caption

excellentia P3 PROB

USP PROBABILIDADE

PROF. ARTHUR SALLES 20.JUN.2016

NOME: ______________________

DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS DE PROBABILIDADE

Função densidade de probabilidade

A. Caso discreto

Sejam X e Y duas vas discretas definidas no espaço amostral S de um experimento. A função de massa de probabilidade conjunta $p(x, y)$ é definida para cada par de números (x, y) por

$$p(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

Seja A qualquer conjunto formado por pares de valores (x, y). A probabilidade $P[(X, Y) \in A]$ é obtida pela soma da fmp conjunta com os pares de A:

$$P[(X, Y) \in A] = \sum_{x,y}\sum_{\in A} p(x, y)$$

B. Caso contínuo

Seja X e Y vas contínuas. Então, $f(x, y)$ é a função de densidade de probabilidade conjunta de X e Y se, para qualquer conjunto bidimensional, A

$$P[(X, Y) \in A] = \int\int_A f(x, y)\, dx\, dy$$

Em particular, se A for o retângulo bidimensional $\{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, então

$$P[(X, Y) \in A] = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

Funções de distribuição marginais

A. Caso discreto

As funções de massa de probabilidade marginais de X e de Y, representadas respectivamente por: $p_x(x)$ e $p_y(y)$, são dadas por

$$\boxed{p_X(x) = \sum_y p(x, y)}$$

$$\boxed{p_Y(y) = \sum_x p(x, y)}$$

B. Caso contínuo

As funções de densidade de probabilidade marginais de X e Y, representadas respectivamente por $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, são dados por

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx}$$

Independência

Duas variáveis aleatórias X e Y são idenpendentes se, para cada par de valores x e y,

$p(x, y) = p_x(x).p_y(y)$ quando X e Y são discretas ou

$f(x, y) = f_x(x).f_y(y)$ quando X e Y são contínuas

Caso contrário, X e Y são ditas dependentes.

Média de uma função

Sejam X e Y as vas de distribuição conjunta com fmp $p(x, y)$ ou fpd $f(x, y)$, conforme as variáveis sejam discretas ou contínuas. Então, o valor esperado de uma funçÃo $h(X, Y)$, representada por $E[h(X, Y)]$ ou $\mu_{h(X,Y)}$ é dado por

$$E[h(X, Y)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x \sum_y h(h, y).p(x, y) \\ \text{(caso discreto)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y).f(x, y)\, dx\, dy \\ \text{(caso contínuo)} \end{cases}$$

Covariância e Correlação

A. Covariância

A covariância entre duas vas X e Y é

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left[(x - \mu_x)(y - \mu_y)\right] \text{ ou}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)\,p(x,y) \\ \quad \text{(caso discreto)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y)\,f(x,y)\,dx\,dy \\ \quad \text{(caso contínuo)} \end{cases}$$

Ou, de forma mais simples

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_x.\mu_y$$

B. Correlação

O coeficiente de correlação de X e Y, representado por $Corr(X,Y)$, $\rho_{X,Y}$ ou simplesmente ρ é definido por

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X.\sigma_Y}$$

Propriedades

1. Se X e Y são independentes, então $\rho = 0$, porém $\rho = 0$ não implica independência.
2. $\rho = 1$ ou -1 se e somente se $Y = aX + b$ para quaisquer números a e b com $a \neq 0$.

DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS DE PROBABILIDADE

1. Devore

Um posto de gasolina tem ilhas de auto-serviço e de serviço completo. Em cada ilha, há uma única bomba de auto-serviço de gasolina comum com duas mangueiras. Sejam X = número de mangueiras em uso na ilha de auto-serviço em um momento específico e Y = número de mangueiras na ilha de serviço completo em uso naquele mesmo momento. A *fmp* de X e Y é mostrada na tabela a seguir.

p(x,y)		y = 0	y = 1	y = 2
x	0	0,10	0,04	0,02
	1	0,08	0,20	0,06
	2	0,06	0,14	0,30

a) Qual é $P(X = 1 \text{ e } Y = 1)$?

b) Calcule $P(X \leq 1 \text{ e } Y \leq 1)$.

c) Calcule a *fmp* marginal de X e de Y.

d) Usando $p_X(x)$, qual é $P(X \leq 1)$?

e) X e Y são vas independentes?

a) pela tabela:

$p(X=1 \text{ e } Y=1) = p(1,1) = 0,20$

b) $P(X \leq 1 \text{ e } Y \leq 1) = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(1,1)$

$P(X \leq 1 \text{ e } Y \leq 1) = 0,1 + 0,08 + 0,04 + 0,2$

$P(X \leq 1 \text{ e } Y \leq 1) = 0,42$

c) As função massa de probabilidade marginais indicam as probabilidades separadamente para X e para Y. Portanto, devemos para cada valor de uma, somar todas as possibilidades da outra:

		Y = 0	Y = 1	Y = 2	$p_X(x)$
X	0	0,10	0,04	0,02	0,16 ← $p_X(0)$, ou seja $x=0$ e Y qualquer
	1	0,08	0,20	0,06	0,34
	2	0,06	0,14	0,30	0,50
$p_Y(y)$		0,24	0,38	0,38	

$\uparrow p_Y(1) \Rightarrow y=1$ e X qualquer

d) $p_X(x)$ está na coluna da direita. Daí:

$P(X \leq 1) = p_X(0) + p_X(1)$

$P(X \leq 1) = 0,16 + 0,34 = 0,5$

e) Não, por exemplo para $x=0$ e $y=0$

$p_X(0) \times p_Y(0) \neq p_{XY}(0,0)$

Pois: $0,16 \times 0,24 \neq 0,10$

(2.)

As variáveis aleatórias X e Y possuem função massa de probabilidade conjunta dada por:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} cxy, & x=1,2,4 \text{ e } y=1,3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual o valor da constante c?
b) Calcule $P(Y < X)$
c) Calcule $P(Y > X)$
d) Calcule $P(Y = X)$
e) Calcule $P(Y = 3)$

a) Sabemos que as somas todas as probabilidades possíveis temos total igual a 1

$$\sum p(x_i, y_j) = 1$$

$$p(1,1) + p(1,3) + p(2,1) + p(2,3) + p(4,1) + p(4,3) = 1$$

$$c \cdot 1 \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot 3 + c \cdot 2 \cdot 1 + c \cdot 2 \cdot 3 + c \cdot 4 \cdot 1 + c \cdot 4 \cdot 3 = 1$$

$$28c = 1$$

$$\boxed{c = \frac{1}{28}}$$

b)

$$P(Y<X) = P(2,1) + P(4,1) + P(4,3)$$

$$P(Y<X) = \frac{2\cdot 1}{28} + \frac{4\cdot 1}{28} + \frac{4\cdot 3}{28} = \frac{18}{28}$$

c)

$$P(Y>X) = P(1,3) + P(2,3)$$

$$P(Y>X) = \frac{1\cdot 3}{28} + \frac{2\cdot 3}{28} = \frac{9}{28}$$

d) $P(Y=X) = P(1,1) = \frac{1}{28}$

e) $P(Y=3) = p(1,3) + p(2,3) + p(4,3)$

$$p(Y=3) = \frac{1\cdot 3}{28} + \frac{2\cdot 3}{28} + \frac{4\cdot 3}{28}$$

$$P(Y=3) = \frac{21}{28}$$

3. **Lista 4 2015**

As variáveis aleatórias X e Y possuem função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual o valor da constante c?
b) Calcule $P(X \ge Y)$
c) Calcule $P(Y \le X^2)$
d) Calcule $P(min(X,Y) \ge 1/2)$
e) Calcule $P(max(X,Y) \le 3/4)$

a) Temos que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx\,dy = 1$

Mas para todo valor fora do retângulo definido $(0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 1)$ $p(x,y)$ vale 0. Assim sobra que

$$\int_0^1 \int_0^1 cxy^2\,dx\,dy = 1$$

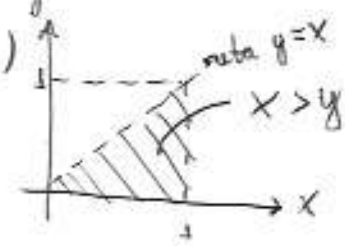
$$\int_0^1 \left(\frac{cx^2y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dy = 1$$

$$\int_0^1 \frac{cy^2}{2}\,dy = 1$$

$$\left(\frac{cy^3}{6}\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$\frac{c \cdot 1^3}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

b)



$$P(x>y) = \int_0^1 \int_0^x 6xy^2\,dy\,dx$$

ou

$$P(x>y) = \int_0^1 \int_y^1 6xy^2\,dx\,dy$$

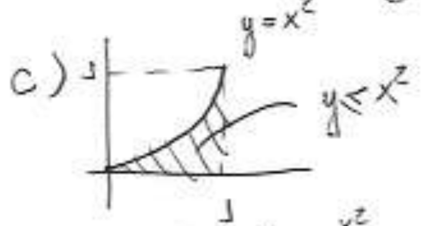
$$P(x>y) = \int_0^1 3x^2y^2\Big|_y^1 dy$$

$$P(x>y) = \int_0^1 3y^2 - 3y^4\,dy$$

$$P(x>y) = \left(y^3 - \frac{3}{5}y^5\right)\Big|_0^1$$

$$P(x>y) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

c)



$$P(y \le x^2) = \int_0^1 \int_0^{x^2} 6xy^2\,dy\,dx$$

$$P(y \le x^2) = \int_0^1 2xy^3\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 2x^7\,dx$$

$$P(y \le x^2) = \frac{x^8}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

d) $P(min(x,y) \ge \frac{1}{2}) = P\left(x \ge \frac{1}{2} \text{ e } y \ge \frac{1}{2}\right)$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 6xy^2\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2xy^3\Big|_{1/2}^1 dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 2x - \frac{x}{4}\,dx = \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right)\Big|_{1/2}^1 = \frac{21}{32}$$

e) $P(max(x,y) \le \frac{3}{4}) =$

$$= P\left(x \ge \frac{3}{4} \text{ e } y \ge \frac{3}{4}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{3}{4}} 6xy^2\,dy\,dx = \int_0^{3/4} 2xy^3\Big|_0^{3/4} dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{3^3}{2 \cdot 4^2} \cdot x\,dx = \frac{3^3}{32} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{3/4}$$

$$= \frac{3^5}{4^5}$$

4. **Lista 4 2015**

As variáveis aleatórias X e Y possuem função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Calcule a probabilidade de $X < Y^2$

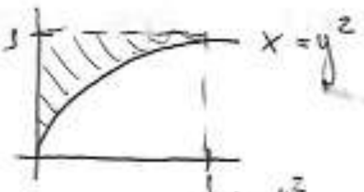
b) Calcule as distribuições marginais de X e Y.

c) X e Y são independentes? Justifique.

d) Suponha que você já saiba que o correu o evento $A = \{Y > X\}$. Qual é a função densidade de probabilidade condiciona de (X, Y) dado A. Calcule as distribuições marginais $f_{x|A}(x|A)$ e $f_{y|A}(y|A)$.

e) Dado que ocorreu A, você pode dizer que X e Y são independentes?

a)



$$P(X<y^2) = \int_0^1 \int_0^{y^2} 1 \cdot dx\,dy$$

$$P(X<y^2) = \int_0^1 x \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 dy$$

$$P(X<y^2) = \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

b)

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}\, dy = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin [0,1] \text{ pois } P_{XY} = 0 \ \forall y \\ ? & \end{cases}$$

Se $x \in [0,1]$: $P_X(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,dy} + \int_0^1 dy + \cancel{\int_1^{\infty} 0\,dy}$

$$P_X(x) = y \Big|_0^1 = 1$$

Assim $P_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Analogamente $P_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

c) Sim pois para todos valores de x e y:

$$P_{XY} = P_X \times P_Y$$

d)

$$f_{x|A} = P(X=x \mid X<Y) = \frac{P(X=x \cap X<Y)}{P(X<Y)} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

(1) $P(X=x \cap X<Y)$ é zero se $x \notin [0,1]$ pois X nunca valeria x

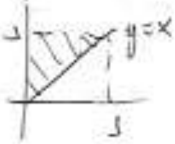
Para $x \in [0,1]$:

$$P(X=x \cap X<Y) = P(x<Y)$$

$$P(X=x \cap X<Y) = \int_x^1 p_Y(y)\,dy$$

$$P(X=x \cap X<Y) = \int_x^1 1\,dy = 1-x$$

(2) $P(X<Y) = \int_0^1 \int_0^y 1\,dx\,dy = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$



Assim, $f_{x|A} = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Para $f_{y|A}$ temos:

$$f_{y|A} = \frac{P(Y=y \cap X<Y)}{P(X<Y)} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

Já sabemos que $P(X<Y) = \frac{1}{2}$

O termo de cima será: (VERSO)

$P(Y=y \cap X<Y) = 0$, se $y \notin [0,1]$ pois Y não assume tais valores. Para $y \in [0,1]$:

$$P(Y=y \cap X<Y) = P(X<y) = \int_0^y p_X(x)\,dx = \int_0^y 1\,dx = y$$

Assim, $f_{Y|A} = \begin{cases} 0, & \text{se } y \notin [0,1] \\ 2y, & \text{se } y \in [0,1] \end{cases}$

e) Precisamos ver se: $f_{X|A} \times f_{Y|A} = F_{XY|A}$. Antes disso temos que encontrar $F_{XY|A}$ ou seja

$$f_{XY|A} = \frac{P(X=x \text{ e } Y=y \mid X<Y)}{P(X<Y)}$$

O termo $P(X=x \text{ e } Y=y \mid X<Y)$ só não é zero se $x<y$. Neste caso: $P(X=x \text{ e } Y=y \mid X<y) = P(X=x \text{ e } Y=y) = P(x,y)$
Caso contrário é zero. Logo

$$f_{XY|A} = \begin{cases} 2 \cdot p(x,y) = 2, & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \text{ e } x<y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $P_{XY|A} \neq P_{X|A} \times P_{Y|A}$, estas não são variáveis independentes

5. Lista 4 2015

As variáveis aleatórias X e Y podem ser descritas pela função:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x, y \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Calcule o valor de $E(X)$ e $Var(X)$.
b) Calcule o valor de $E(Y)$ e $Var(Y)$.
c) Calcule o valor de C_{XY}.

a) i) Calculo antes $F_X(x)$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 4xy\,dy = \int_0^1 2xy^2$

$F_X(x) = 2x$ se $x \in [0,1]$, 0 caso contrário

ii) Sei que $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$

$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}$

iii) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx$

$E(X^2) = \frac{1}{2}$

iv) $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

b) Como p_{XY} é simétrico em relação a X e Y, sei que será igual:

$F_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$E(Y) = \frac{2}{3}$

$Var(Y) = \frac{1}{18}$

c)

i) $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, F_{XY}\,dx\,dy$

$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy\, 4xy\,dx\,dy$

$E(XY) = \int_0^1 \frac{4}{3} x^3 y^2 \Big|_0^1 dy$

$E(XY) = \int_0^1 \frac{4}{3} y^2 dy = \left(\frac{4}{9} y^3\right)\Big|_0^1$

$E(XY) = 4/9$

ii) $Cov_{XY} = E(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y$

$Cov_{XY} = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$\boxed{Cov_{XY} = 0}$

6. **Lista 4 2015**

Considere duas variáveis aleatórias independentes X e Y e suas respectivas distribuições de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-x/3}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual o valor de $P(X > Y)$?

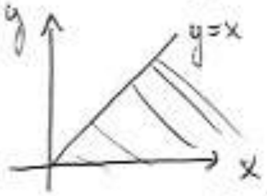
b) Qual o valor de $E(XY)$?

c) Qual o valor da covariância C_{XY}?

a) Se X e Y são independentes,

$$F_{XY} = f_X \cdot f_Y$$

$$F_{XY} = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{3}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}, & \text{se } x \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$P(X > Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{y}^{\infty} F_{XY}\,dx\,dy$$

$$P(X>Y) = \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{3}} e^{-\frac{y}{2}}\,dx\,dy$$

$$P(X>Y) = \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{3}} e^{-\frac{y}{2}} \Big|_y^{\infty} dy$$

$$P(x>y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{3}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}\,dy$$

$$P(x>y) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{\frac{-5y}{6}}\,dy$$

$$P(x>y) = \frac{1}{2}\left(-\frac{6}{5} e^{\frac{-5y}{6}}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$\boxed{P(x>y) = \frac{3}{5}}$$

b)

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_{XY}\, xy\, dx\,dy$$

$$E(XY) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xy \frac{e^{-\frac{x}{3}} e^{-\frac{y}{2}}}{6}\,dx\,dy$$

$$\left(\int x e^{-\frac{x}{3}} dx = -3x e^{-\frac{x}{3}} + 3\int e^{-\frac{x}{3}} dx = -3xe^{-\frac{x}{3}} - 9e^{-\frac{x}{3}}\right)$$

$u = x \rightarrow du = dx$

$e^{-\frac{x}{3}} dx = dv + v = -3e^{-\frac{x}{3}}$

$$E(XY) = \frac{1}{6}\int_0^{\infty} y e^{-\frac{y}{2}} \left(-3e^{-\frac{x}{3}}(x+3)\right)\Big|_0^{\infty} dy$$

$$E(XY) = \frac{1}{6}\int_0^{\infty} y e^{-\frac{y}{2}} \cdot 9\,dy =$$

$$\left(\int y e^{-\frac{y}{2}} dy = -2e^{-\frac{y}{2}}(y+2)\right)$$

$$E(XY) = \frac{9}{6}\left(-2e^{-\frac{y}{2}}(y+2)\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$\boxed{E(XY) = \frac{9}{6} \cdot 4 = 6}$$

c)

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}\,dx = \left(-3e^{-\frac{x}{3}}(x+3)\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}\,dy = \left(-2e^{-\frac{y}{2}}(y+2)\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$E(X) = 9 \qquad E(Y) = 4$$

$$C_{XY} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$C_{XY} = 36 - 9 \cdot 4$$

$$\boxed{C_{XY} = 0}$$

7. **Devore**

Admite-se que cada pneu dianteiro de um determinado tipo de veículo deve ter a pressão de 26 psi. Suponha que a pressão real em cada pneu seja uma variável aleatória X para o pneu direito e Y para o esquerdo, com fdp conjunta.

$$f(x,y) = \begin{cases} K(x^2+y^2) & 20 \le x \le 30,\ 20 \le y \le 30 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Qual é o valor de K?

b) Qual é a probabilidade de os dois pneus estarem com pressão inferior à ideal?

c) Qual é a probabilidade de a diferença de pressão de ar entre os dois pneus ser no máximo 2 psi?

d) Determine a distribuição (marginal) da pressão de ar só do pneu direito.

e) X e Y são vas independentes?

Resolvido no

Resumo

8. Devore

Ana e João combinaram encontrar-se para almoçar juntos entre meio-dia e 13 h. Represente por X a hora de chegada de Ana, por Y a de João, e suponha que X e Y sejam independentes com fdps

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Qual é o tempo esperado que a pessoa que chega primeiro deve aguardar pela outra? (Sugestão: $h(X, Y) = |X - Y|$)

Resolvido na página seguinte

Continuando para o 9, precisamos de: $E(X)$ e $E(Y)$

i) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx$

$E(X) = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$

ii) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy = \int_0^1 y \cdot 2y dy$

$E(Y) = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}$

iii) Precisamos também de $Var(X)$ e $Var(Y)$.

iv) $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx$

$E(X^2) = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}$

Logo $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$Var(X) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$

v) $E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot 2y dy = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}$

$Var(Y) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

9. Devore

a) Calcule a covariância de X e Y no Exercício 9.

b) Calcule ρ de X e Y no mesmo exercício.

a) $Cov_{XY} = E(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y$

i) $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \underbrace{f_{XY}}_{X \perp Y \text{ independents}} dx\, dy$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X \cdot f_Y dx dy$

$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 6x^3y^2 dx dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^4 y^2 \right)\Big|_0^1 dy$

$E(XY) = \int_0^1 \frac{3}{2} y^2 dy = \frac{y^3}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

ii) $Cov_{XY} = E(XY) - \mu_X \cdot \mu_Y$

$Cov_{XY} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0$

b) $\rho_{XY} = \frac{Cov_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0$

(não bate com gabarito)

11. P3 2015

Uma loja de automóveis de luxo tem a seguinte função de probabilidade do número de vendas por semana:

x	0	1	2	3
P(X=x)	0,25	0,25	0,25	0,25

Considere um conjunto de X pessoas em que todas compraram automóveis. Para cada uma dessas pessoas que comprou automóvel, considere ainda o evento "a pessoa comprou blindagem". Suponha que esses X eventos sejam independentes (dado que as X pessoas compraram automóveis). Suponha também que a probabilidade de uma pessoa comprar blindagem, dado que ela pertence ao grupo de pessoas que comprou automóvel, é 0.60.

a) Determine a distribuição conjunta de X e Y.

b) Determine $P(X > Y)$

c) Determine a função de probabilidade marginal de Y

a)

Y \ X	0	1	2	3		$F_Y(y)$
0	0,25	0,1	0,04	0,016	0	0,406
1	0	0,15	0,12	0,072	1	0,342
2	0	0	0,09	0,108	2	0,198
3	0	0	0	0,054	3	0,054

→ Se x = 0, y só pode ser 0 (se não vende carro, não vende blindagem)

→ Se x = 1 (uma pessoa comprou), tem probabilidade

$$\begin{cases} 0,25 \times 0,6 & \text{de vender 1 blindado} \\ 0,25 \times 0,4 & \text{de vender 0 blindado} \end{cases}$$

→ Se x = 2, podemos usar binomial para saber quantos blindados vende: Y = Binomial (2; 0,6)

$P(Y=0) = \binom{0}{2} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^2 = 0,16$

$P(Y=1) = \binom{1}{2}\, 0,6^1 \cdot 0,4^1 = 0,48$

$P(Y=2) = \binom{2}{2}\, 0,6^2 \cdot 0,4^0 = 0,36$

Depois multiplico por 0,25 que é a probabilidade de vender 2

→ Se x = 3, Y = Binomial (3; 0,6)

$P(Y=0) = \binom{0}{3} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^3 = 0,064$

$P(Y=1) = \binom{1}{3}\, 0,6^1 \cdot 0,4^2 = 0,288$

$P(Y=2) = \binom{2}{3} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^1 = 0,432$

$P(Y=3) = \binom{3}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^0 = 0,216$

Agora multiplico por 0,25

b) $P(X > Y) = 1 - P(X = Y)$

$P(X > Y) = 1 - P(0,0) - P(1,1) - P(2,2) - P(3,3)$

$P(X > Y) = 1 - 0,25 - 0,15 - 0,09 - 0,054$

$P(X > Y) = 0,456$

c) Somar na última coluna

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

12. **P3 2015**

Uma faculdade de administração verificou, com base em sua experiência ao longo dos anos, que 1/3 dos alunos ingressantes concluem o curso. Com base nessa hipótese aprova 450 alunos no vestibular, pois considera que o número ideal de alunos numa turma seja 150 alunos. Calcule a probabilidade de que mais de 160 dos 450 ingressantes conclua o curso.

A probabilidade de um aluno concluir é $\frac{1}{3}$, assim X = quantos se formam é uma binomial

$$X = \text{Binomial}\left(450 ; \frac{1}{3}\right)$$

Se quero $P(X > 160)$ teria que calcular

$$P(X > 160) = \sum_{i=161}^{450} \binom{i}{450} \cdot \frac{1}{3}^{i} \left(\frac{2}{3}\right)^{1-i}$$

O que não é legal. Podemos, entretanto aproximar por uma normal com média

$$\mu = n \cdot p = 450 \cdot \frac{1}{3} = 150$$

e variância

$$\sigma^2 = np(1-p) = 450 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 100$$

Ou seja $X \approx N(150 ; 10^2)$

Para calcular a probabilidade de ter mais de 160 aprovados fazemos:

$$P(X > 160) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{160-150}{10}\right)$$

$$P(X > 160) = P(Z > 1)$$

Que pela tabela da normal padrão é:

$$\boxed{P(X > 160) = 0,1587}$$

Ou se fizermos uma correção de continuidade, o ponto 160 vira a faixa

160

155,5 160,5

E devemos calcular

$$P(X > 160,5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{160,5-150}{10}\right)$$

$$P(X > 160,5) = P(Z > 1,05)$$

Que pela tabela da normal padrão vale:

$$P(X > 160,5) = 0,1469$$

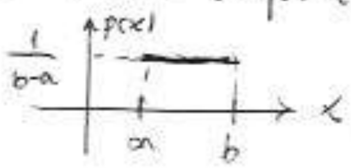
(13.) Lista 2015

A variável aleatória $X \approx$ Uniforme(0,12) representa o tempo total (tempo de espera + tempo de leitura), em milissegundos, necessário para adquirir um bloco de informação do disco rígido de um computador. A fim de realizar uma determinada tarefa, um computador deve acessar 12 blocos de informação diferentes no disco, sendo que o tempo de acesso para cada bloco é independente dos tempos de acesso dos outros blocos. O tempo total necessário para o processador obter toda a informação é uma v.a. A, em milissegundos.

a) Usando o Teorema do Limite Central, estime a probabilidade de que o tempo total de acesso exceda 75 ms.

b) Usando o Teorema do Limite Central, estime a probabilidade de que o tempo total de acesso seja menor do que 48 ms.

Para uma variável aleatória uniforme X = Uniforme (a,b)



$$E(X) = \frac{b-a}{2} = \frac{12-0}{2} = 6$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(12-0)^2}{12} = 12$$

Ao somar $X_1 + X_2 + \dots + X_{12} = Y$

Podemos (já que o exercício manda, apesar de $n = 12$ ser pequeno) aproximar Y pela normal com

média : $\mu = 12 \times 6 = 72$

variância : $\sigma^2 = 12 \times 12 = 144 = 12^2$

$$Y \approx N(72; 12^2)$$

a) $P(Y \geq 75) \xrightarrow{TCL} P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \geq \frac{75-72}{12}\right)$

$P(Y > 75) \approx P(Z > 0{,}25) = 0{,}4013$

Ou ajustando continuidade

$P(Y \geq 75) \approx P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \geq \frac{75{,}5-72}{12}\right)$

$P(Y \geq 75) \approx P(Z \geq 0{,}29)$

$P(Y \geq 75) \simeq 0{,}38591$

b) $P(Y \leq 48) \approx P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{48-72}{12}\right)$

$P(Y \leq 48) \approx P(Z \leq -2)$

$$\boxed{P(Y \leq 48) \approx 0{,}02275}$$

14. **Lista 2015**

Uma moeda honesta é lançada 1000 vezes.

a) Calcule a probabilidade exata de obter um número de caras entre 400 e 600 vezes.

b) Calcule a mesma probabilidade do item anterior usando o Teorema do Limite Central.

a) Sendo X = quantas vezes sai cara. X = Binomial (1000; 0,5)

Para o resultado exato devo calcular:

$$P(400 < X < 600) = \sum_{i=400}^{599} \binom{i}{1000} \cdot 0{,}5^{i} \cdot 0{,}5^{1000-i}$$

b) Se aproximarmos X por uma normal

$$X \approx N(np\,;\, np(1-p))$$

$$X \approx N(500\,;\, 250)$$

Temos que:

$$P(400 < x < 600) = P\left(\frac{400-500}{\sqrt{250}} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{600-500}{\sqrt{250}}\right)$$

$$P(400 < x < 600) = P(-6{,}32 < z < 6{,}32)$$

$$\boxed{P(400 < x < 600) \approx 1}$$

Ou, fazendo ajuste de continuidade

$$P(400{,}5 < x < 599{,}5) = P\left(\frac{400{,}5-500}{\sqrt{250}} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{599{,}5-500}{\sqrt{250}}\right)$$

$$P(400{,}5 < x < 599{,}5) = P(-6{,}29 < z < 6{,}29)$$

$$\boxed{P(400{,}5 < X < 599{,}5) \approx 1}$$

7

Exercício: Considere as distribuições marginais

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

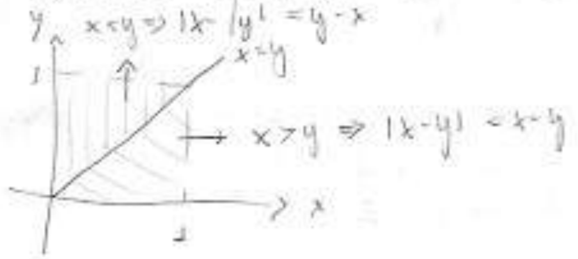
Calcule $E(|X-Y|)$

$$E(|X-Y|) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y| \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

Como X e Y são independentes : $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$E(|X-Y|) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y| \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 (|x-y|) \cdot 3x^2 \cdot 2y\, dx\, dy$$

Podemos quebrar a área de integração em $x > y$ e $x \leq y$



Ficamos com:

$$E(|X-Y|) = \underbrace{\int_0^1\int_0^y (y-x)\, 6x^2 y\, dx\, dy}_{x \leq y} + \underbrace{\int_0^1\int_y^1 (x-y)\, 6x^2 y\, dx\, dy}_{x>y}$$

$$E(|X-Y|) = \int_0^1 \left(2x^3y^2 - \frac{6}{4}x^4 y\right)\Big|_0^y dy + \int_0^1 \left(\frac{6}{4}x^4 y - 2x^3y^2\right)\Big|_y^1 dy$$

$$E(|X-Y|) = \int_0^1 2y^5 - \frac{3}{2}y^5\, dy + \int_0^1 \frac{3}{2}y - 2y^2 - \frac{3}{2}y^5 + 2y^5\, dy$$

$$E(|X-Y|) = \int_0^1 y^5 + \frac{3}{2}y - 2y^2\, dy = \left(\frac{y^6}{6} + \frac{3}{4}y^2 - \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^1$$

$$E(|X-Y|) = \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{E(|X-Y|) = 1/4}$$