

PROBABILIDADE (0303200)

Por Arthur Salles

1. Considere um experimento aleatório no qual o espaço amostral é $S = \{s_i : s_i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e os eventos são equiprováveis. Se uma variável aleatória for definida como $X(s_i) = s_i^2$, encontre S_X , a imagem de X , e sua função massa de probabilidade. Calcule o valor esperado e a variância de X .

Queremos encontrar informações sobre uma função da variável aleatória s . Vamos montar uma tabela com as informações.

s	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(s)$	$1/7$	$1/7$	$1/7$	$1/7$	$1/7$	$1/7$	$1/7$
$X(s)$	9	4	1	0	1	4	9

Note que como os eventos são equiprováveis, a probabilidade de cada um é um dividido pelo número de eventos (7)

Da tabela extraímos a Imagem de X : $Im = \{0, 1, 4, 9\}$ e sua f.d.p.:

X	0	1	4	9
$p(X)$	$1/7$	$2/7$	$2/7$	$2/7$

Podemos calcular média e variância:

$$i) E(X) = \sum x \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{2}{7}$$

$$\boxed{E(X) = 4}$$

$$ii) E(X^2) = \sum x^2 \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{7} + 1^2 \cdot \frac{2}{7} + 4^2 \cdot \frac{2}{7} + 9^2 \cdot \frac{2}{7} = 28$$

$$iii) \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 28 - 4^2$$

$$\boxed{\text{Var}(X) = 12}$$

2. Uma variável aleatória Y tem função de densidade de probabilidade (pdf)

$$f_Y(y) = \begin{cases} cy, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Use a pdf de Y para calcular:

- (a) a constante c ,
- (b) o valor esperado de Y ,
- (c) a variância de Y .

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$$

$$\int_0^2 cy dy = 1$$

$$\frac{cy^2}{2} \Big|_0^2 = 1$$

$$2c = 1$$

$$\boxed{c = 1/2}$$

$$b) E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y) dy = \int_0^2 y \cdot \frac{y}{2} dy = \frac{y^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6}$$

$$\boxed{E(Y) = 4/3}$$

$$c) i) E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(y) dy = \int_0^2 y^2 \cdot \frac{y}{2} dy = \frac{y^4}{8} \Big|_0^2 = 2$$

$$ii) \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\boxed{\text{Var}(Y) = 2/9}$$

3. Em um pacote de M&Ms, o número de M&Ms amarelos (Y) é uniformemente distribuído entre 5 e 15.

(a) Qual é o valor esperado de Y ?

(b) Qual é a variância de Y ?

Se Y tem distribuição uniforme, qualquer valor entre 5 e 15 tem a mesma probabilidade de ocorrência

$$P(Y) = \frac{1}{11}$$

$$a) E(Y) = \sum x \cdot p(x) = 5 \cdot \frac{1}{11} + 6 \cdot \frac{1}{11} + \dots + 14 \cdot \frac{1}{11} + 15 \cdot \frac{1}{11}$$

$$\boxed{E(Y) = 10}$$

$$b) i) E(Y^2) = \sum x^2 \cdot p(x) = 5^2 \cdot \frac{1}{11} + 6^2 \cdot \frac{1}{11} + \dots + 14^2 \cdot \frac{1}{11} + 15^2 \cdot \frac{1}{11}$$

$$E(Y^2) = 110$$

$$ii) \text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 110 - 10^2$$

$$\boxed{\text{Var}(Y) = 10}$$

