Probabilidade – Resolução – P1 – 2016

Por César Morad

Formulário

$$Arranjo = A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad Combinação = C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$Probabilidade\ condicional:\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$Fórmula\ das\ probabilidades\ totais:\ P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B) \quad (B_1, B_2, B_3, .. = S)(partição\ de\ S)$$

$$Fórmula\ de\ Bayes:\ P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad ou\ P(A_i|B) = \frac{P(B|Ai)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}$$

$$f(x) = função\ densidade\ de\ probabilidade \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

$$F(x) = função\ distribuição\ de\ probabilidade \rightarrow F(x) = P[X \leq x]$$

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \rightarrow F'(x) = f(x) \rightarrow P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

P1 2016 – Turma 08

Teste [Radiacao] Sabe-se que a probabilidade de a intensidade de radiação solar atingir um certo nível máximo é 1/4 para dias chuvosos e 7/8 para dias não chuvosos. Sabe-se também que para uma certa localidade a probabilidade de dia chuvoso é 9/25. Qual a probabilidade de ocorrer esse valor máximo de radiação solar?

[A] 0,09. ■ 0,65. [C] 0,56. [D] 0,78. [E] 0,25.

Eventos:

$$C \rightarrow dia\ chuvoso, \bar{C} \rightarrow dia\ não\ chuvoso, R \rightarrow radiação\ solar\ máxima$$

Probabilidades:

$$P(C) = \frac{9}{25}, P(\bar{C}) = \frac{16}{25}, P(R|C) = \frac{1}{4}, P(R|\bar{C}) = \frac{7}{8}, P(R) = ?$$

Resolução:

$$P(R) = P(R|C)P(C) + P(R|\bar{C})P(\bar{C}) \rightarrow P(R) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{25} + \frac{7}{8} \cdot \frac{16}{25} = \frac{65}{100} = 0{,}65$$

Teste [Condicional] Dada a função densidade de probabilidade $f_X(x) = 0{,}25$ para $0 < x < a$, qual é a probabilidade de $x > a/2$ dado que $x > a/4$?

[A] 1/4. [B] 1/6. [C] 2/7. [D] 1/3. ■ 2/3.

Eventos:

$$A \rightarrow x > \frac{a}{2}, B \rightarrow x > \frac{a}{4}$$

Probabilidades:

$$P(B) = \int_{\frac{a}{4}}^{a} 0{,}25\, dx = 0{,}25x\Big|_{\frac{a}{4}}^{a} = \frac{3a}{16}, P(A) = \int_{\frac{a}{2}}^{a} 0{,}25x dx = \frac{a}{8}, P(A|B) = ?$$

Resolução:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{a}{8}}{\frac{3a}{16}} = \frac{2}{3}$$

Teste [Tres dados] Jogando-se três dados simultaneamente sabe-se que não resultam pontos coincidentes em nenhum deles. Qual a probabilidade de que a soma dos pontos seja igual a sete?

A 3/21. ■ 1/20. C 5/18. D 7/18. E 2/20.

Eventos:

$$S \rightarrow soma\ dos\ pontos\ igual\ a\ sete, \Omega \rightarrow espaço\ amostral$$

Resolução:

Nenhum dos dados possui pontos coincidentes, portanto temos seis opções para o primeiro, cinco para o segundo e quatro para o terceiro dado.

$$n(\Omega) = nº\ de\ eventos\ de\ \Omega = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

A única forma possível de obtermos sete com números de um a seis não repetidos é com 1, 2 e 4. Portanto, o número de eventos de S será a permutação desses três números:

$$n(S) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

A probabilidade então será:

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(\Omega)} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

Teste [Hidreletrica] Uma usina hidrelétrica possui duas unidades geradoras G1 e G2. Devido a problemas de manutenção e eventuais defeitos de funcionamento das turbinas, as probabilidades que em uma dada semana, as unidades 1 e 2 estejam paradas (eventos que chamamos de E_1 e E_2) são respectivamente 0,1 e 0,2. Em uma semana de verão existe uma probabilidade de 10% que o tempo esteja extremamente quente, com temperatura média acima de 35 °C; chamemos esse evento de H, de forma que a demanda de potência para ar condicionado aumenta consideravelmente. O desempenho da hidrelétrica pode ser classificado de acordo com a sua capacidade de suprir a demanda de potência em uma semana qualquer da seguinte maneira:
Satisfatória (S) – se ambas as unidades estão funcionando e temperatura média abaixo de 35 °C;
Crítica (C) – se uma das unidades está parada e temperatura média está acima de 35 °C;
Marginal (M) – em todos os outros casos.
Fazendo a hipótese de independência estatística de H e, E_1 e E_2, a probabilidade $P(M)$ é aproximadamente

A 0,03. B 0,25. ■ 0,32. D 0,65. E 0,80.

Eventos:

$$E_1 \rightarrow unidade\ 1\ parada, E_2 \rightarrow unidade\ 2\ parada, H \rightarrow calor\ extremo, \Omega \rightarrow espaço\ amostral$$

$$S = (E_1 \cap E_2 \cap H)^c, C = (E_1 \cup E_2) \cap H, M = \Omega - S - C = (S \cup C)^c$$

Probabilidades:

$$P(E_1) = 0{,}1, P(E_2) = 0{,}2, P(H) = 0{,}1$$
$$P(\overline{E_1}) = 0{,}9, P(\overline{E_2}) = 0{,}8, P(\overline{H}) = 0{,}9$$

Resolução:

$$P(S) = P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(\overline{H}) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}648$$
$$P(C) = \big(P(E_1) + P(E_2)\big) \cdot P(H) = (0{,}1 + 0{,}2) \cdot 0{,}1 = 0{,}03$$
$$P(M) = 1 - P(S) - P(C) = 1 - 0{,}648 - 0{,}03 = 0{,}322 \approx 0{,}32$$

Teste [Temperatura] O gerente de um clube calculou que a probabilidade de receber 1000 visitantes ou mais em qualquer domingo de julho depende da temperatura máxima desse dia e varia de acordo com a seguinte tabela:

Temperatura (°C)	Probabilidade de 1000 ou mais visitantes	Probabilidade de temperatura
< 20	0,25	0,20
20 – 25	0,50	0,25
25 – 30	0,75	0,30
> 35	0,75	0,25

Num certo domingo o clube recebe mais de 1000 visitantes. Qual a probabilidade aproximada de que a temperatura ficou entre 25-30 °C?

A 47/80. B 3/4. C 3/10. ■ 18/47. E 1/5.

Eventos:

$$F(frio) \to T < 20, A(ameno) \to 20 \leq T < 25, Q(quente) \to 25 \leq T \leq 30, I(inferno) \to T > 35$$
$$M \to 1000 \; ou \; mais \; visitantes$$

Probabilidades:

$$P(F) = 0{,}20, P(A) = 0{,}25, P(Q) = 0{,}30, P(I) = 0{,}25$$
$$P(M|F) = 0{,}25, P(M|A) = 0{,}50, P(M|Q) = 0{,}75, P(M|I) = 0{,}75$$

Resolução:

Basta aplicarmos a fórmula de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|Ai)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}$$

$$P(Q|M) = \frac{P(M|Q)P(Q)}{P(M|F)P(F) + P(M|A)P(A) + P(M|Q)P(Q) + P(M|I)P(I)}$$
$$= \frac{0{,}75 \cdot 0{,}30}{0{,}25 \cdot 0{,}20 + 0{,}5 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}30 + 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \frac{0{,}225}{0{,}5875} = 0{,}383 = \frac{18}{47}$$

Teste [Gasolina] O IPEM fez uma amostra de combustível em postos de gasolina. Sabe-se que 5% dos postos tem combustível adulterado. O teste do IPEM detecta adulteração em 90% dos casos em que a gasolina está adulterada. Em 5% dos casos erra e indica adulteração quando a gasolina está boa. Uma amostra ao acaso é testada e indica adulteração. Qual a chance da gasolina estar realmente adulterada?

[A] 0,9000. [B] 0,0925. ■ 0,4865. [D] 0,0450. [E] 0,9800.

Eventos:

$$D \to detectado, A \to adulterada, \bar{A} \to não \; adulterada$$

Probabilidades:

$$P(A) = 0{,}05, P(\bar{A}) = 0{,}95, P(D|A) = 0{,}9, P(D|\bar{A}) = 0{,}05, P(A|D) = ?$$

Resolução:

Fórmula de Bayes, eu escolho você!

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}9 \cdot 0{,}05 + 0{,}05 \cdot 0{,}95} = \frac{0{,}045}{0{,}0925} = 0{,}4865$$

Teste [Duas moedas] Um experimento é definido pelo lançamento de uma moeda duas vezes consecutivas. O experimento foi repetido um número suficientemente grande de vezes e descobriu-se que o resultado "2 caras" tem probabilidade 21% maior do que o evento "2 coroas". A probabilidade de obter "coroa" em um lançamento simples da moeda é:

[A] 3/5. [B] 11/21. [C] 5/21. [D] 79/100. ■ 10/21.

Eventos:

$$C \to cara, \bar{C} \to coroa$$

Probabilidades:

$$P(C)P(C) = P(\bar{C})P(\bar{C}) \cdot 1{,}21$$
$$P(C) + P(\bar{C}) = 1$$

Resolução:

$$P(C)^2 = 1{,}21 \cdot P(\bar{C})^2 \to P(C) = 1{,}1 \cdot P(\bar{C})$$
$$P(C) + P(\bar{C}) = 1 \to 1{,}1 \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{C}) = 1 \to 2{,}1 \cdot P(\bar{C}) = 1 \to P(\bar{C}) = \frac{1}{2{,}1} = \frac{10}{21}$$

Teste [Contas de email] Um indivíduo possui 3 contas de e-mail (A, B e C) sendo que, de todas as mensagens que ele recebe, 60% vão para a conta A e 30% vão para a conta B. A fração de mensagens de spam é diferente em cada conta: 1% na conta A, 2% na conta B e 5% na conta C. A probabilidade de uma mensagem ao acaso não ser spam é igual a:

[A] 0,993. [B] 0,988. ■ 0,983. [D] 0,978. [E] 0,973.

Eventos:

$$A, B, C, S \rightarrow spam, \bar{S} \rightarrow não\ spam$$

Probabilidades:

$$P(A) = 0{,}6, P(B), = 0{,}3, P(C) = 0{,}1$$

$$P(S|A) = 0{,}01, P(S|B) = 0{,}02, P(S|C) = 0{,}05, P(\bar{S}) = ?$$

Resolução:

$$P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) = 0{,}01 \cdot 0{,}6 + 0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}017$$

$$P(\bar{S}) + P(S) = 1 \rightarrow P(\bar{S}) = 1 - P(S) \rightarrow P(\bar{S}) = 1 - 0{,}017 = 0{,}983$$

Teste [Senha do banco] Beatriz esqueceu sua senha do banco. Felizmente, ela sabe que a senha é uma de N possíveis que ela anotou em um papel. Ela faz diversas tentativas de acessar sua conta, testando uma senha diferente a cada vez. Qual é a probabilidade de que ela consiga acertar a senha na k-ésima tentativa, para $k = 1,2,\ldots,N$?

A $\frac{k}{N}$. B $\frac{k}{N(N-1)}$. ■ $\frac{1}{N}$. D $\frac{k}{N+1}$. E $\frac{k(k-1)}{N(N-1)}$

Eventos:

$$A_k \rightarrow acerto\ na\ k\ ésima\ tentativa, \overline{A_n} \rightarrow não\ acerto\ na\ n\ ésima\ tentativa$$

Como temos um número finito de senhas, eventualmente Beatriz irá acertar. A probabilidade de ela acertar na primeira tentativa será $\frac{1}{N}$, na segunda será $\frac{1}{(N-1)}$, e assim por diante. A probabilidade dela NÃO acertar será $\frac{N-1}{N}$ na primeira tentativa, $\frac{N-2}{N-1}$ na segunda, e assim por diante. Para Beatriz acertar na k-ésima tentativa, ela deverá ter errado todas as anteriores, portanto:

$$P(A_k) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \cdots P(\overline{A_{k-1}})P(A_k) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N-k+1}{N-k+2} \cdot \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N}$$

Teste [Constante de densidade] Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidade dada por $P[X = x] = ax$ para $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$, sendo a uma constante. O valor de $P(X > 2)$ é:

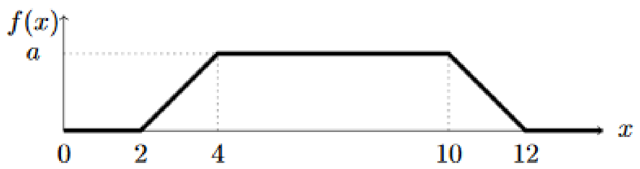
A $\frac{1}{5}$. B $\frac{2}{5}$. ■ $\frac{4}{5}$. D $\frac{3}{5}$. E $\frac{3}{4}$.

Resolução:

$$P[\Omega] = 1 = P[0] + P[1] + P[2] + P[3] + P[4] + P[5] = a(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 15a \rightarrow a = \frac{1}{15}$$

$$P[X > 2] = P[3] + P[4] + P[5] = a(3 + 4 + 5) = 12a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Teste [Componentes] Um sistema é constituído de três componentes idênticos. Sabe-se que se pelo menos dois componentes devem funcionar para que o sistema opere corretamente. Considere que cada componente opera de forma independente dos demais. Qual a probabilidade de o sistema operar por mais de 9 mil horas? O tempo de vida X de cada componente é expresso pela função densidade de probabilidade apresentada abaixo, onde x é expresso em mil horas.



A $a^2(1-a)$. B 1/16. ■ 5/32. D $a(1-a)^2$. E 3/4.

Eventos:

$$C \rightarrow componente\ funcionando, \bar{C} \rightarrow componente\ falhou, S \rightarrow sistema\ operando$$

Probabilidades:

A probabilidade de cada componente operar por mais de 9 mil horas é idêntica. Para o sistema funcionar precisamos que pelo menos dois componentes funcionem por mais de 9 mil horas. Seja $P(C)$ a probabilidade de um componente operar e $P(S)$ a probabilidade do sistema operar por um tempo maior que o estipulado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = Área\ em\ ]-\infty,+\infty[= \frac{(4-2)a}{2} + (10-4)a + \frac{(12-10)a}{2} = 8a \rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$P(C) = \int_{9}^{+\infty} f(x)dx = Área\ do\ gráfico\ no\ intervalo\ [9,+\infty[= (10-9)a + \frac{(12-10)a}{2} = 2a$$

$$P(\bar{C}) = \int_{-\infty}^{9} f(x)dx = \frac{(4-2)a}{2} + (9-4)a = 6a$$

Resolução:

Temos duas possibilidades: todos os componentes funcionam ou dois dos componentes funcionam e um não. Como temos três componentes, temos três opções de componentes falhos no segundo caso:

$$P(S) = 3 \cdot P(C)P(C)P(\bar{C}) + P(C)P(C)P(C) = 3 \cdot 2a \cdot 2a \cdot 6a + (2a)^3 = a^3(72+8) = 80a^3 = \frac{5}{32}$$

Teste [Deposito] Em um depósito contendo centenas de frascos de produtos cosméticos sabe-se que $1/3$ dos produtos estão fora de especificação. São selecionados aleatoriamente 3 frascos para verificação do produto. Seja X o número de frascos dentre os selecionados que estão fora da especificação.
Considere as seguintes proposições:
1) A probabilidade de que um dos frascos esteja fora de especificação é maior que a probabilidade de que nenhum esteja fora da especificação.
2) $P(X > 1) < P[X = 1]$.
3) $P[X = 1] = 2P[X = 2]$.
4) $P[X = 0] = P[X = 3]$.
Quais as proposições estão corretas?

[A] Apenas 2. [B] Apenas 2 e 4. ■ Apenas 1, 2, 3. [D] Apenas 1,2, 4. [E] Apenas 1, 3, 4.

Eventos:

$$E \rightarrow frasco\ dentro\ da\ especificação, \bar{E} \rightarrow frasco\ fora\ da\ especificação$$

Probabilidades:

$$P(E) = \frac{2}{3}, P(\bar{E}) = \frac{1}{3}$$

Resolução:

Vamos analisar cada proposição:

1)$3 \cdot \mathrm{P}(\bar{E})\mathrm{P(E)P(E)} > (\mathrm{P(E)})^3 \rightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{27}\right) > \left(\frac{2}{3}\right)^3 \rightarrow \frac{12}{27} > \frac{8}{27} \rightarrow$ é $verdadeira$

2)$P(X > 1) = P(\bar{E})P(\bar{E})P(E) + P(\bar{E})P(\bar{E})P(\bar{E}) < P[X = 1] = P(\bar{E}) \rightarrow \frac{2}{27} + \frac{1}{27} < \frac{4}{27} \rightarrow \frac{3}{27} < \frac{4}{27}$

3)$P[X = 1] = P(\bar{E})P(E)P(E) = 2P[X = 2] = 2P(\bar{E})P(\bar{E})P(E) \rightarrow \frac{4}{27} = 2 \cdot \frac{2}{27} \rightarrow \frac{4}{27} = \frac{4}{27}$

4)$P[X = 0] = P(E)P(E)P(E) = P[X = 3] = P(\bar{E})P(\bar{E})P(\bar{E}) \rightarrow \frac{8}{27} \neq \frac{1}{27} \rightarrow falso$

Teste [Dois dados] Considere o experimento de lançamento de dois dados honestos. Seja X igual à diferença entre os dois valores obtidos nos lançamentos.
Considere as seguintes proposições:
1) $P[X = -x] = P[X = x]$.
2) $P[X = 3] = P[X = 4] + P[X = 5]$.
3) $P[X = x] = P[X = x - 1] + 1/36$ para x positivo.
4) $P(X > 1) = 1 - P(X < 1)$.
Quais as proposições estão corretas?

[A] Apenas 2. [B] Apenas 3 e 4. [C] Apenas 1, 2, 3. [D] Apenas 1,3, 4. ■ Apenas 1 e 2.

$$A \rightarrow valor\ do\ primeiro\ dado, B \rightarrow valor\ do\ segundo, X = A - B$$
$$E \rightarrow evento\ simples, E = (A, B)$$

Resolução:

1)O sinal do valor X depende apenas da ordem em que subtraímos A e B, portanto é verdadeira.

2)Para X=3, temos: (1,4),(2,5),(3,6). Para X=4: (1,5),(2,6). Para X=5: (1,6). O número de eventos que resultam em X=3 é igual à soma de eventos que resultam em X=4 e X=5, portanto é verdadeira.

3)Vejamos um contraexemplo. Para X=2, temos: (1,3),(2,4),(3,5),(4,6). $\rightarrow P[X=2]=\frac{4}{36}$. Para X=1, temos: (1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6).$\rightarrow P[X=1]=5/36$

$$P[X=2]=P[X=2-1]+\frac{1}{36}\rightarrow\frac{4}{36}\neq\frac{5}{36}+\frac{1}{36}$$

4)$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{10}{36}$

$$P(X<1)=P(X=0)+P(X=-1)+\cdots P(X=-5)=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{21}{36}$$

$$P(X>1)=1-P(X<1)\rightarrow\frac{10}{36}=1-\frac{21}{36}\rightarrow\frac{10}{36}\neq\frac{15}{36}$$

Teste [Tres moedas] No lançamento de três moedas, um jogador recebe R\$1,00 se o número de coroas é igual a 2, recebe R\$8,00 se o número de coroas é igual a 3 e não recebe nada caso contrário. A probabilidade do jogador receber menos de R\$7,00 quando lançou as três moedas uma única vez vale:

[A] 1/2. ■ 7/8. [C] 2/3. [D] 1/8. [E] 1/5.

Eventos:

$$C\rightarrow cara, \bar{C}\rightarrow coroa$$
$$\bar{C}\bar{C}\rightarrow R\$1{,}00, \bar{C}\bar{C}\bar{C}\rightarrow R\$8{,}00$$

Probabilidades:

$$P(C)=P(\bar{C})=\frac{1}{2}$$

Resolução:

A única maneira de o jogador receber mais que R\$7,00 é se ele conseguir 3 coroas, portanto:

$$P(D<7)=1-P(\bar{C}\bar{C}\bar{C})=1-\left(P(\bar{C})\right)^3=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Teste [Constante de acumulada] Uma variável aleatória X tem função distribuição de probabilidade dada por

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-ax}, & x\geq 0\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$

sendo $a>0$ uma constante real. A probabilidade $P\left(X\geq\frac{1}{2a}\right)$ vale:

[A] e^{-a}. ■ $e^{-1/2}$. [C] $e^{-a/2}$. [D] $e^{1/2}$. [E] $e^{a/2}$.

Resolução:

Da definição de função distribuição de probabilidade: $P[a<X\leq b]=F(b)-F(a)$

$$P\left(X\geq\frac{1}{2a}\right)=F(+\infty)-F\left(\frac{1}{2a}\right)=1-\left(1-e^{-a\left(\frac{1}{2a}\right)}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

Referências

1. DANTAS, Carlos A. B.. *Probabilidade*: Um Curso Introdutório. 3ed. São Paulo: edusp, 2013.
2. Meu cérebro.