0303200 – Probabilidades | Turma: | Prof: | **SUB, 2017**

Nome (completo):

[0] [0] [0] [0] [0] [0] [0]
[1] [1] [1] [1] [1] [1] [1]
[2] [2] [2] [2] [2] [2] [2]
[3] [3] [3] [3] [3] [3] [3]
[4] [4] [4] [4] [4] [4] [4]
[5] [5] [5] [5] [5] [5] [5]
[6] [6] [6] [6] [6] [6] [6]
[7] [7] [7] [7] [7] [7] [7]
[8] [8] [8] [8] [8] [8] [8]
[9] [9] [9] [9] [9] [9] [9]

1) Use caneta azul ou preta para marcar as caixas e preencha a caixa totalmente para correta interpretação. Exemplo: ■. **Não use** ⊠.
2) Insira seu número USP nas caixas ao lado.
3) A prova tem duração de 100 minutos; não haverá tempo adicional.
4) O aluno deve comprovar sua identidade com documento oficial.
5) A prova só pode ser entregue 60 minutos após seu início.
6) Alunos só podem sair da sala de prova após entregarem a prova.
7) Não é permitido o uso de calculadoras. As questões foram feitas de forma a minimizar necessidade de cálculos aritméticos.
8) Não é permitido o uso de telefones celulares ou equipamentos móveis similares. Esses equipamentos devem ser colocados na frente da sala.
9) Se necessário, consulte o formulário ao final da prova. Apenas esse formulário é permitido durante a prova.

Teste 1 Temos três eventos A, B, C; além disso, sabemos que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) = 1/2$, $\mathbb{P}(B|C) = 1/3$, $\mathbb{P}(B|C^c) = 3/4$, onde c indica complemento. Finalmente, temos $\mathbb{P}(A|B \cap C) = 2\mathbb{P}(A|(B \cap C)^c)$. Portanto $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ vale:

[A] 3/7. [B] 1/7. [C] 7/21. [D] 0. [E] 1/2.

Solução: Como P(A) = 1/2 = P(A|BC) P(BC) + P(A|(BC)^c) P((BC)^c)$, temos 1/2 = 2x(1/3)(1/2) + x(1 - (1/3)(1/2)) onde x = P(A|(BC)^c); portanto x = 3/7 e P(ABC) = 2x(1/3)(1/2) = 1/7.$

Teste 2 O número de anos de funcionamento de um rádio é uma variável aleatória exponencial com parâmetro $\lambda = 1/10$. Se eu compro um rádio usado, qual é a probabilidade de que ele vai funcionar mais dez anos?

[A] e^{-1}. [B] e^{-10}. [C] 1/2. [D] $1 - e^{-0,1}$. [E] $e^{-0,1}$.

Solução: P(X>=t+10|X>=t) = $e^{-(t+10)/10}/e^{-t/10} = e^{-1}$.

Teste 3 Considere duas variáveis aleatórias independentes X e Y; ambas as variáveis obedecem uma distribuição exponencial com parâmetro igual a 1. A variância da variável aleatória $Z = 3X - 4Y$ é

[A] 5. [B] 25. [C] 7. [D] −1. [E] 1.

Solução: V(Z) = 9 V(X) + 16 V(Y) = 9+16 = 25.

Teste 4 A cada ano, 400 alunos ingressam em um determinado curso universitário; sabe-se, com base em dados coletados ao longo dos anos, que metade dos ingressantes conclui o curso. A probabilidade de que pelo menos 215 dos 400 alunos que ingressam anualmente terminem o curso é:

[A] 0,4332. [B] 0,0668. [C] 0,1336. [D] 0,9332. [E] 0,5668.

Solução: P(Sn >= 215) = P((Sn-200)/10 >= (215-200)/10) = 0,0668.

Teste 5 Considere uma variável aleatória contínua X com densidade $f_X(x) = 2x$ para $x \in [0,1]$, e $f_X(x) = 0$ para $x \notin [0,1]$. Qual o valor de $\mathbb{E}[X^2 - 3X]$?

[A] 7/21. [B] 2. [C] 1/2. [D] −3/2. [E] π.

Atenção: Apresente a solução das questões abaixo no verso desta folha!

Questão A) Em uma caixa temos N moedas, todas independentes e idênticas com probabilidade de cara igual a 1/3.
a) Se $N = 4$, calcule a probabilidade de termos exatamente 2 caras. [Valor=1,0]

b) Se N for uma variável aleatória com distribuição Poisson de esperança 3, calcule a probabilidade de obtermos exatamente 2 caras. (Adote $e = 2.7$.) [Valor=1,5]

Solução:

a) P(C=2) = (4
2) $(1/3)^2(2/3)^2 = 6(2/9)^2 = 24/81$.
$b) P(C = 2) = \sum_N P(C = 2|N)P(N) = \sum_{N=2}^{i} nfinito(n$
$2)(1/3)^2(2/3)^(N-2)3^N e^{-3}/n!$
$= (31/3)^2 e^(-31/3)/2! \sum_{N=2}^{i} nfinito(3(2/3))^(N-2)e^(-3(2/3))/(N-2))!$
$= e^{-1}/2 = 1/(2e) = 0.1851851$
Note que $\sum_{N=2}^{i} nfinito(3(2/3))^(N-2)e^(-3(2/3))/(N-2))! = 1$ *pois a soma de uma distribuio Poisson.*

Questão B) O tempo de vida de uma lâmpada tem distribuição normal com esperança μ desconhecida, e um desvio padrão σ de 200 horas. O valor real de um lote de 1000 lâmpadas é de $1000 \times (1/5000) \times \mu$ reais; ou seja, o valor real é $\mu/5$ reais. Um possível comprador retira uma amostra de n lâmpadas e compra o lote por $1000 \times (1/5000) \times \overline{x}$ reais, onde $\overline{x}$ é a média aritmética das vidas das lâmpadas da amostra. Ou seja, o comprador paga $\overline{x}/5$ reais pelo lote. Qual o menor tamanho da amostra para que haja uma probabilidade de pelo menos 0,95 do comprador não pagar 20 reais nem a mais nem a menos do valor real? [Valor=2,5]

Solução:

Média M é igual a (x1+x2+...+xn)/n, portanto tem esperança μ *e variancia* $(n200^2)/n^2 = 200^2/n$.
Queremos n tal que a probabilidade de $\mu/5 - 20 <= M/5 <= \mu/5 + 20$ *seja* $>= 0{,}95$.
Ou seja, $P(\mu - 100 <= M <= \mu + 100) = 0{,}95$;
passando para normal padrao, $P((\mu-100-\mu)/(200/sqrt(n)) <= (M-\mu)/(200/sqrt(n)) <= (\mu+100-\mu)/(200/sqrt(n))) >$ 0,95;
ou seja, $P(-1/(2sqrt(n)) <= Z <= 1/(2sqrt(2))) >= 0{,}95$;
usando a tabela da normal temos $1/(2sqrt(n)) >= 1{,}96$ *e portanto* $n >= (3{,}92)^2$; *ou seja,* $n >= 16$.