeria do observador, o que não é verdade na mecânica clássica.

Energia potencial (U)

Uma energia potencial está associada a uma força conservativa através da seguinte relação:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Onde F_x é a componente da força na direção x. (Vale também para y e z), e U é a energia potencial.

O trabalho de uma força conservativa independe do caminho, e é dado, genericamente, por:

$$W_F = -\left(U(P_f) - U(P_i) \right)$$

Onde P_f é o ponto final e P_i é o ponto inicial. Em uma dimensão, isso é equivalente a $W_F = -\left(U(x_f) - U(x_i) \right)$.

Energia

No universo, a energia total se conserva. Num sistema sob ação de forças conservativas, a energia mecânica se conserva. Mas isso não é verdade quando houver perdas, por atrito, por exemplo, que não é uma força conservativa. Outro exemplo onde a energia mecânica não se conserva são colisões inelásticas.

Nas <u>colisões elásticas</u>, a energia mecânica se conserva.

Resumindo: a energia se conserva, porém, tome cuidado com algumas situações em que haja perdas.

Nos casos onde a energia se conserva, basta equacionar $E_{antes} = E_{depois}$

Nos casos onde a energia não se conserva, ainda é possível equacionar:

$E_{antes} = E_{depois} + E_{perdida}$

No caso do atrito, a energia perdida corresponde ao trabalho do atrito. Nos outros casos, o único jeito de calcular é pela diferença entre as energias iniciais e finais.

Momento (p)

Ao contrário da energia, o momento é infalível, pois sempre se conserva quando não há forças externas. Quando há forças externas, basta usar a segunda lei de Newton ($\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

Se um dia você supor que energia e momento se conservam, e chegar em um paradoxo, então ignore a conservação de energia e confie na conservação do momento. A conservação do momento é muito mais fácil, pois envolve forças externas, massa e velocidade. A conservação de energia possui muitos buracos obscuros nos quais energia pode surgir ou desaparecer, que é o caso de colisões inelásticas. Mas em <u>qualquer colisão</u>, o momento se conserva.

Centro de massa

O centro de massa de um sistema se move como se fosse uma partícula de massa $M = \textit{massa total do sistema}$, sob ação de uma força $F = \textit{soma de todas as forças externas.}$

Isso significa que:

Quando não houver forças externas, ou elas se anularem, o centro de massa não sofrerá aceleração: permanecerá em repouso ou com velocidade constante.

Quando houver forças externas, a aceleração do centro de massa será calculável.

Cálculo da posição do centro de massa:

$$Mx_{CM} = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots$$

Note que derivando a expressão acima no tempo, também podemos obter a velocidade e aceleração do centro de massa:

$$M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots$$
$$M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots$$

Resolução de exercícios

Quando usar o que?

Obviamente se cair massa variável, deve-se usar a equação da massa variável. Mas em outros casos não é tão transparente.

Uma regra prática, que não é uma regra, mas sim uma dica, é:

Se não envolver tempo, use conservação de momento/energia conforme necessário ou adequado.

Isso vem do fato de conservação de momento/energia não depender do tempo, então se o problema precisar de uma equação que envolva tempo, não ajudarão muito, com algumas exceções.

Não sei nem por onde começar

Não tenha o pensamento: *"preciso aprender a resolver sozinho, pois ninguém vai me ajudar na prova, então não vou pedir ajuda pra ninguém".*

O único jeito de ultrapassar esse bloqueio é através de experiência. Com experiência, ao bater o olho no enunciado e ver a situação e os dados fornecidos, dá pra se ter uma boa ideia do que deverá ser usado para resolver, pois é a mesma coisa que você já fez várias vezes.

Por isso, olhar a resolução, ou ver alguém resolvendo tem sim um ganho educacional, desde que você faça duas coisas:

- Realmente entenda o que foi feito, não concorde passivamente. De preferência, refaça sozinho mais tarde.
- Guarde isso na memória para lembrar quando encontrar outro problema parecido.

Mas nada substitui você resolver provas antigas sozinho. O fuja do nabo te ajuda a levantar, mas quem precisa correr é você.

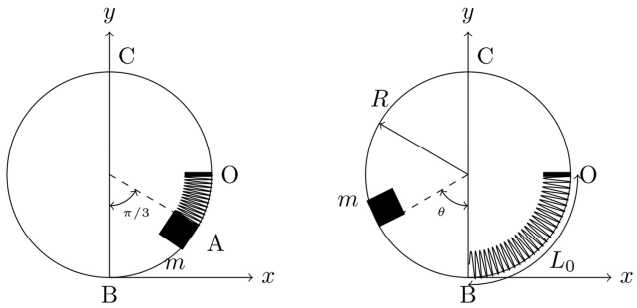
Física I – Resolução de Provas

P2 – 2013)

1) Uma mola, de comprimento natural L_0 e constante elástica k, é montada no interior de um aro circular vertical de raio R. Uma das extremidades da mola está fixa no ponto O e a outra está livre no ponto mais baixo do aro. Um bloco de massa m é empurrado contra a mola, que se desloca ao longo da curva em um arco de ângulo $\pi/3$, até o ponto A, como mostrado na figura. O bloco é então liberado, a partir do repouso. O atrito entre o bloco e o aro é desprezível. Adote o referencial da figura, com origem em B.

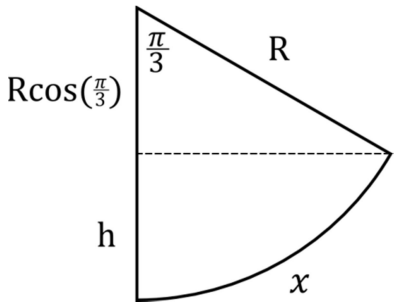
1. (1,0) Obtenha uma expressão para a energia mecânica do bloco no ponto A em termos de m, R, k, g e π.
2. (1,0) Determine o valor mínimo de k para que o bloco consiga executar a curva completa, passando pelo ponto C sem cair.
3. (0,5) Sabendo-se que a partícula possui energia mecânica E no ponto A, obtenha uma expressão para a velocidade do bloco no trecho BC em função do ângulo θ, R, m, E e g.

Dado: $sen(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $cos(\pi/3) = 1/2$.



Resolução:

1. Energia mecânica é a soma das energias potenciais e cinética. Como o bloco está em respouso, a energia cinética é 0. Logo, sobram apenas a energia potencial gravitacional e elástica.



Gravitacional: $E_g = mgh$

Do desenho, obtemos:

$$R = R\cos\frac{\pi}{3} + h \Leftrightarrow h = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow h = \frac{R}{2}$$

Elástica: $E_{el} = \frac{kx^2}{2}$

Do desenho, obtemos:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{x}{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi R}{3}$$

Logo: $E_{mec} = E_g + E_{el} = \boxed{\frac{mgR}{2} + \frac{k}{2}\left(\frac{\pi R}{3}\right)^2}$

2. Condição: bloco passa pelo ponto C sem cair

Sem cair significa que no ponto C, o bloco continua executando seu movimento circular. Como visto no item 1, quanto menor o k, menor a energia potencial elástica. Então existe um k mínimo para que o bloco consiga ter energia suficiente para executar o movimento circular no ponto C. Note que isso nessa situação limite, a velocidade do bloco no ponto C <u>não</u> é 0.

Na situação limite, o bloco no ponto C está quase descolando do teto, então a normal será 0. Porém, ainda há a força peso, que aponta para o centro do círculo, fazendo então o papel de força centrípeta.

$F_{cp} = F_g = mg$

Como a força centrípeta depende da velocidade tangencial, podemos achar a velocidade em que essa situação acontece:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \Leftrightarrow v^2 = gR$$

Conseguimos transformar a condição dada em uma equação. Como não há nenhuma dependência do tempo, e nenhuma força dissipativa, é um indício de que conservação de energia pode ajudar. Então temos que a energia total em A é igual em C: $E_A = E_C$, sendo que E_A foi calculado no item 1.

No ponto C, não há nenhuma mola, então as energias presentes são cinética e gravitacional.

$$E_C = \frac{mv^2}{2} + mgH \text{ , } onde\ H = 2R\ e\ v^2 = gR$$

Substituindo na conservação de energia: *(lembrando que queremos k)*

$$\frac{mgR}{2} + \frac{k}{2}\left(\frac{\pi R}{3}\right)^2 = \frac{mgR}{2} + 2mgR \Leftrightarrow k = \boxed{\frac{36mg}{\pi^2 R}}$$

3. Se E é a energia mecânica em A, por conservação de energia, a energia mecânica no trecho BC deve ser igual à E.

No trecho BC estão presentes apenas energias cinética e gravitacional.

$$E_{BC} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Utilizando a mesma trigonometria do item 1, temos que $h = R\ (1 - \cos\theta)$

Então temos, pela conservação de energia:

$$E = E_{BC} \Leftrightarrow E = \frac{mv^2}{2} + mgR\ (1 - \cos\theta) \Leftrightarrow v = \boxed{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - mgR(1 - \cos\theta)\right)}}$$

P2 – 2013)

2) Um patinador de massa $M = 69$ kg, carregando uma bola de massa $m = 1$ kg, vai em direção a uma parede com velocidade $V_0 = 1$ m/s. Num dado instante, ele lança a bola perpendicularmente contra a parede, com velocidade $v = 2$ m/s em relação ao solo. Esta rebate na parede e volta nas mãos do patinador. Considere a colisão da bola com a parede perfeitamente elástica e despreze o atrito entre o piso e o patinador, assim como o efeito da gravidade sobre a trajetória da bola.

1. (1,0) Qual é a velocidade V_1 do patinador após lançar a bola?
2. (1,5) Qual é a velocidade V_2 do patinador após agarrar a bola rebatida pela parede?

Resolução:

1. A palavra colisão no enunciado já indica conservação de momento. Além disso, são dados massas e velocidades, que podem ser usados para calcular momento. Apesar da colisão não envolver este item, ela não deixa de fornecer dicas importantes.

Se considerarmos o sistema patinador+bola, não há nenhuma força externa: $p_{antes} = p_{depois}$

Antes: $p_{antes} = p_{patinador} + p_{bola} = MV_0 + mV_0$

Depois: $p_{depois} = p_{patinador} + p_{bola} = MV_1 + mv$

Tomar cuidado com os sinais! Escolha um sentido (direita ou esquerda) para ser positivo, e coloque os sinais de acordo com o sentido da velocidade. No caso, v tem o mesmo sentido de V_0, então escolhi ambos positivos. V_1 é a velocidade do patinador após lançar a bola, portanto é a incógnita do problema, então coloco como positivo e o sinal do resultado final vai dizer seu sentido.

Igualando o momento antes e depois:

$$MV_0 + mV_0 = MV_1 + mv \Leftrightarrow V_1 = \boxed{V_0 + \frac{m}{M}(V_0 - v)}$$

2. A bola colide elasticamente com a parede. Nesse tipo de colisão, a energia se conserva, portanto a bola tem que voltar com a mesma energia cinética, ou seja, com a mesma velocidade. Aparentemente a conservação de momento foi violada, mas colisão com parede é uma aproximação em que a massa da parede é infinita. Se você tentar calcular a velocidade final da parede, chegará em um resultado similar ao do item 1, onde teremos a massa da parede dividindo. Se aproximarmos M para infinito, o termo vai para 0, e portanto a velocidade final da parede será igual à velocidade inicial, que é 0.

Resumindo: após a colisão com a parede, a bola terá um novo momento $p'_{bola} = -mv$

Então antes de agarrar a bola, o momento do sistema é:

$$p_{antes} = p'_{patinador} - p'_{bola} = MV_1 - mv$$

Ao agarrar a bola, o patinador e a bola ficam com a mesma velocidade:

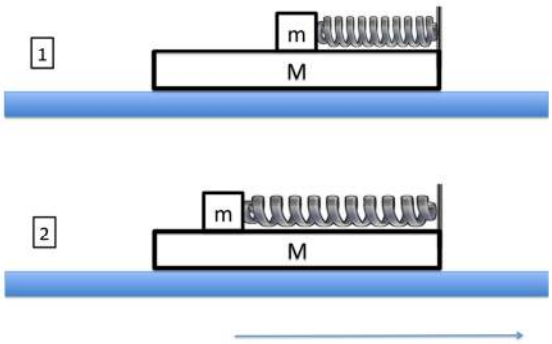
$$p_{depois} = MV_2 + mV_2$$

Igualando o momento antes e depois:

$$MV_1 - mv = MV_2 + mV_2 \Leftrightarrow V_2 = \frac{MV_1 - mv}{M + m} = \frac{MV_0 + mV_0 - mv - mv}{M + m} = \boxed{V_0 - \frac{2m}{M + m}v}$$

P2 – 2013)

3) Um sistema massa-mola consiste de uma partícula de massa $m = 1\,kg$ presa a uma mola de constante elastica $k = 800\,N/m$ e massa desprezível. Montamos este sistema sobre uma plataforma móvel de massa $M = 2m$ conforme mostrado na figura. A posição de equilíbrio coincide com centro de plataforma, conforme mostra a figura (1), e tanto a massa m se desloca sem atrito sobre a plataforma, quanto a plataforma se desloca sem atrito sobre a superfície horizontal. Suponhamos que a mola seja *distendida* em $1\,cm$ e solta, com o sistema todo inicialmente em repouso.



a) (1,00) o deslocamento x_M da plataforma, quando a mola estiver *comprimida* em $1/2\,cm$,

b) (0,75) a velocidade v_m (módulo e sentido) do bloco de massa m nesta condição e,

c) (0,75) a velocidade V_M (módulo e sentido) da plataforma nesta condição.

Resolução:

a. Dois corpos ligados entre si por uma mola, dados de massa e distância, sem força resultante externa no sistema, pedir deslocamento... tudo aponta para utilização do centro de massa.

Lidar com forças seria péssimo, pois não há nenhuma informação de tempo disponível ou passível de ser calculada facilmente. Conservação de energia e momento não trariam muito benefício, pois não se relacionam facilmente com a incógnita, deslocamento da plataforma.

Centro de massa, por outro lado, depende da posição das partes individuais e de suas massas. As massas são conhecidas e a posição da massa m também, logo faz sentido acreditar que esse é o caminho.

Como não há forças externas e tudo está em repouso inicialmente, o centro de massa permanecerá no mesmo lugar: $x_{CM}^{antes} = x_{CM}^{depois}$. Como a posição é algo relativo, preciso escolher uma origem. Para facilitar, vou escolher a origem o centro da plataforma.

Na situação inicial (2):

$$(M+m)x_{CM}^{antes} = m.(-1) \Leftrightarrow x_{CM}^{antes} = -\frac{m}{M+m}$$

Quando a mola estiver comprimida de ½, a condição é: $x_m - x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_m = x_M + \frac{1}{2}$

$$(M+m)x_{CM}^{depois} = Mx_M + mx_m \Leftrightarrow x_{CM}^{depois} = x_M + \frac{m}{2(M+m)}$$

Igualando a posição do CM antes e depois:

$$-\frac{m}{M+m} = x_M + \frac{m}{2(M+m)} \Leftrightarrow x_M = \boxed{-\frac{3m}{2(M+m)}}$$

b. Poderíamos derivar a expressão do centro de massa e ter velocidades no lugar de posições. No entanto, teríamos velocidade de algo em função de velocidade de outra coisa, e não ajudaria. Então tem que ser por outro caminho.

Não há força resultante externa, e não há nada envolvendo tempo, o que significa que conservações de momento e energia podem ajudar. Em colisões elásticas, a velocidade final dos dois corpos são incógnitas, então será necessário mais de uma equação para resolver.
Já que as duas conservações são válidas no caso, basta equacionar ambas e resolver o sistema.
Conservação de energia:
Inicialmente só tem a elástica, e no fim, tem elástica e cinética das duas massas: m e M

$$E_{inicial} = E_{el} = \frac{kx_{inicial}^2}{2}$$

$$E_{final} = E_{el} + E_{cin} = \frac{kx_{final}^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2}$$

Igualando:

$$\frac{kx_{inicial}^2}{2} = \frac{kx_{final}^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2} \Leftrightarrow \frac{k\left(x_{inicial}^2 - x_{final}^2\right)}{2} = \frac{mv_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2}$$

Conservação de momento:
Inicialmente, o momento é 0, e no fim, a soma dos momentos das duas massas.

$$p_{inicial} = 0$$

$$p_{final} = mv_m + MV_M$$

Igualando:

$$0 = mv_m + MV_M \Leftrightarrow V_M = -\frac{mv_m}{M}$$

Substituindo na conservação de energia:

$$\frac{k\left(x_{inicial}^2 - x_{final}^2\right)}{2} = \frac{mv_m^2}{2} + \frac{M}{2}\left(-\frac{mv_m}{M}\right)^2 \Leftrightarrow v_m = \sqrt{\frac{k\left(x_{inicial}^2 - x_{final}^2\right)}{\left(m + \frac{m^2}{M}\right)}} = \boxed{\sqrt{\frac{2k\left(x_{inicial}^2 - x_{final}^2\right)}{3m}}}$$

c. No item b, usamos que:

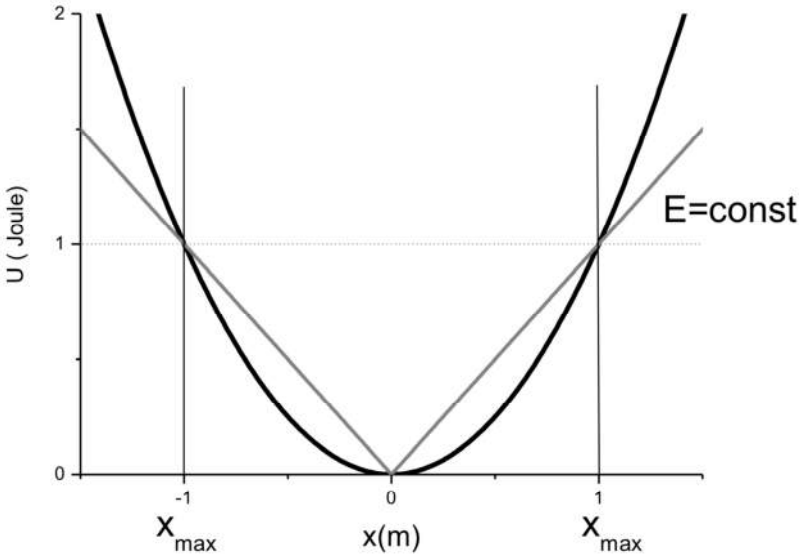
$$V_M = -\frac{mv_m}{M} = \boxed{-\frac{1}{2}v_m}$$

P2 – 2013)

4)Uma partícula de massa m move-se periodicamente em uma dimensão em um potencial parabólico $U = kx^2/2$. Outra partícula da mesma massa move em potencial triangular $U = C|x|$. Os potenciais são representados pelas curvas da figura, sendo a amplitude de oscilação de X_{max}. O valor da energia dos potenciais harmônico e triangular coincide em X_{max} e $-X_{max}$. Calcule:

a) (1,5) A magnitude da forças para os potenciais harmônico e triangular nos pontos $x = X_{max}$ e $x = -X_{max}$.

b) (1,0) A razão entre períodos de oscilação no potencial harmônico, dado por $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$, e no potencial triangular, T.



Resolução:

a. É dado um potencial em função de x, pedindo a força. Temos a relação $F_x = -\frac{dU}{dx}$

Para o potencial harmônico é fácil:

$$F_{har}(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(\frac{kx^2}{2})}{dx} = -kx$$

Nos pontos $x = \pm x_{max}$ basta substituir: $\boxed{F_{har}(x_{max}) = -kx_{max} \quad e \quad F_{har}(-x_{max}) = kx_{max}}$

Para o potencial triangular, a derivada do módulo é:

$$F_{tri}(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(C|x|)}{dx} = \begin{cases} -C, & x > 0 \\ C, & x < 0 \end{cases}$$

Para calcular C, usamos o dado de que em x_{max}, os dois potenciais coincidem:

$$U_{har}(x_{max}) = U_{tri}(x_{max}) \Leftrightarrow \frac{kx_{max}^2}{2} = C|x_{max}| \Leftrightarrow C = \frac{kx_{max}}{2}$$

Substituindo:

$$F_{tri}(x) = \begin{cases} -\frac{kx_{max}}{2}, & x > 0 \\ \frac{kx_{max}}{2}, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{F_{tri}(x_{max}) = -\frac{kx_{max}}{2} \quad e \quad F_{tri}(-x_{max}) = \frac{kx_{max}}{2}}$$

b. O período para o potencial triangular T é 4 vezes o tempo pra partícula ir de $-x_{max}$ a 0. Como envolve tempo, conservações podem não ajudar.

Temos a força, e pela segunda lei de Newton podemos achar a aceleração. Com isso conseguimos calcular o tempo para a partícula partir de $-x_{max}$ e ir até 0.

$$a = \frac{F_{tri}(-x_{max})}{m} = \frac{kx_{max}}{2m}$$

Também sabemos que:

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2x_{max}}{a}} = \sqrt{\frac{4m}{k}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}}$$

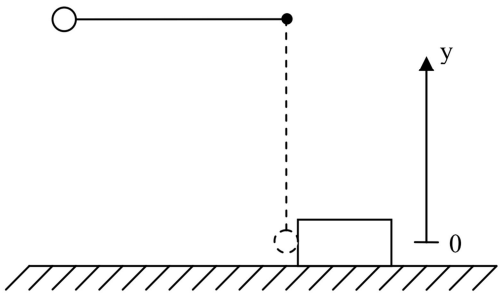
Como $T = 4t = 8\sqrt{\frac{m}{k}}$, a razão entre T_0 e T é:

$$\frac{T_0}{T} = \frac{2\pi\sqrt{m/k}}{8\sqrt{m/k}} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

P2 – 2011)

1) Uma bola de massa m=0,5 kg é presa a um pino por um fio leve e inextensível de 0,8 m de comprimento. A bola é abandonada quando o fio está na horizontal. Na parte mais baixa da sua trajetória, a bola atinge um bloco de massa M=2 kg, inicialmente em repouso sobre a superfície áspera. A colisão entre eles pode ser considerada perfeitamente elástica. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é 0,16.

a) (0,2) Qual é o trabalho realizado por cada força atuando sobre a bola até o momento logo antes da colisão?
b) (0,8) Qual é a velocidade de cada corpo depois da colisão?
c) (0,5) Até que altura sobe a bola após a colisão?
d) (0,5) Qual é o trabalho realizado pela força de atrito sobre o bloco até parar?
e) (0,5) Qual é a distância percorrida pelo bloco?



Resolução:

a. Há duas forças atuando na bola: tração e peso

A tração é sempre perpendicular ao movimento, logo o trabalho é 0.

O trabalho do peso, por ser uma força conservativa, é a diferença de potencial entre o ponto inicial e final: $W_{peso} = -(0 - mgl) = mgl$

b. Novamente, a palavra colisão já diz que precisaremos usar conservação do momento. E como é perfeitamente elástica, a energia cinética também se conserva. Como são duas incógnitas, precisamos de duas equações:

Conservação do momento:

$$p_{antes} = p_{depois} \Leftrightarrow mv_{antes} = mv_m + MV_M \Leftrightarrow V_M = \frac{m}{M}(v_{antes} - v_m)$$

Neste caso, a velocidade da bola logo antes da colisão pode ser calculada conservando a energia na queda: $\frac{mv_{antes}^2}{2} = mgl \Leftrightarrow v_{antes} = \sqrt{2gl}$

Também temos a conservação de energia:

$E_{antes} = E_{depois} \Leftrightarrow mgl = \frac{mv_m^2}{2} + \frac{MV_M^2}{2}$

Obs: também pode ser utilizado o coeficiente de restituição, igual a 1 , o que simplificaria as contas.

Substituindo V_M na conservação de energia e resolvendo:

$$mgl = \frac{mv_m^2}{2} + \frac{m^2}{2M}(v_{antes} - v_m)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2M}\right)v_m^2 - \frac{m}{M}\sqrt{2gl}\, v_m + \frac{mgl}{M} - gl = 0$$

$$v_m = \frac{\frac{m}{M}\sqrt{2gl} \pm \sqrt{\frac{m^2}{M^2}2gl - 4gl\left(\frac{m}{M} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2M}\right)}}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2M}\right)} = \frac{\frac{m}{M}\sqrt{2gl} \pm \sqrt{2gl}}{\left(\frac{m}{M} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{m}{M} \pm 1\right)}{\left(\frac{m}{M} + 1\right)}\sqrt{2gl}$$

$$v_m = \sqrt{2gl}\ ou\ \frac{(m - M)}{(m + M)}\sqrt{2gl}$$

A primeira resposta não pode ser, pois é a velocidade antes da colisão. Logo:

$$v_m = \boxed{\frac{(m - M)}{(m + M)}\sqrt{2gl}}$$

$$V_M = \frac{m}{M}\left(\sqrt{2gl} - v_m\right) = \boxed{\frac{2m}{(m + M)}\sqrt{2gl}}$$

c. Temos a velocidade da bola após a colisão. Para saber a altura máxima, basta fazer a conservação de energia até a altura máxima:

$$mgH = \frac{mv_m^2}{2} \Leftrightarrow H = \boxed{\frac{(m - M)^2}{(m + M)^2}l}$$

d. O trabalho do atrito vai ser igual à energia perdida pelo bloco. Se ele pára, então perde toda sua energia cinética, que corresponde a:

$$W_{at} = -\Delta E = -\left(0 - \frac{MV_M^2}{2}\right) = \boxed{\frac{2m^2M}{(m + M)^2}2gl}$$

e. Como a força de atrito é constante e paralela ao deslocamento, o trabalho do atrito também pode ser calculado como $força\ x\ deslocamento$:

$$W_{at} = f_{at}.d$$

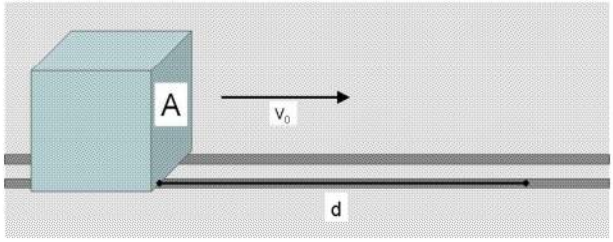
Sabemos que $f_{at} = \mu N = \mu Mg$

Logo:

$$d = \frac{W_{at}}{f_{at}} = \frac{\frac{2m^2M}{(m + M)^2}2gl}{\mu Mg} = \boxed{\frac{4m^2l}{\mu(m + M)^2}}$$

P2 – 2011)

2) Dentro de uma câmara, temos uma névoa formada por gotículas d'água em suspensão, com uma densidade η. Considere um cubo de massa M, se deslocando horizontalmente sem atrito sobre um trilho neste ambiente, com uma velocidade inicial de módulo v_0 e direção perpendicular a uma de suas faces, de área A. Despreze a resistência com o ar e o atrito com o trilho.



a) (0,5) Se o corpo absorver a água ao longo de sua passagem, apenas pela face frontal, percorrendo uma distância d, qual vai ser sua velocidade final?

b) (1,0) Qual a variação de energia do sistema?

c) (1,0) Considere agora que no lugar de gotículas d'água, temos cristais de gelo, que sofrem colisões elásticas com a superfície do corpo. Considerando que a densidade da névoa é a mesma do caso anterior, qual a velocidade do corpo, decorrido um tempo τ do início do deslocamento?

Dê suas respostas em termos d, M, v_0, A, η e τ.

Resolução:

a. Sem informações de tempo, envolvendo velocidade e massa: conservação de momento.

Na verdade é uma colisão disfarçada. Absorver água significa colisões inelásticas com partículas de água. Então não podemos usar conservação de energia.

Conservação do momento: $p_{antes} = p_{depois}$

Antes: $p_{antes} = Mv_0$

Depois: $p_{depois} = Mv_f + mv_f$, onde m é a massa de água absorvida.

A água absorvida corresponde à água no volume que a face frontal do cubo atravessa, ou seja: $m = \eta V = \eta Ad$

Logo:

$$p_{antes} = p_{depois} \Leftrightarrow Mv_0 = Mv_f + \eta Adv_f \Leftrightarrow v_f = \boxed{\frac{M}{(M + \eta Ad)} v_0}$$

b. Para calcular a perda de energia, basta calcular a energia antes e depois e fazer a diferença:

$$\Delta E = E_{antes} - E_{depois} = \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{(M + \eta Ad)v_f^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2} - \frac{M^2 v_0^2}{2(M + \eta Ad)} = \boxed{\frac{M\eta Ad}{(M + \eta Ad)} \frac{v_0^2}{2}}$$

c. Similar ao item a, porém agora a distância d não é dada, mas sim um tempo, e a colisão é elástica. Problema: a distância é necessária, pois a quantidade de cristais de gelo colididos depende do volume percorrido. Temos o tempo, porém a velocidade não é constante, variando com o tempo. Só resta uma alternativa, calcular para uma pequena variação de tempo, tomar o limite e integrar.

Suponha que após um tempo Δt, a face frontal percorre um volume $\Delta V \cong Av\Delta t$.

Nesse tempo, o cubo colide elasticamente com $m = \eta \Delta V$ cristais de gelo. Como a massa de um único cristal de gelo é muito menor que a massa do cubo, cada pequena colisão será como a colisão da bola com a parede do outro exercício. Então após a colisão, cada cristal de gelo terá velocidade $2v$.

Como o momento se conserva, o momento do cubo tem de diminuir: $\Delta p_{cubo} = -m2v = -2\eta v \Delta V = -2\eta v^2 A \Delta t$

Isso faz com que a velocidade do cubo diminua:

$$M\Delta v = -2\eta v^2 A \Delta t$$

Tomando o limite $\Delta t \to 0$:

$$M dv = -2\eta v^2 A dt$$

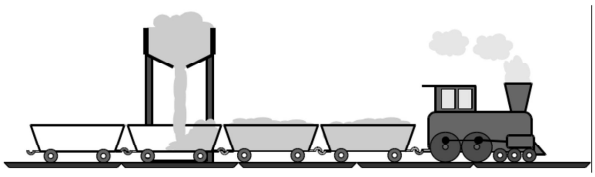
Separando as variáveis e integrando:

$$\frac{1}{v^2} dv = -\frac{2\eta A}{M} dt \Leftrightarrow \int_{v_0}^{v_f} \frac{1}{v^2} dv = \int_0^{\tau} -\frac{2\eta A}{M} dt \Leftrightarrow \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_f}\right) = -\frac{2\eta A}{M}\tau$$

$$\Leftrightarrow v_f = \frac{1}{\frac{1}{v_0} + \frac{2\eta A \tau}{M}} = \boxed{v_0 \frac{1}{1 + \frac{2\eta A \tau v_0}{M}}}$$

P2 – 2010)

3)Um trem é carregado com areia ao passar sob uma ponte. A areia é despejada nos vagões à taxa de $500kg$ por segundo. Como a areia é despejada verticalmente de uma altura de vários metros, ao atingir a caçamba do vagão, a velocidade dos grãos de areia é de cerca de $14m/s$. A massa do vagão vazio é de $2.000kg$, e é preenchido com $6.000kg$ de areia ao passar sob a ponte.



a)(1,0) Desprezando-se as perdas por atrito com os trilhos, determine a força que a locomotiva precisa fazer para puxar o trem a uma velocidade constante de $0,5m/s$ e a potência necessária para manter o movimento. Note que como o sistema não pode ser considerado como uma partícula não é conveniente a utilização do teorema trabalho-energia cinética.

b)(1,0) Determine a força suportada pelo trecho de trilhos sob um vagão quando este estiver 50% preenchido de areia. Suponha que o trecho de trilhos em questão suporta somente este vagão neste momento.

c) (0,5) Se a locomotiva desengatar do primeiro vagão quantos segundos se passarão até que o restante do trem reduza sua velocidade à metade da inicial? Suponha que a massa do restante do trem (incluindo a areia) seja de $10.000kg$ no instante do desengate.

Resolução:

a. A questão trata de massa variável, portanto vamos relembrar a fórmula:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{u}(t)\frac{dm}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Lembrando que no caso, v é a velocidade do trem, e u é a velocidade da areia em <u>relação ao trem.</u> Esta é uma fórmula vetorial, como no item a estamos tratando só da direção x, podemos decompor tudo em x:

$$F_x + u_x \frac{dm}{dt} = m(t)\frac{dv_x}{dt}$$

Como o trem vai se mover com velocidade constante, $\frac{dv_x}{dt} = 0$

Cuidado com u_x, pois é comum pensar que como a areia só cai, só tem velocidade em y, e portanto $u_x = 0$. Isso não é verdade, pois lembre-se que u_x é a velocidade relativa entre o trem e a areia. Como o trem se move para a direita e a areia tem velocidade zero, $u_x = -v$.

Substituindo na equação:

$$F_x = \boxed{v\frac{dm}{dt} = 250\ N}$$

A potência é $força\ x\ velocidade$:

$$P = \boxed{F_x v = 125\ W}$$

b. Utilizando a mesma equação, mas para y:

$$F_y + u_y\frac{dm}{dt} = m(t)\frac{dv_y}{dt}$$

Novamente, o trem não acelera em y, então $\frac{dv_y}{dt} = 0$.

Desta vez, u_y é mais fácil de visualizar, pois o trem está parado e a areia chega com a velocidade dada no enunciado ($14m/s$).

Também temos que $F_y = P - N = Mg - N$. Tanto para u_y quanto para F_y adotei positivo para baixo. Não importa o sentido, desde que seja consistente.

Então temos:

$$Mg - N + u_y\frac{dm}{dt} = 0 \Leftrightarrow N = \boxed{Mg + u_y\frac{dm}{dt} = 57000\ N}$$

c. Horizontalmente, não há nenhuma força externa, pois não há atrito. Então tenho a conservação do momento em x :

$p_{antes} = M_{desengate}v_{inicial}$

$p_{depois} = \left(M_{desengate} + M_{areia}\right)\frac{v_{inicial}}{2}$

Igualando:

$M_{desengate}v_{inicial} = \left(M_{desengate} + M_{areia}\right)\frac{v_{inicial}}{2} \Leftrightarrow M_{areia} = M_{desengate}$

Mas $M_{areia} = t\ \frac{dm}{dt}$

Então:

$t = M_{desengate}\left(\frac{dm}{dt}\right)^{-1} = \frac{10000}{500} = \boxed{20s}$