0303200 – Probabilidades | Turma: | Prof: | Prova 2, 2018

Nome (completo):

Teste 1 Sejam as variáveis aleatórias X e Y, que representam o número de vezes que um ingressante de 2014 cursou a disciplina *Cálculo I* e a disciplina *Probabilidade*, respectivamente. A distribuição de probabilidade conjunta está na tabela abaixo. O valor médio do número de vezes que o ingressante de 2014 cursou a disciplina *Probabilidade* dado que cursou *Cálculo I* uma única vez vale:

$p(x,y)$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$x = 1$	0,25	0,15	0,05
$x = 2$	0,10	0,15	0,10
$x = 3$	0,05	0,10	0,05

A 14/8 B 9/5 C 1 ■ 14/9 E 5/2

Teste 2 A função distribuição cumulativa $F_X(x)$ de uma variável aleatória X é definida da seguinte forma:

$F_X(x)$ igual a 0 para $x < -2$, $2/9$ para $-2 \leq x < 0$, $7/9$ para $0 \leq x < 2$, 1 para $x \geq 2$.

Dentre as afirmações a seguir, quais são verdadeiras?
a) $\mathbb{E}[X] + \sigma_X = 4/3$ e $\mathbb{E}[X^2] = V[X]$.
b) $\mathbb{E}[aX^2 - bX + c] = (20a - 10b + 9c)/9$, sendo a, b, c constantes.
c) $\mathbb{E}[X^2] = 20/9$ e $\mathbb{E}[X] = 10/9$.

A Só (c). B Só (b). C Só (b) e (c). D Só (a) e (c). ■ Só (a).

Teste 3 Considere duas variáveis aleatórias X e Y, independentes, e ambas com distribuição geométrica com parâmetro $p = 1/4$. Considere também duas variáveis $W = X + Y$ e $Z = X - Y + 3$. O valor de $\mathbb{P}(W \geq Z)$ é:

A 1/4. B 7/16. ■ 9/16. D 1/2. E 3/4.

Teste 4 Um lote de 10 sinalizadores navais está sendo testado antes de ser entregue a uma guarnição do Corpo de Bombeiros. O ensaio consiste em acender o sinalizador e verificar o tempo de queima. O engenheiro deseja lotes sem nenhuma sinalizador defeituoso. Imaginou um ensaio que consiste em retirar do lote 1 sinalizador e testá-lo; se o sinalizador não falhar o lote é aceito; caso contrário o lote é rejeitado. No teste de 10 lotes idênticos, cada um com 1 sinalizador não conforme, qual a probabilidade de serem aceitos mais de 7 desses lotes com problemas?

A $(0{,}9)^{10}$. B $1{,}71(0{,}9)^9$. ■ $2{,}16(0{,}9)^8$. D $1{,}35(0{,}9)^8$. E 0,9.

Teste 5 Uma urna contém 3 bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola tirada e Y o número da segunda bola. O valor de $\mathbb{P}(X < Y)$ é:

A 1/4. B 2/3. ■ 1/2. D 1/6. E 1/3.

Teste 6 Uma moeda honesta é jogada repetidamente. Qual a probabilidade de se obter 3 caras antes de aparecerem 4 coroas?

■ 21/32. B 43/64. C 15/64. D 2/3. E 1/2.

Teste 7 A probabilidade de um atirador acertar o alvo em um único tiro é 1/3. Quantas vezes ele deve atirar de modo que a probabilidade dele acertar o alvo pelo menos uma vez seja maior que 3/4?

■ 4. B 3. C nunca fica maior que 3/4. D 5. E 6.

Teste 8 A tabela abaixo mostra a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y.

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	a	0,2	b
$X=1$	0,1	0,2	0,1

Sabe-se que $\mathrm{Cov}[X,Y]=0$. Dentre as afirmações a seguir, quais são verdadeiras?
a) X e Y são variáveis independentes e $a=b$.
b) $\rho(X,Y)=0$ e $a/b=2$.
c) $\mathbb{E}[Y]=1$ e $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[XY]$.

[A] Só (a). ■ Só (c). [C] Só (a) e (b). [D] Só (b). [E] Só (b) e (c).

Teste 9 O setor de manutenção de uma empresa consegue atender até 2 casos de quebra de impressoras em um dia ou horas extras serão necessárias naquele dia. A média de quebras é de 2.0 impressoras por dia; a distribuição do número de quebras é Poisson. Qual é a probabilidade de serem necessárias horas extras pelo menos em algum dia da semana de trabalho (5 dias)?

[A] 0.5. ■ $1-5^5e^{-10}$. [C] $1-4^5e^{-4}$. [D] $1-5e^{-2}$. [E] 0.99.

Teste 10 Seja X_i, $i=1,2,3$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes (resultados de 3 experimentos idênticos mas independentes). Sabe-se que $\mathrm{E}\{X_i\}=\mu$ e $\mathrm{var}(X_i)=\sigma^2$, $i=1,2,3$. Deseja-se estimar μ com o seguinte estimador:

$$\widehat{\mu}=(X_1+X_2+X_3)/3.$$

A variância de $\widehat{\mu}$ é igual a

[A] $\sigma^2/9$ ■ $\sigma^2/3$ [C] $(\sigma^2-\mu^2)/3$ [D] $\sigma^2/3+\mu^2$ [E] $3\sigma^2$

Teste 11 Considere um experimento em que um número real R é sorteado do intervalo $\Omega=[0,1]$. A probabilidade do número sorteado cair em um intervalo de comprimento L é L. Sejam os intervalos $I_A=[0,a]$ ($a\in\Omega$) e $I_B=[\frac{1}{8},\frac{5}{8}]$. Definem-se as variáveis aleatórias: $X_A=1$ se $R\in I_A$, $X_A=0$ se $R\notin I_A$, e analogamente $X_B=1$ se $R\in I_B$, $X_B=0$ se $R\notin I_B$. Dentre as afirmações a seguir, quais são verdadeiras?
a) Pode-se afirmar que $\exists a\in\Omega$ tal que os *eventos* I_A e I_B são independentes.
b) Pode-se afirmar que $\exists a\in\Omega$ tal que as *variáveis aleatórias* X_A e X_B são independentes.
c) A correlação entre X_A e X_B é sempre nula, qualquer que seja $a\in\Omega$.

[A] (a), (b) e (c). ■ Só (a) e (b). [C] Só (a) e (c). [D] Só (a). [E] Só (b) e (c).

Teste 12 Considere duas variáveis aleatórias X e Y, independentes, e ambas com distribuição geométrica com parâmetro p. O valor de $\mathbb{P}(X=Y)$ é:

[A] p. ■ $p^2/[1-(1-p)^2]$. [C] $p/[1-(1-p)^2]$. [D] $p^2/(1-p)$. [E] $(1-p)^2/p$.

Teste 13 Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Dentre as afirmações a seguir, quais são verdadeiras?
a) Se X e Y são independentes: $\mathbb{E}[XZ]=\mathrm{Cov}[X,Y+Z]+\mathbb{E}[X].\mathbb{E}[Z]$, para qualquer variável aleatória Z.
b) $\mathrm{Cov}[X+Y,X-Y]=V[X]-V[Y]+2\mathrm{Cov}[X,Y]$.
c) $\mathrm{Cov}[X+Y,X+Y]=V[X]+V[Y]+2\mathrm{Cov}[X,Y]$.

[A] Só (a). [B] Só (b) e (c). [C] Só (a) e (b). ■ Só (a) e (c). [E] (a), (b) e (c).

Teste 14 Numa fábrica de artefatos de porcelana, situada em São Paulo, o processo consiste de duas fases: cozimento e pintura. Na primeira fase, a probabilidade de ocorrência de falhas é de 0,03. Na segunda fase, os defeitos ocorrem segundo uma distribuição de Poisson, com parâmetro λ=5falhas/100 peças se ocorreu falha na fase de cozimento e com parâmetro λ=k falhas/10 peças caso contrário. Se ocorrer defeito em nenhuma ou em apenas uma das fases o produto é vendido por \$10,00 à unidade. Se ocorreu defeito nas duas fases o preço passa a \$5,00. Qual o valor médio de venda de uma peça?

[A] $10e^{-k}+5e^{-0,5}$. [C] $5+0.97e^{k-5}$. [E] $10e^{-0,5}+5e^{-k}$.
[B] $9,7+0,21e^{-0,5-k}$. ■ $9,85+0,15e^{-0,05}$.

Teste 15 Para X e Y duas variáveis aleatórias discretas, que possuem distribuição conjunta de acordo com a tabela abaixo, quais são os valores de $\mathbb{P}(X=1), \mathbb{P}(X=2), \mathbb{P}(X=3)$?

$p(x,y)$	$y=1$	$y=2$	$y=3$
$x=1$	$8k$	$6k$	$7k$
$x=2$	$5k$	$3k$	$6k$
$x=3$	0	k	$4k$

A $17/40, 1/4, 13/40$.

■ $21/40, 7/20, 1/8$.

C $13/40, 1/4, 17/40$.

D $1/5, 1/8, 0$.

E $1/5, 3/20, 7/40$.

Probabilidade (espaço amostral S, eventos $A,B,\dots$): $\mathbb{P}(A) \geq 0$; $\mathbb{P}(S)=1$; $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ para eventos A_i disjuntos. **Probabilidade condicional**: $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$. Temos: $\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$ se $\{B_i\}$ formam uma partição de S. Eventos $A_1,\dots,A_n$ são **independentes** se $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$ para qualquer escolha de $i_1,\dots,i_k$. Número de possíveis escolhas ordenadas de k elementos entre n elementos: $n!/(n-k)!$. Número de possíveis escolhas não-ordenadas de k elementos entre n elementos (combinações): $n!/(k!(n-k)!) = \binom{n}{k}$.

Variável aleatória: função de S para números reais. Variável aleatória X pode ser discreta (por exemplo, valores são números inteiros); nesse caso sua distribuição é caracterizada pela função $\mathbb{P}(X=x)$ para todo valor x de X e sua esperança é $\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i \mathbb{P}(X=x_i)$. Variável aleatória pode ser contínua (por exemplo, valores formam intervalo dos reais); nesse caso sua distribuição é caracterizada pela densidade $f_X(x)$, definida como a derivada de $F_X(x)$, onde $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ é a função de distribuição cumulativa de X ($F_X(x)$ é não-decrescente, tende a 0 para $x \to -\infty$, e tende a 1 para $x \to \infty$). Portanto $f_X(x) = d\mathbb{P}(X \leq x)/dx$ e $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f_X(x)dx$. A esperança de variável aleatória contínua X é $\mathbb{E}[X] = \int x f_X(x) dx$. A variância de uma variável aleatória X qualquer é $V[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$; o momento de ordem k de X é $\mathbb{E}[X^k]$. Se $h(X)$ é uma função de variável aleatória X, então $\mathbb{E}[h(X)] = \sum_i h(x_i)\mathbb{P}(X=x_i)$ se X é discreta, e $\mathbb{E}[h(X)] = \int h(x) f_X(x) dx$ se X é contínua.

Bernoulli (um ensaio, com valores 0 e 1): $p = \mathbb{P}(X=1)$, e $\mathbb{E}[X] = p$; $V[X] = p(1-p)$.

Binomial (n ensaios, p probabilidade de sucesso): $\mathbb{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, e $\mathbb{E}[X] = np$, $V[X] = np(1-p)$.

Geométrica (p probabilidade de sucesso): $\mathbb{P}(X=x) = p(1-p)^x$, e $\mathbb{E}[X] = (1-p)/p$, $V[X] = (1-p)/p^2$.

Poisson (parâmetro λ): $\mathbb{P}(X=x) = e^{-\lambda}\lambda^x/x!$, e $\mathbb{E}[X] = V[X] = \lambda$.

Uma variável multidimensional $[X_1,\dots,X_n]$ discreta é descrita por sua **distribuição** $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$. A distribuição marginal de X_1 é $\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$. As variáveis são **independentes** se e somente se $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$. A distribuição **condicional** de X dado Y é $\mathbb{P}(X=x|Y=y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)/\mathbb{P}(Y=y)$.

A **função de distribuição cumulativa** $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ é igual a $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$. Para duas variáveis (discretas ou contínuas), a **covariância** de X e Y é $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ e o **coeficiente de correlação** de X e Y é $\rho(X,Y) = \text{Cov}(X,Y)/(\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]})$.

0303200 – Probabilidades

Turma: **Prof:**

Prova 2, 2018

Nome (completo): No.USP:

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

1) Use caneta azul ou preta para marcar as caixas e preencha a caixa totalmente para correta interpretação. Exemplo: ■. **Não use ☒.**
2) Insira seu número USP nas caixas ao lado.
3) A prova tem duração de 100 minutos; não haverá tempo adicional.
4) O aluno deve comprovar sua identidade com documento oficial.
5) Alunos só podem sair da sala de prova 60 minutos após o início da prova.
6) Não é permitido o uso de calculadoras.
7) Não é permitido o uso de telefones celulares ou equipamentos móveis similares. Esses equipamentos devem ser colocados na frente da sala.
8) Se necessário, consulte o formulário e a tabela da distribuição normal no verso da folha com questão dissertativa.

Respostas dos testes:

Atenção: respostas devem ser indicadas nesta folha!

Teste 1:	A	B	C	D	E
Teste 2:	A	B	C	D	E
Teste 3:	A	B	C	D	E
Teste 4:	A	B	C	D	E
Teste 5:	A	B	C	D	E
Teste 6:	A	B	C	D	E
Teste 7:	A	B	C	D	E
Teste 8:	A	B	C	D	E
Teste 9:	A	B	C	D	E
Teste 10:	A	B	C	D	E
Teste 11:	A	B	C	D	E
Teste 12:	A	B	C	D	E
Teste 13:	A	B	C	D	E
Teste 14:	A	B	C	D	E
Teste 15:	A	B	C	D	E