PRO 2722

USP

PROBABILIDADE

AULA DE REVISÃO - ARTHUR SALLES

2.SET.2014

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

1. **Devore - 13 Seção 4.2**

Sabendo que uma variável aleatória X tem distribuição dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^4} & , x > 1 \\ 0 & , x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determine o valor de k para o qual $f(x)$ é uma fdp legítima

b) Obtenha a função de distribuição acumulada

c) Use a fdc de (b) para determinar a probabilidade de X estar entre 2 e 3.

d) Obtenha o valor médio e o desvio padrão da variável X.

2. **Devore - 19 Seção 4.2**

Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \dfrac{x}{4}\left[1+\ln\left(\dfrac{4}{x}\right)\right] & , 0 < x \leq 4 \\ 1 & , x > 4 \end{cases}$$

Calcule:

a) $P(X \leq 1)$

b) $P(1 \leq X \leq 3)$

c) A fdp de X

3. **Devore - 20 Seção 4.2 (Modificado)**

Considere a fdp do tempo total de espera Y para dois ônibus:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{25} & , 0 \leq y < 5 \\ \dfrac{2}{5} - \dfrac{y}{25} & , 5 \leq y \leq 10 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Calcule a função de densidade acumulada de Y

b) Determine o 50º percentil (mediana)

c) Determine o 25º percentil (1º quartil)

4. **Material de PRO2722**

a) Uma embalagem contém 7 facas e 4 garfos. O peso médio de cada garfo é de 100 g e seu desvio padrão 12 g. As facas têm peso médio 60 g e tem desvio de 11 g. A embalagem tem peso médio 15 g e desvio 1 g. Calcule o peso médio e o desvio padrão do pacote. Assuma que os pesos são independentes.

b) Você comprará 7 facas e 4 garfos (iguais) em uma mesma loja. O preço médio desse modelo de facas no mercado de utensílios para cozinha da cidade é R\$2,00 e dos garfos R\$50. Os desvios padrão são respectivamente 0,30 e 0,20. Assuma que os preços de facas e garfos são independentes. Calcule deve ser o preço médio e desvio do preço da sua compra.

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DISCRETAS

5. **Material de PRO2722**

Uma fábrica produz 10 vasos de vidro por dia. Há uma probabilidade constante $p = 0.1$ de produzir vasos defeituosos. Antes de serem enviados para o mercado, os vasos são inspecionados e os defeituosos são separados. A probabilidade de um vaso defeituoso ser mal classificado é $q = 0.2$. E um vaso bom ser mal classificado ocorre com $r = 0.3$. Determine:

a) A função de probabilidade da variável X, o número médio de vasos classificados como defeituosos ao final do dia.

b) O número médio de vasos classificados como defeituosos por dia.

6. **Devore - 62 Seção 3.4 (Modificado)**

Uma limusine de aeroporto pode acomodar até quatro passageiros em qualquer corrida. A empresa aceitará um máximo de seis reservas e os passageiros devem ter reservas. Pelos registros anteriores, 20% de todos os que fazem reserva não aparecem para a corrida. responda as seguintes perguntas:

a) Se forem feitas seis reservas, qual a probabilidade de ao menos um indivíduo com reserva não poder ser acomodado na corrida?

b) Se forem feitas seis reservas, qual é o número esperado de lugares disponíveis quando a limusine parte?

c) Suponha que a distribuição de probabilidades seja dada na tabeloa seguir.

Número de reservas	3	4	5	6
Probabilidade	0,1	0,2	0,3	0,4

Seja X o número de passageiros de uma corrida selecionada aleatoriamente. Calcule a função de distribuição de probabilidade de X

7. Devore - 78 Seção 3.6

Considere gravar algo em um disco rígido e enviá-lo para um certificador contar o número de pulsos ausentes. Suponha que esse número X tenha distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0,2$.

a) Qual a probabilidade de um disco ter exatamente um pulso ausente?

b) Qual a probabilidade de um disco ter dois pulsos ausentes?

c) Se cinco discos forem selecionados de forma independente, qual a probabilidade de apenas dois não conterem pulsos ausentes?

8. Devore - 80 Seção 3.6

O número de solicitações de assistência recebido por uma serviço de guincho é um processo de Poisson com taxa $\alpha = 4$ por hora.

a) Calcule a probabilidade de exatamente dez solicitações chegarem em um período de 2 horas.

b) Se os operadores do serviço de guincho tirarem 30 minutos para o almoço, qual a probabilidade de não perderem nenhum chamado de atendimento?

c) Quantas ligações você espera que ocorram durante o almoço?

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE CONTÍNUAS

9. Devore - 59 Seção 4.4 (Modificado)

Seja X o tempo entre duas chegadas sucessivas no guichê de atendimento rápido de um banco local. Se X possui uma distribuição exponencial com $\lambda = 2,5$, calcule os itens a seguir:

a) O tempo esperado entre duas chegadas sucessivas.

b) O desvio padrão do tempo entre duas chegadas.

c) $P(X \leq 4)$

d) $P(2 \leq X \leq 5)$

10. Básicos

Para z com distribuição normal padrão determine:

a) $P(z < 1.33)$

b) $P(z < -0,68)$

c) $P(z > 1,3)$

d) $P(z > -0,75)$

e) O primeiro quartil (25° percentil)

f) O 95° percentil

11. Material de PRO2722

Um tipo de peças produzidas em uma linha de montagem apresenta diâmetro de medida variável segundo uma distribuição normal de média 106mm e variância $16mm^2$. Sendo X o diâmetro da peça, determine:

a) A probabilidade de que uma peça selecionada ao acaso apresente diâmetro entre 102 e 120mm?

b) O valor de B tal que $P(106 - B < X < 106 + B) = 90\%$.

12. Material de PRO2722

No exercício anterior, considere que você selecione 7 dessas peças ao acaso e que os diâmetros sejam independentes.

a) Determine o número médio de peças desse lote que possuem diâmetro entre 102 e 120mm.

b) Qual a probabilidade de que haja pelos menos 5 peças com diâmetro entre 102 e 120mm?

13. Material de PRO2722

O dispositivo de abertura automática de um paraquedas de carga militar foi projetado para abrir quando estiver a 200m do solo. Suponha que a altitude de abertura tenha distribuição normal com média 200m e desvio padrão 30m. Há dano ao equipamento se o paraquedas abrir a menos de 100m.

a) Qual a probabilidade de haver dano ao equipamento?

b) Se cinco paraquedistas pularem de um avião, qual a probabilidade de haver dano em ao menos um dos paraquedas.

USP

PROBABILIDADE

AULA DE REVISÃO - ARTHUR SALLES

2.SET.2014

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Função distribuição de probabilidade

Se X é uma variável aleatória contínua, a probabilidade de X assumir um valor pontual é nula, insto é, $P(X = a) = 0$ Define-se probabilidade de valores num intervalo:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

f é a função de densidade de probabilidade (f.d.p.) e:

$$f(x) \ge 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Função distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada é definida como:

$$F(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

Além disso:

$$\frac{dF}{da}(a) = f(a)$$

Esperança e variância de uma v.a contínua

Esperança (média): $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

Variância: $Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$

Esperança de uma função de x:

$$E\left(g(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$

Propriedades

I) $E(aX + b) = aE(X) + b$

II) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

III) Se $X_1, \dots, X_n$ são v.a. independentes com $E(X_j) = \mu_j$ e $Var(X_j) = \sigma_j^2$; com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(X_j)$$

e

$$Var\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 Var(X_j)$$

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DISCRETAS

1. Uniforme

Se X só assume os valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ com a mesma probabilidade. Então:

$$P(X = x_j) = P(x_j) = \frac{1}{n} \qquad \forall j \in 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \left(E(X)\right)^2$$

2. Bernoulli

Se X só assume os valores 0 ou 1 com probabilidades, respectivamente, de p e $(1-p)$. Então:

$E(X) = p$ $\quad Var(X) = p(1-p)$

3. Binomial

- n ensaios de Bernoulli
- Ensaios independentes com mesma probabilidade de sucesso p

Se X é o número de sucessos nos n ensaios, dizemos que $X = B(n, p)$ e:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\boxed{E(X) = np}$$

$$\boxed{Var(X) = np(1-p)}$$

Propriedade: Se $X_1 = B(n_1, p), \ldots, X_m = B(n_m, p)$ são independentes:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = B\left(\sum_{j=i}^{m} n_i, p\right)$$

4. Poisson

Dada uma taxa de ocorrência de um fenômeno, X é o número de ocorrências do fenômeno em uma dado intervalo. Se X tem distribuição de Posson com parâmetro λ $\left(X = \text{Poisson}(\lambda)\right)$

$$\boxed{P(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

$$\boxed{Var(X) = \lambda}$$

Propriedade: Se $X_1 = \text{Poisson}(\lambda_1), \ldots, X_n = \text{Poisson}(\lambda_n)$ são independentes:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

1. Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , a \le x \le b \\ 1 & , x \ge b \end{cases}$$

2. Exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \ge 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \ge 0 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. Normal

A distribuição normal é simétrica em torno da média, com média μ e variância σ^2. **Notação**: $X = N(\mu, \sigma^2)$

Temos tabelados os valores de $P(0 \le x \le a)$ para a normal pradrão $N(0, 1)$. Para outros valores dos parâmetros fazemos:

$$\boxed{P(a \le x \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)}$$

E $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ segue uma normal padrão.

Teorema Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a. independentes e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Então $\sum_{i=1}^{n} X_i$ tem distribuição normal com parâmetros:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2$$

(1)

a) $\int_1^{\infty} \frac{K}{x^4}\, dx = 1$

$-\frac{K}{3x^3}\Big|_1^{\infty} = 1$

$\frac{K}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{K=3}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3} & , x > 1 \end{cases}$

$\underline{x>1}$ · $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_1^a f(x)dx = \int_1^a \frac{3}{x^4}dx$

$= -\frac{1}{x^3}\Big|_1^a = 1 - \frac{1}{a^3}$

c) $P(2 \leq x \leq 3) = P(x \leq 3) - P(x \leq 2)$

$= F(3) - F(2) = \left(1 - \frac{1}{27}\right) - \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 0{,}081$

d) $E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}\, dx = \left(-\frac{3}{2x^2}\right)\Big|_1^{\infty} = \underline{3/2}$

$Var(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \frac{3}{x^4}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^2} - \frac{9}{x^3} + \frac{27}{4x^4}\, dx$

$= \left(\frac{-3}{x} + \frac{9}{2x^2} - \frac{9}{4x^3}\right)\Big|_1^{\infty} = 3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = 0{,}75$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \underline{0{,}866}$

(2)

a) $P(x \leq 1) = F(1) = \frac{1}{4}\left[1 + \ln 4\right] = 0{,}597$

b) $P(1 \leq x \leq 3) = F(3) - F(1) \doteq \frac{3}{4}\left(1 + \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) - F(1) = 0{,}369$

c) $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

para $x \in [0,4]$:

$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{4}\left(1 + \ln\left(\frac{4}{x}\right)\right) + \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{4}\left(-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4}{x}\right) - \cancel{\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{4}\left(\ln 4 - \ln x\right) = 0{,}347 - 0{,}25\ln x$

$F(x) = \begin{cases} 0{,}347 - 0{,}25\ln x & 0 < x \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

(3)

a) $0 \le y \le 5$

$$F(y) = \int_0^y \frac{x}{25}\,dx = \left(\frac{x^2}{50}\right)_0^y = \frac{y^2}{50}$$

$5 \le y < 10$

$$F(y) = \int_0^y f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^5 \frac{x}{25}\,dx}_{\frac{5^2}{50}} + \int_5^y \frac{2}{5} - \frac{x}{25}\,dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50}\right)_5^y$$

$$F(y) = \frac{1}{2} + \frac{2y}{5} - \frac{y^2}{50} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{2y}{5} - \frac{y^2}{50} - 1$$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & , \ y < 0 \\ \frac{y^2}{50} & , \ 0 \le y \le 5 \\ -\frac{y^2}{50} + \frac{2y}{5} - 1 & , \ 5 \le y < 10 \\ 1 & , \ y \ge 10 \end{cases}$$

b) Para que valor η_{50}: $P(X \le \eta_{50}) = 1/2$

$$\boxed{\eta_{50} = 5}$$

c) $P(X \le \eta_{25}) = 0,25$

$$\frac{\eta_{25}^2}{50} = 0,25$$

$$\boxed{\eta_{25} = 3,536}$$

④

a)

$$T = F_1 + \dots + F_7 + G_1 + \dots + G_4 + E$$

T ↓ total

$F_1 + \dots + F_7$ ↓ peso de cada fatia (não são iguais F_i)

$G_1 + \dots + G_4$ ↑ ingredientes

E ↑ embalagem

$$E(T) = E(F_1) + \dots + E(F_7) + E(G_1) + \dots + E(G_4) + E(E)$$

$$\boxed{E(T) = 835g}$$

$$Var(T) = Var(F_1) + \dots + Var(F_7) + Var(G_1) + \dots + Var(G_4) + Var(E)$$

$$Var(T) = 1424$$

$$\sigma = 37{,}74g$$

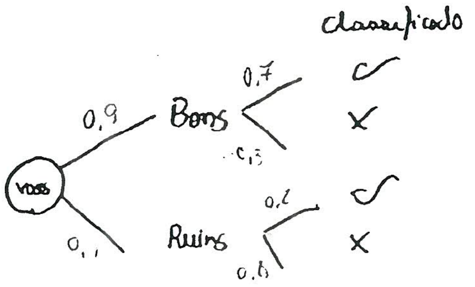
b) $T = 7F + 4G$

$$E(T) = 7E(F) + 4E(G) = R\$20$$

$$Var(T) = 7^2 Var(F) + 4^2 Var(G) = 49 \cdot 0{,}3^2 + 16 \cdot 0{,}2^2 = 5{,}05$$

$$\boxed{\sigma(T) = R\$\ 2{,}48}$$

⑤



a) A probabilidade de ser classificado como defeituoso é:

$$p = 0{,}9 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}35$$

X é uma Binomial $X \sim B(10, p)$

Assim

$$p(x) = \binom{10}{x} 0{,}35^x \, 0{,}65^{10-x}$$

b) $E(x) = n \cdot p = 3{,}5$

⑥ a) Se n clientes reservaram, se X é o número de clientes que cancelam → $X \sim B(n; 0,2)$

Para n=6, Para ao menos um ficar sem, devem faltar 0 ou 1

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{6}{0} \cdot 0,8^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^5$$

$$P(X \leq 1) = 0,655$$

b)

chegam	X	P(X=x)	Partirem
0	6	$6,4 \cdot 10^{-5}$	0
1	5	$1,536 \times 10^{-3}$	1
2	4	0,01536	2
3	3	0,08192	3
4	2	0,24576	4
5	1	0,39216	4
6	0	0,26144	4

$$E(X) = \sum x\, p(x) = 3,88$$

c) Não pegou, dizer como

- Faz o mesmo para 5 reservas
- Para 3 e 4, o número que parte é igual a $n - X \sim (B, n, p)$
- Faz $E(X) = 0,1\, E(\text{para } 3) + 0,2\, E(\text{para } 4) \ldots$

⑦

a) $$P(X=0) = \frac{e^{-0,2} \cdot 0,2^0}{0!} = 0,8187.$$

b) $$P(X=2) = \frac{e^{-0,2}\, 0,2^2}{2!} = 0,0164$$

c) Y = discos sem defeito $\sim B(5, 0,8187)$

$$P(Y=2) = \binom{5}{2} 0,8187^2 (1-0,8187)^{5-2} = 0,040$$

(8)

a) $\lambda = 2 \cdot 4 = 8$

$$P(X = 10) = \frac{e^{-8}\, 8^{10}}{10!} = 0{,}0993$$

b) $\lambda = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{0}}{0!} = 0{,}1353$$

c) $$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

(9)

a) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 0{,}4$ h

b) $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\lambda} = 0{,}4$ h

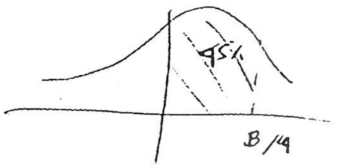
c) $P(X \le 4) = F(4) = 1 - e^{-2{,}5 \cdot 4} = 1 - e^{-10} = 0{,}99995$

d) $P(2 \le X \le 5) = F(5) - F(2) = e^{-5} - e^{-12{,}5} = 0{,}0067$

(10) Tabela

(11) a) $P(102 \le X \le 120) = P\left(\frac{102-106}{4} \le Z \le \frac{120-106}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 3{,}5) = 0{,}8411$

b) $P(106 - B \le X \le 106 + B) = P\left(\frac{-B}{4} \le Z \le \frac{B}{4}\right) = 90\,\%$



$\frac{B}{4} = 1{,}64$

$B = 6{,}56$

(12) a) $Y = B(n, p)$, $n \to 7$, $p \to 0{,}8411$

$E(Y) = np$

b) $P(Y \ge 5) = P(Y=5) + P(Y=6) + P(Y=7)$

$= \binom{7}{5} 0{,}8411^{5} \cdot 0{,}1589^{2} + \binom{7}{6} 0{,}8411^{6} \cdot 0{,}1589^{1} + \binom{7}{7} 0{,}8411^{7}$

$= 0{,}9149$

(13)

a $P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100 - 200}{30}\right) = P(Z < -3{,}33) = 6{,}4 \times 10^{-4}$

b) Y = nº corr dam

$Y \sim B(5, p)$ $p = 6{,}4 \cdot 10^{-4}$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0}(6{,}4 \times 10^{-4})^{0}(0{,}9993)^{5} = 0{,}0032$