0303200 – Probabilidades | Turma: | Prof: | Prova 3, 2018

Nome (completo):

Teste 1 Experimentos com animais indicam que o tempo necessário para que um determinado remédio contra febre faça efeito segue uma distribuição uniforme no intervalo de 20 a 50 (em minutos). Qual a probabilidade da febre de uma pessoa que tomou esse remédio durar mais de 40 minutos, sabendo-se que sua febre não cedeu 30 primeiros após ter tomado o remédio?

[A] 1/3 [B] 1/4 [C] 1 ■ 1/2 [E] 2/3

Teste 2 Obtenha $\mathbb{P}(X > Y)$, se a função densidade de probabilidade conjunta de variáveis aleatórias X e Y é:

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x^2 + xy), & 0 < x < 1, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

[A] 1/2. [B] 5/8. [C] 31/40. ■ 9/40. [E] 1/3.

Teste 3 Seja S a soma de 16 variáveis aleatórias independentes, todas com distribuição uniforme no intervalo $[6 - \sqrt{3}, 6 + \sqrt{3}]$. Quanto vale (aproximadamente) a probabilidade de S estar entre 92 e 100?

[A] 0,92. [B] 0,53. ■ 0,68. [D] 0,75. [E] 0,10.

Teste 4 Considere duas variáveis aleatórias X e Y, contínuas, não negativas e independentes. Ambas têm distribuição exponencial com esperanças: $\mathbb{E}[X] = \beta$ e $\mathbb{E}[Y] = 2\beta$. Qual a probabilidade $\mathbb{P}(0 < X < \beta, 0 < Y < 2\beta))$?

[A] $1 - e^{-2\beta}$. [B] $e^{-2\beta}$. [C] $(1 - e^{-\beta})^2$. [D] e^{-2}. ■ $(1 - e^{-1})^2$.

Teste 5 O tempo de vida de uma máquina é uma variável aleatória contínua $X \geq 0$, expressa em anos. Sabe-se que $\mathbb{P}(X > a) = \exp(-a\beta)$, sendo $\beta > 0$ uma constante. Considere uma máquina que está em operação há um ano. Qual a probabilidade desta máquina funcionar por mais dois anos ?

■ $\exp(-2\beta)$. [B] $\exp(-3\beta + 1)$. [C] $1 - \exp(-3\beta)$. [D] $1 - \exp(-2\beta)$. [E] $\exp(-3\beta)$.

Teste 6 A função densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y, para uma constante c, é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} cy^2, & 0 < x < 2; 0 < y < 1; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

A densidade marginal de X, para $0 < x < 2$, é:

[A] 1/3. [B] 1. [C] $3x^2$. ■ 1/2. [E] $3x$.

Teste 7 Um sistema é constituído de 3 componentes que funcionam de forma independente. Sabe-se que se um dos componentes falhar o sistema falha. O tempo de vida de cada um dos componentes segue uma distribuição exponencial cujas valores esperados são: $10t$, $10t/3$ e $10t/6$. Qual a probabilidade de o sistema não falhar antes de t?

■ e^{-1}. [C] $(1-e^{-0,1}).(1-e^{-0,3}).(1-e^{-0,6})$. [D] $1 - e^{-1}$.
[B] $e^{-0,9} + e^{-0,4} + e^{-0,7} - 3e^{-1}$. [E] $e^{-0,1} + e^{-0,3} + e^{-0,6}$.

Teste 8 A função densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x + y), & 0 < x < y < 1; \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

A densidade condicional de X dado Y, para $0 < x < 1$, é:

[A] $3y^2$. [C] $2(x + y)$. [E] $1 + 2y - 3y^2$.
■ $2(x + y)/3y^2$. [D] $2(x + y)/(1 + 2y - 3y^2)$.

Teste 9 O preço da gasolina aditivada (G_a) no Brasil depende do valor do preço da gasolina comum (G_c), do etanol (E_t) e dos aditivos (A_d), seguindo a função $G_a = 0{,}7G_c + 0{,}25E_t + 0{,}05A_d$. Sabe-se que os preços por litro dos componentes da gasolina aditivada podem ser modelados por variáveis aleatórias independentes com distribuições normais com médias e variâncias mostradas na tabela abaixo. A probabilidade que o preço da gasolina aditivada ultrapasse R$7,00 o litro é aproximadamente:

Componente	Valor médio (R$)	Variância (R$)^2
G_c	5,00	4,00/0,555
E_t	4,00	4,00/0,555
A_d	10,00	4,00/0,555

A 0,82   ■ 0,16   C 0,45   D 0,02   E 0,34

Teste 10 Seja X uma variável aleatória discreta distribuida conforme a distribuição de Poisson. Seja X_N a variável aleatória binomial usada na "aproximação da Poisson pela Binomial". Nesse contexto, considere as seguintes afirmações.
a) $\lim_{N\to+\infty} |X - X_N| = 0$.
b) $\forall\epsilon > 0$, $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X - X_N| > \epsilon) = 0$.
c) $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[X_N] = \mathbb{E}[X]$.
Quais alternativas são corretas?

A Só (b).   B Só (a).   ■ Só (c).   D Todas.   E Só (a) e (b).

Teste 11 Considere as afirmações a respeito de uma variável aleatória discreta X que assume apenas valores reais.
(a) $\mathbb{E}[X|X] = X$.   (b) $\mathbb{E}[X|X^3] = X$.   (c) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|X]] = X$.
Quais alternativas são corretas?

A Só (a).   B Só (a) e (c).   ■ Só (a) e (b).   D Só (b) e (c).   E Só (c).

Teste 12 O tempo que um aparelho eletrônico funciona sem apresentar defeito tem distribuição exponencial com média 5000h. Este não apresentou defeito até o momento mas não se sabe por quanto tempo T já foi usado. Qual a probabilidade de que não apresente defeito durante as próximas 3000h?

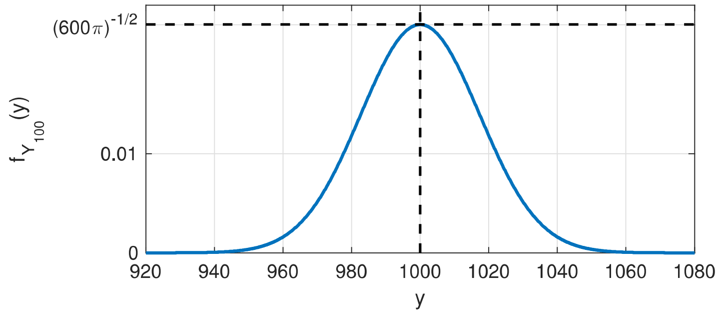
A 2/5.   B é necessário saber T.   C $e^{-0.5}$.   D 1/3.   ■ $e^{-0.6}$.

Teste 13 Dimensione o comprimento médio de uma prateleira para acomodar 10 latas quadradas de tinta que tem larguras normais de valor esperado 20 cm e desvio padrão $\sqrt{2{,}5}$. Deseja-se que as latas escolhidas aleatoriamente (de forma independente) caibam na prateleira e que a probabilidade de deixarem uma folga menor que 5 cm entre a última lata e o final da prateleira seja menor que 0,025. Admita que as latas foram encostadas à esquerda no início da prateleira.

A 202,5   B 205,0   C 225,0   D 200,0   ■ 214,8

Teste 14 A variável aleatória Y_{100} é obtida a partir da soma de 100 variáveis aleatórias independentes, todas com distribuição uniforme em $[a,b]$ (ou seja, $Y_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$). Uma aproximação para a função densidade de probabilidade de Y_{100} é mostrada na figura ao lado.
Os valores de a e b são respectivamente iguais a:

A 2 e 18
■ 7 e 13
C $1/\sqrt{6\pi}$ e $10 + 1/\sqrt{6\pi}$
D 9,4 e 10,4
E 2π e $2\pi + 10$



Teste 15 Um comprimido é produzido em série numa empresa farmacêutica com peso médio de 1,400 mg e desvio padrão de 0,100 mg com distribuição normal. Os comprimidos passam por um controle de qualidade e os comprimidos com peso menor que 1,350 mg e peso maior que 1,519 são eliminados do lote. Qual a probabilidade de nesse lote restante retirarmos ao acaso um comprimido com pese entre os valores 1.350 e 1,400 mg?

A 0,19   B 0,33   C 0,38   D 0,50   E 0,98

Probabilidade (espaço amostral S, eventos $A,B,\ldots$): $\mathbb{P}(A) \geq 0$; $\mathbb{P}(S) = 1$; $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ para eventos A_i disjuntos.
Probabilidade condicional: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. Temos: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$ se $\{B_i\}$ formam uma partição de S. Eventos $A_1,\ldots,A_n$ são **independentes** se $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$ para qualquer escolha de $i_1,\ldots,i_k$.
Número de possíveis escolhas ordenadas de k elementos entre n elementos: $n!/(n-k)!$. Número de possíveis escolhas não-ordenadas de k elementos entre n elementos (combinações): $n!/(k!(n-k)!) = \binom{n}{k}$.
Variável aleatória: função de S para números reais. Variável aleatória X pode ser discreta (por exemplo, valores são números inteiros); nesse caso sua distribuição é caracterizada pela função $\mathbb{P}(X = x)$ para todo valor x de X e sua esperança é $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$. Variável aleatória pode ser contínua (por exemplo, valores formam intervalo dos reais); nesse caso sua distribuição é caracterizada pela densidade $f_X(x)$, definida como a derivada de $F_X(x)$, onde $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ é a função de distribuição cumulativa de X ($F_X(x)$ é não-decrescente, tende a 0 para $x \to -\infty$, e tende a 1 para $x \to \infty$). Portanto $f_X(x) = d\mathbb{P}(X \leq x)/dx$ e $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f_X(x)dx$. A esperança de variável aleatória contínua X é $\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x)dx$. A variância de uma variável aleatória X qualquer é $V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$; o momento de ordem k de X é $\mathbb{E}[X^k]$. Se $h(X)$ é uma função de variável aleatória X, então $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_i h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$ se X é discreta, e $\mathbb{E}[h(X)] = \int h(x) f_X(x)dx$ se X é contínua.
Bernoulli (um ensaio, com valores 0 e 1): $p = \mathbb{P}(X = 1)$, e $\mathbb{E}[X] = p$; $V[X] = p(1-p)$.
Binomial (n ensaios, p probabilidade de sucesso): $\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$, e $\mathbb{E}[X] = np$, $V[X] = np(1-p)$.
Geométrica (p probabilidade de sucesso): $\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^x$ para $x \geq 0$; $\mathbb{E}[X] = (1-p)/p$, $V[X] = (1-p)/p^2$.
Poisson (parâmetro λ): $\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!$ para $x \geq 0$; $\mathbb{E}[X] = V[X] = \lambda$.
Uma variável multidimensional $[X_1,\ldots,X_n]$ discreta é descrita por sua **distribuição** $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$. A distribuição marginal de X_1 é $\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n)$. As variáveis são **independentes** se e somente se $\mathbb{P}(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$. A distribuição **condicional** de X dado Y é $\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)/\mathbb{P}(Y = y)$; a esperança conditional $\mathbb{E}[X|Y]$ é uma função cujo valor para $Y = y$ é $\sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i|Y = y)$.
A **função de distribuição cumulativa** $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ é igual a $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n)$. Para duas variáveis (discretas ou contínuas), a **covariância** de X e Y é $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ e o **coeficiente de correlação** de X e Y é $\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)/(\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]})$.
Uniforme entre a e b: $f_X(x) = 1/(b-a)$ entre a e b, e zero caso contrário; $\mathbb{E}[X] = (a+b)/2$ e $V[X] = (b-a)^2/12$.
Normal $N(\mu,\sigma^2)$: $f_X(x) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2})\exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$, e $\mathbb{E}[X] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$.
Exponencial (parâmetro λ): $f_X(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$ para $x \geq 0$; $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$, $V[X] = 1/\lambda^2$.
Uma variável multidimensional $[X_1,\ldots,X_n]$ contínua é descrita por sua **densidade** $f(x_1,\ldots,x_n)$ (uma densidade é uma função maior ou igual a 0, e cuja integral no espaço inteiro é 1). Dada a densidade $f(x_1,\ldots,x_n)$, a probabilidade $\mathbb{P}([X_1,\ldots,X_n] \in A)$, para um evento em $\Re^n$, é a integral $\int \ldots \int_A f(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \ldots dx_n$. A densidade marginal de X_1 é $f_{X_1}(x_1) = \int \ldots \int f(x_1,\ldots,x_n)dx_2 \ldots dx_n$ (ou seja, integral em todas as outras coordenadas; para duas variáveis X e Y, temos $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$). Para X e Y, temos $f(x,y) = \partial^2 F_{X,Y}(x,y)/\partial x\partial y$. Variáveis contínuas são **independentes** se e somente se $f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ (equivalente a $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$). A **densidade condicional** de X dado Y é $f(x|y) = f(x,y)/f_Y(y)$, e a **esperança condicional** de X dado Y é $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int x f(x|y)dx$.
Se $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ e $V[X_i] = \sigma^2$, então $\mathbb{E}[\sum_i a_i X_i] = \sum_i a_i \mathbb{E}[X_i]$ e $V[\sum_i a_i X_i] = \sum_i \sum_j a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
Se X é $N(\mu,\sigma^2)$ e $Y = aX + b$ com $a \neq 0$, então Y é $N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$. Se X_i é $N(\mu_i,\sigma_i^2)$, todos X_i independentes, então $Y = \sum_i a_i X_i$ é $N(\sum_i a_i\mu_i, \sum_i a_i^2\sigma_i^2)$.
Teorema do Limite Central: Seja $X_1,X_2,\ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ e $V[X_i] = \sigma^2$, e seja $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Então $Z_n = (S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ tem uma função de distribuição cumulativa que converge para a função de distribuição cumulativa da distribuição normal padrão.

0303200 – Probabilidades

Turma: **Prof:** **Prova 3, 2018**

Nome (completo): No.USP:

0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9 9

1) Use caneta azul ou preta para marcar as caixas e preencha a caixa totalmente para correta interpretação. Exemplo: ■. **Não use ⊠.**
2) Insira seu número USP nas caixas ao lado.
3) A prova tem duração de 100 minutos; não haverá tempo adicional.
4) O aluno deve comprovar sua identidade com documento oficial.
5) Alunos só podem sair da sala de prova 60 minutos após o início da prova.
6) Não é permitido o uso de calculadoras.
7) Não é permitido o uso de telefones celulares ou equipamentos móveis similares. Esses equipamentos devem ser colocados na frente da sala.
8) Se necessário, consulte o formulário e a tabela da distribuição normal no verso da folha com questão dissertativa.

Respostas dos testes:

Atenção: respostas devem ser indicadas nesta folha!

Teste 1: A B C D E
Teste 2: A B C D E
Teste 3: A B C D E
Teste 4: A B C D E
Teste 5: A B C D E
Teste 6: A B C D E
Teste 7: A B C D E
Teste 8: A B C D E
Teste 9: A B C D E
Teste 10: A B C D E
Teste 11: A B C D E
Teste 12: A B C D E
Teste 13: A B C D E
Teste 14: A B C D E
Teste 15: A B C D E

Distribuição Normal P(0≤Z<z0)

z0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990