0303200 – Probabilidades REOF 2017 Prova SUB

Nome (completo):	No. USP:

1) A prova tem duração de 60 minutos; não haverá tempo adicional.
2) O aluno deve comprovar sua identidade com documento oficial.
3) Alunos só podem sair da sala de prova 40 minutos após o início da prova.
4) Não é permitido o uso de calculadoras.
5) Não é permitido o uso de telefones celulares ou equipamentos móveis similares. Esses equipamentos devem ser colocados na frente da sala.
6) Se necessário, consulte o formulário e a tabela da distribuição normal no verso.
7) Responda as questões em papel almaço.

1) Usando uma distribuição binomial com parâmetro $n = 3$ e $p = 1/2$, um número N é escolhido. São então colocadas 10 bolas em uma urna, sendo N bolas azuis e $10 - N$ bolas amarelas. Em seguida são retiradas 5 bolas sem reposição e de forma aleatória.

a) Qual a probabilidade que exatamente 2 bolas azuis sejam retiradas, dado que $N = 3$? [1.0]

b) Qual a probabilidade que N seja igual a 3, dado que exatamente 4 bolas amarelas foram retiradas? [1.5]

RESPOSTA:

a) Para $N = 4$, temos

$$\mathbb{P}(2 \text{ azuis}|N=3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{3 \times 35}{4 \times 9 \times 7} = 5/12.$$

b) Usando a regra de Bayes:

$$\mathbb{P}(N=3|4 \text{ amarelas}) = \frac{\mathbb{P}(4 \text{ amarelas}|N=3)\mathbb{P}(N=3)}{\mathbb{P}(4 \text{ amarelas})} = \frac{\dfrac{\binom{3}{1}\binom{7}{4}\binom{3}{3}(1/2)^3}{\binom{10}{5}}}{\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\binom{i}{1}\binom{10-i}{4}\binom{3}{i}(1/2)^3}{\binom{10}{5}}} = 5/43.$$

$$\mathbb{P}(N=3|4\text{ amarelas}) = \frac{\mathbb{P}(4\text{ amarelas}|N=3)\mathbb{P}(N=3)}{\mathbb{P}(4\text{ amarelas})} = \frac{\binom{10}{5}}{\sum_{i=1}^{3} \frac{\binom{i}{1}\binom{10-i}{4}\binom{3}{i}(1/2)^3}{\binom{10}{5}}} = 5/43.$$

2) Suponha que a resistência à tração de um aço A tenha valor esperado 105ksi e desvio padrão 10ksi. Suponha também que a resistência à tração de um aço B tenha valor esperado 100ksi e desvio padrão 6ksi. Indique por X a média da resistência de uma amostra de 80 barras de aço A, e por Y a resistência média de uma amostra de 36 barras de aço B. Todas as barras foram selecionadas de forma independente.

a) Obtenha, com boa aproximação, a probabilidade que $X - Y$ seja maior que 2. [1.0]

b) Suponha que em 10 diferentes países foram feitas medidas independentes de Y, e indique por W a média de todas essas 10 medidas. Nesse caso, qual a probabilidade que a medida de Y no primeiro país seja maior do que W? [1.5]

RESPOSTA:
a) Distribuição é aproximadamente normal com valor esperado 5 e desvio padrão $\sqrt{(100/80)+(36/36)} = \sqrt{9/4} = 3/2$; usando a tabela, $\mathbb{P}(X-Y>2) = \mathbb{P}(Z > -3/(3/2)) = \mathbb{P}(Z > -2) = 1/2 + \mathbb{P}(0 \leq Z \leq 2) = 0,9772$.
b) $\mathbb{P}(Y_1 > W) = \mathbb{P}(9Y_1 - Y_2 + \cdots - Y_{10} > 0)$; usando o fato que a distribuição de cada Y_i é aproximadamente normal com valor esperado 100 e desvio padrão $\sqrt{36/36} = 1$, obtemos que $9Y_1 - Y_2 + \cdots - Y_{10}$ é aproximadamente normal com valor esperado 0 e desvio padrão $\sqrt{81+9} = \sqrt{90}$. Portanto $\mathbb{P}(Y_1 > W) = 1/2$.

3) O tempo de vida de um dispositivo tem valor esperado de 3 anos e segue uma distribuição exponencial. Um sistema de segurança é constituído de cinco destes dispositivos. Os dispositivos são idênticos e operam de forma independente. O sistema opera se pelo menos dois dos cinco dispositivos operarem.

a) Determine a probabilidade de exatamente dois dispositivos operarem por pelo menos 3 anos. [1.5]

b) Determine a probabilidade de o sistema operar mais que 3 anos. [1.0]

RESPOSTA:
a) $E(X) = 1/\lambda = 3$; portanto $f(x) = (e^{-x/3})/3$, e $\mathbb{P}(X < x) = F(x) = (1 - e^{-x/3})$; consequentemente $p = \mathbb{P}(X > 3) = 1 - (1 - e^{-3/3}) = e^{-1}$, $\mathbb{P}(Y = 2) = C_{5,2}p^2(1-p)^3 = 10e^{-2}(1-e^{-1})^3$.
b) $\mathbb{P}(Y$ … $C_{5,2}p^2(1-p)^3 + C_{5,3}p^3(1-p)^2 + C_{5,4}p^4(1-p)^1 + C^{5,5}p^5 =$

3) O tempo de vida de um dispositivo tem valor esperado de 3 anos e segue uma distribuição exponencial. Um sistema de segurança é constituído de cinco destes dispositivos. Os dispositivos são idênticos e operam de forma independente. O sistema opera se pelo menos dois dos cinco dispositivos operarem.

a) Determine a probabilidade de exatamente dois dispositivos operarem por pelo menos 3 anos. [1.5]

b) Determine a probabilidade de o sistema operar mais que 3 anos. [1.0]

RESPOSTA:
a) $E(X) = 1/\lambda = 3$; portanto $f(x) = (e^{-x/3})/3$, e $\mathbb{P}(X < x) = F(x) = (1 - e^{-x/3})$; consequentemente $p = \mathbb{P}(X > 3) = 1 - (1 - e^{-3/3}) = e^{-1}$, $\mathbb{P}(Y = 2) = C_{5,2}p^2(1-p)^3 = 10e^{-2}(1-e^{-1})^3$.
b) $\mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) + \mathbb{P}(Y = 4) + \mathbb{P}(Y = 5) = C_{5,2}p^2(1-p)^3 + C_{5,3}p^3(1-p)^2 + C_{5,4}p^4(1-p)^1 + C^{5,5}p^5 = 10p^2(1-p)^3 + 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p)^1 + p^5$.

4) Duas variáveis contínuas aleatórias X e Y tem densidade de probabilidade expressa por:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y^2), & 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Obtenha a função densidade de probabilidade marginal de y. [1.0]

b) Obtenha a função densidade de probabilidade de X para dado $Y = y$. [1.0]

c) Calcule a probabilidade $\mathbb{P}(X < 1/2 | Y = 1/2)$. [0.5]

RESPOSTA:
a) $\int_0^1 \int_0^1 c(x+y^2)dxdy = \int_0^1 c(1/2 + y^2)dy = 5c/6 = 1$, portanto $c = 6/5$. Portanto $f_Y(y) = \int_0^1 (6/5)(x + y^2)dx = (6/5)(1/2 + y^2)$.
b) $f_X(x|y) = f(x,y)/f_Y(y) = c(x+y^2)/(c(1/2+y^2)) = (x+y^2)/(1/2+y^2)$.
c) $\mathbb{P}(X < 1/2|Y = 1/2) = \int_0^{1/2} (x + 1/4)/(1/2 + 1/4)dx = 1/3$.