RESOLUÇÃO NA PÁGINA 6

Probabilidade 0303200
Terceira lista de exercícios

1. As variáveis aleatórias X e Y possuem função massa de probabilidade conjunta dada por
$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} cxy, & x = 1,2,4 \text{ e } y = 1,3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   (a) Qual o valor da constante c?
   (b) Calcule $\Pr[Y < X]$.
   (c) Calcule $\Pr[Y > X]$.
   (d) Calcule $\Pr[Y = X]$.
   (e) Calcule $\Pr[Y = 3]$.

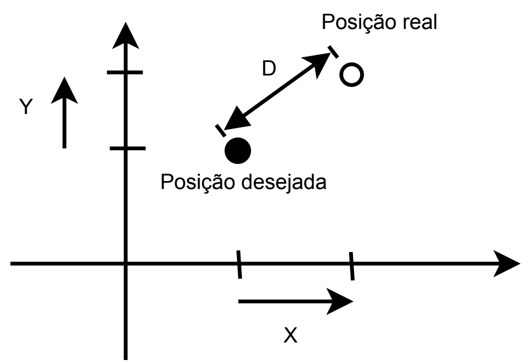
2. As variáveis aleatórias X e Y têm função de densidade de probabilidade conjunta
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   (a) Encontre a constante c.
   (b) Calcule $\Pr[X \geq Y]$ e $\Pr[Y \leq X^2]$.
   (c) Calcule $\Pr[\min(X,Y) \geq 1/2]$.
   (d) Calcule $\Pr[\max(X,Y) \leq 3/4]$.

3. Considere as VAs X e Y com distribuição conjunta
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
   (a) Calcule a probabilidade de $X < Y^2$.
   (b) Calcule as distribuições marginais de X e Y.
   (c) X e Y são independentes? Justifique.
   (d) Suponha que você saiba que ocorreu o evento $A = \{Y > X\}$. Qual é a função densidade de probabilidade condicional de (X,Y) dado A?

(e) Calcule as distribuições marginais $f_{X|A}(x|A)$ e $f_{Y|A}(y|A)$.

(f) *Dado que ocorreu* A, você pode dizer que X e Y são independentes? Justifique.

4. Uma máquina fresadora para confecção de placas de circuito impresso pode posicionar a broca para criar os furos com pequenos erros aleatórios nas direções horizontal e vertical (ver figura). Vamos denotar os erros como variáveis aleatórias: X (erro na direção horizontal) e Y (erro na direção vertical).



A fresa é construída de maneira que a função densidade de probabilidade conjunta dos erros X e Y é constante para erros a uma distância menor que 10μm, ou seja,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10\mu\text{m} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nestas condições,

(a) Ache o valor de c. **Dica:** Faça figuras para entender melhor o que está sendo calculado em cada caso.

(b) Calcule a probabilidade da distância D entre o furo realizado e sua posição ideal ser menor do que 5μm.

(c) Determine a função densidade de probabilidade $f_D(d)$ de $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

(d) Determine a função densidade de probabilidade marginal $f_X(x)$. X e Y são independentes?

(e) Calcule $\text{E}[X]$.

5. As VAs X e Y podem ser descritas pela pdf conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Qual o valor de $\text{E}[X]$ e $\text{var}[X]$?

(b) Qual o valor de $\text{E}[Y]$ e $\text{var}[Y]$?

(c) Qual o valor de C_{XY}?

6. Considere duas VAs independentes X e Y e suas respectivas pdfs

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\, e^{-x/3}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, e^{-y/2}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Qual o valor de $\Pr[X > Y]$?

   (b) Qual o valor de $R_{XY} = \mathrm{E}[XY]$?

   (c) Qual o valor da covariância C_{XY}?

7. A VA $X \sim$ Uniforme(0,12) representa o tempo total (tempo de espera + tempo de leitura), em milissegundos, necessário para adquirir um bloco de informação do disco rígido de um computador. A fim de realizar uma determinada tarefa, um computador deve acessar 12 blocos de informação diferentes no disco, sendo que o tempo de acesso para cada bloco é independente dos tempos de acesso dos outros blocos. O tempo total necessário para o processador obter toda a informação é uma VA A, em milissegundos.

   (a) Qual o valor esperado do tempo de acesso de cada bloco $\mathrm{E}[X]$?

   (b) Qual a variância do tempo de acesso de cada bloco $\mathrm{var}[X]$?

   (c) Qual o valor esperado do tempo total de acesso $\mathrm{E}[A]$?

   (d) Qual a variância do tempo total de acesso $\mathrm{var}[A]$?

   (e) Usando o Teorema do Limite Central, estime a probabilidade de que o tempo total de acesso exceda 75 ms, ou seja, $\Pr[A > 75 \text{ ms}]$.

   (f) Usando o Teorema do Limite Central, estime a probabilidade de que o tempo total de acesso seja menor do que 48 ms, ou seja, $\Pr[A < 48 \text{ ms}]$.

8. Um modem transmite um milhão de bits. Cada bit é independente dos demais e é igual a 0 ou 1 com a mesma probabilidade. Estime a probabilidade de ocorrerem entre 499000 e 501000 bits iguais a 1 nessa transmissão.

9. Uma moeda honesta é lançada 1000 vezes.

   (a) Calcule a probabilidade exata de obter um número de caras entre 400 e 600 vezes.

   (b) Calcule a mesma probabilidade do item anterior usando o Teorema do Limite Central.

Probabilidade 0303200
Respostas da terceira lista de exercícios

1. (a) $c = 1/28$
   (b) $\Pr[Y < X] = 18/28$
   (c) $\Pr[Y > X] = 9/28$
   (d) $\Pr[X = Y] = 1/28$
   (e) $\Pr[Y = 3] = 21/28$
2. (a) $c = 6$
   (b) $\Pr[X \geq Y] = 2/5$ e $P[Y \leq X^2] = \dfrac{1}{4}$
   (c) $\Pr[\min(X,Y) \geq 1/2] = \dfrac{21}{32}$
   (d) $\Pr[\max(X,Y) \leq 3/4] = \dfrac{3^5}{4^5}$
3. (a) $\Pr[X < Y^2] = \dfrac{1}{3}$
   (b)
   $$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   $$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   (c) Sim.
   (d)
   $$f_{XY|A}(x,y|A) = \begin{cases} 2, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \text{ e } y > x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   (e)
   $$f_{X|A}(x|A) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
   $$f_{Y|A}(y|A) = \begin{cases} 2y, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(f) Não.

4. (a) $c = \dfrac{1}{100\pi}$

   (b) $\Pr[D < 5\mu\text{m}] = \dfrac{1}{4}$

   (c) $f_D(d) = \begin{cases} \dfrac{d}{50}, & d \leq 10\mu\text{m} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

   (d) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{100 - x^2}}{50\pi}, & x \in [-10{,}10] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

   X e Y não são independentes.

   (e) $\text{E}[X] = 0$

5. (a) $\text{E}[X] = 2/3$ e $\text{var}[X] = 1/18$

   (b) $\text{E}[Y] = 2/3$ e $\text{var}[Y] = 1/18$

   (c) $C_{XY} = 0$

6. (a) $\Pr[X > Y] = 3/5$

   (b) $\text{E}[XY] = 6$

   (c) $C_{XY} = 0$

7. (a) $\text{E}[X] = 6$ ms

   (b) $\text{var}[X] = 12\ \mu s^2$

   (c) $\text{E}[A] = 72$ ms

   (d) $\text{var}[A] = 144\ \mu s^2$

   (e) $\Pr[A > 75] = 0.4013$

   (f) $\Pr[A < 48] = 0.0227$

8. $\Pr[499000 \leq W \leq 501000] = 0.9544$

9. (a) $\Pr[400 \leq C \leq 600] = \displaystyle\sum_{i=0}^{200} \frac{1000!}{(600-i)!(400+i)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \approx 1$, onde C é a VA que representa o número total de caras.

   (b) $\Pr[400 \leq C \leq 600] = \Phi\left(\dfrac{600-500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\dfrac{400-500}{\sqrt{250}}\right) \approx 1$

Lista 3B

1 → a) $c + 3c + 2c + 6c + 4c + 12c = 1$

$c = 1/28$

b) $(x,y) \Rightarrow P(y < x) = P(2,1), P(4,1), P(4,3)$

$= \frac{1}{28}(2 + 4 + 12) = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

c) $P(y > x) = P(1,3) + P(2,3)$

$= \frac{1}{28}(3+6) = \frac{9}{28}$

d) $P(x = y) = P(1,1) = 1/28$

e) $P(y=3) = P(1,3) + P(2,3) + P(4,3)$

$\frac{1}{28}(3 + 6 + 12) = \frac{21}{28}$

2 → a) $\int_0^1\int_0^1 cxy^2\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{cx^2y^2}{2}\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{cy^2}{2}\,dy = \frac{cy^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow \underline{c = 6}$

b) $\int_0^1\int_y^1 6xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 3x^2y^2\Big|_y^1 dy = \int_0^1 3y^2 - 3y^4\,dy = y^3 - \frac{3}{5}y^5\Big|_0^1 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$\int_0^1\int_0^{x^2} 6xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 2xy^3\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 2x^7\,dx = \frac{x^8}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$

c) $\int_{1/2}^1\int_{1/2}^1 6xy^2\,dy\,dx = \int_{1/2}^1 2xy^3\Big|_{1/2}^1 dx = \int_{1/2}^1 2x\left(1 - \frac{1}{8}\right)dx = \int_{1/2}^1 \frac{14}{8}x = \frac{7}{8}x^2\Big|_{1/2}^1 = \frac{7}{8}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{21}{32}$

d) $\int_0^{3/4}\int_0^{3/4} 6xy^2\,dx\,dy = \int_0^{3/4} 3x^2y^2\Big|_0^{3/4} = \int_0^{3/4}\frac{27}{16}y^2\,dy = \frac{9}{16}y^3\Big|_0^{3/4} = \frac{9}{16}\cdot\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

3 → a) $\int_0^1\int_0^{y^2} 1\,dx\,dy = \int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}$

b) $f_x = f_y = 1$, se $x, y \in [0,1]$

c) Sim, pois $1 \cdot 1 = 1$.

d) $\int_0^1\int_x^1 1\,dy\,dx = \int_0^1 1 - x\,dx = x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

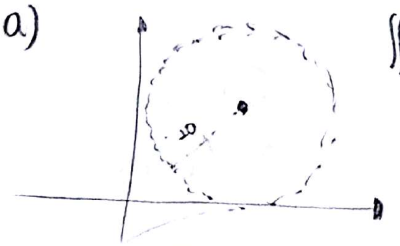
$f_{xy|A} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

e) $\int_x^1 2\,dy \Rightarrow \underline{f_{x|A} = 2(1-x)}$

$\int_0^y 2\,dx = 2y \Rightarrow f_{y|A} = 2y$

f) Não, pois $f_{x|A} \cdot f_{y|A} \neq f_{xy|A}$

4 → a)



$\iint c = 1$

$r^2\pi c = 1$

$c = \frac{1}{100\pi}$

b) $\frac{\pi 25}{100\pi} = 1/4$

c) $P(D) = \frac{2\pi d}{100\pi} = P(d) = \frac{d}{50}, \; 0 \leq d \leq 10\mu m$

d) $f_x = \int_0^{\sqrt{100 - x^2}} c\,dy = \frac{\sqrt{100 - x^2}}{100\pi} \Rightarrow$ não $(f_x \cdot f_y \neq f_{xy})$

e) $E(x) = \int_{-10}^{10} \frac{x\sqrt{100 - x^2}}{100\pi} \underset{du = -2x dx}{\overset{u = 100 - x^2}{=}} \int_0^0 \dots = 0.$

5 → a) $f_x = \int_0^1 4xy\,dy = 2xy^2\Big|_0^1 = 2x$ $E(x) = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$V(x) = \int_0^1 2x\,(x-\frac{2}{3})^2 dx = \int_0^1 2x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8x}{9}\,dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{8}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9}$

$= \frac{9-16+8}{18} = \frac{1}{18}$

b) $f_y = \int_0^1 4xy\,dx = 2x^2y\Big|_0^1 = 2y$ $E(y) = \int_0^1 2y^2\,dy = \frac{2}{3}$

$V(x) = \int_0^1 2y\,(y-\frac{2}{3})^2 dy = 1/18$

c) $f_x \cdot f_y = f_{xy}$, logo é independente ⇒ Cov = 0

6 → a) $f_{xy} = \frac{1}{6} e^{-(\frac{x}{3}+\frac{y}{2})}$

$\int_0^\infty \int_y^\infty \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{3}} e^{-\frac{y}{2}}\,dx\,dy = \int_0^\infty -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{3}}\Big|_y^\infty = \int_0^\infty -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}(0 - e^{-\frac{y}{3}}) = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{5y}{6}}\,dy = -\frac{6}{10} e^{-\frac{5y}{6}}\Big|_0^\infty$

$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

b) Como são independentes:

$E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$

$E(XY) = 2\cdot 3 = 6.$

$E(X) = \int_0^\infty \frac{1}{3} x e^{-x/3} = -xe^{-\frac{x}{3}} - 3e^{-\frac{x}{3}}\Big|_0^\infty = [0+3]$

$E(Y) = \int_0^\infty \frac{1}{2} y e^{-y/2} = -ye^{-\frac{y}{2}} - 2e^{-\frac{y}{2}}\Big|_0^\infty = [0+2]$

c) 0 (indep.)

7 → a) $\frac{12-0}{2} = 6\,ms$ b) $\frac{(12-0)^2}{12} = 12\,\mu s^2$ c) $6\cdot 12 = 72\,ms$ d) $12\cdot 12 = 144\,\mu s^2$

e) $P[A>75ms] = \frac{S_n - 72}{12} \Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$P[A>75ms] = 0{,}5 - 0{,}09871 = 0{,}4013$

f) $\frac{S_n - 72}{12} = -2$ (S_n ↙ 48) $P[A<48\,ms] = 0{,}5 - 0{,}47725 = 0{,}02275$

8 → $\mu = 0{,}5 \cdot 1000000 = 500000$

$\sigma = \sqrt{n\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5} = 0{,}5\cdot\sqrt{10^6}$

$= 0{,}5\cdot 10^3 =$

$P[499000 \leq x \leq 501000] = 2\cdot 0{,}47725$

$Z_c = \frac{1000}{500} = 2$

$= 0{,}9545$

9 → $P_c = 0{,}5$ $\mu_{CA} = 500$ $P[400 \leq x \leq 600]$

$\sigma = \sqrt{0{,}5\cdot 0{,}5}\cdot\sqrt{n} = 0{,}5\sqrt{1000} = 15{,}81$ b) $Z_c = \frac{100}{15{,}81} = 6{,}$ → ≈ 1

a) $= \sum_{i=0}^{200} \frac{1000!}{(600-i)!(400+i)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \approx 1$