Resolução da Lista de Exercícios para P_2 de 2015

PROBABILIDADE (0303200)

Por Arthur Salles

---

1. Considere um experimento aleatório no qual o espaço amostral é $S = \{s_i : s_i = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e os eventos são equiprováveis. Se uma variável aleatória for definida como $X(s_i) = s_i^2$, encontre S_X, a imagem de X, e sua função massa de probabilidade. Calcule o valor esperado e a variância de X.

Queremos encontrar informações sobre uma função da variável aleatória s. Vamos montar uma tabela com as informações:

s	-3	-2	-1	0	1	2	3
p(s)	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7
X(s)	9	4	1	0	1	4	9

Note que como os eventos são equiprováveis, a probabilidade de cada um é um dividido pelo número de eventos (7)

Da tabela extraímos a Imagem de X : $Im = \{0, 1, 4, 9\}$ e sua F. d.p :

X	0	1	4	9
p(X)	1/7	2/7	2/7	2/7

Podemos calcular média e variância:

i) $E(X) = \sum x \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{2}{7}$

$\boxed{E(X) = 4}$

ii) $E(X^2) = \sum x^2 \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{7} + 1^2 \cdot \frac{2}{7} + 4^2 \cdot \frac{2}{7} + 9^2 \cdot \frac{2}{7} = 28$

iii) $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 28 - 4^2$

$\boxed{Var(X) = 12}$

2 ·ável aleatória Y tem função de densidade de probabilidade (pdf)

$$f_Y(y) = \begin{cases} cy, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Jse a pdf de Y para calcular:

(a) a constante c,

(b) o valor esperado de Y,

(c) a variância de Y.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$

$\int_{0}^{2} cy\,dy = 1$

$\frac{cy^2}{2}\Big|_0^2 = 1$

$2c = 1$

$\boxed{c = 1/2}$

b) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,dy = \int_0^2 y \cdot \frac{y}{2}\,dy = \frac{y^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{8}{6}$

$\boxed{E(Y) = 4/3}$

c) i) $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(y)\,dy = \int_0^2 y^2 \cdot \frac{y}{2}\,dy = \frac{y^4}{6}\Big|_0^2 = 2$

ii) $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$\boxed{Var(Y) = 2/9}$

3. Em um pacote de M&Ms, o número de M&Ms amarelos (Y) é uniformemente distribuído entre 5 e 15.

(a) Qual é o valor esperado de Y?

(b) Qual é a variância de Y?

Se Y tem distribuição uniforme, qualquer valor entre 5 e 15 tem a mesma probabilidade de ocorrência

$P(Y) = \frac{1}{11}$.

a) $E(Y) = \sum x \cdot p(x) = 5 \cdot \frac{1}{11} + 6 \cdot \frac{1}{11} + \dots + 14 \cdot \frac{1}{11} + 15 \cdot \frac{1}{11}$

$\boxed{E(Y) = 10}$

b) i) $E(Y^2) = \sum x^2 \cdot p(x) = 5^2 \cdot \frac{1}{11} + 6^2 \cdot \frac{1}{11} + \dots + 14^2 \cdot \frac{1}{11} + 15^2 \cdot \frac{1}{11}$

$E(Y^2) = 110$

ii) $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 110 - 10^2$

$\boxed{Var(Y) = 10}$

. O número de solicitações em um certo intervalo de tempo no servidor do Júpiter é modelado por uma distribuição de Poisson. O engenheiro responsável pelo sistema coletou dados sobre o uso do serviço e determinou que o servidor recebe, em média, 3 acessos por minuto. O Júpiter foi projetado de forma a atender no máximo 6 acessos em um intervalo de um minuto.

(a) Qual é a probabilidade do servidor não conseguir atender a todos os acessos em um intervalo de um minuto qualquer? (Basta a expressão, não é necessário calcular o valor).

(b) Considere que os números de acessos em intervalos distintos de tempo sejam independentes entre si. Qual é a probabilidade do Júpiter atender a todos os acessos em dois intervalos consecutivos de um minuto? (Deixe a resposta em função do item anterior).

a) Sabemos que X é Poisson com taxa 3 (acessos/min)

Ou seja: X ~ Poisson (3)

Queremos a probabilidade de não conseguir atender, ou seja, $P(X > 6)$

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - p(0) - p(1) - \dots - p(5)$$

$$P(X > 6) = 1 - \frac{e^{-3}3^1}{1!} - \frac{e^{-3}3^2}{2!} - \frac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!} - \frac{e^{-3} \cdot 3^4}{4!} - \frac{e^{-5} \cdot 3^5}{5!}$$

b) A probabilidade de atender em um intervalo independe da probabilidade de atender no outro

$$\begin{aligned} P(\text{Atender nos intervalos } 1 \text{ e } 2) &= P(\text{atender em } 1 \cap \text{atender em } 2) \\ &= P(\text{atender em } 1) \times P(\text{atender em } 2) \\ &= P(X \leq 6) \times P(X \leq 6) \\ &= [P(X \leq 6)]^2 \\ &= \left[\sum_{i=0}^{6} \frac{e^{-3} 3^i}{i!} \right]^n \end{aligned}$$

5. A temperatura máxima T em New Jersey em um dia de julho, medida pela escala Farenheit, é uma variável aleatória $\mathcal{N}(85,100)$ (Gaussiana). Calcule as probabilidades $\Pr[T > 100]$, $\Pr[T > 60]$ e $\Pr[70 \leq T \leq 100]$.

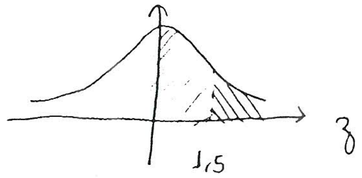
a) $P(T > 100)$

Normalizando, com $\mu = 85$ e $\sigma = 10$

$$= P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} > \frac{100-85}{10}\right) = P(Z > 1{,}5)$$

$Z \sim N(0,1)$

$$= 0{,}5 - \underbrace{P(0 \leq Z \leq 1{,}5)}_{\text{TABELADO}}$$



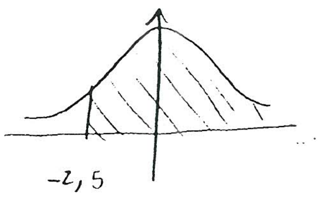
$$= 0{,}5 - 0{,}43319$$

$$\therefore \boxed{P(T > 100) = 0{,}06681}$$

b) $P(T > 60)$

$$P(T > 60) = P\left(\frac{T-\mu}{\sigma} > \frac{60-85}{10}\right) = P(Z > -2{,}5)$$

$$= 0{,}5 + P(0 \leq Z \leq 2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938$$



$-2{,}5$

$= P(0 \leq Z \leq 2{,}5)$ $\quad 0{,}5$

$$\boxed{P(T > 60) = 0{,}9938}$$

c) $P(70 \leq T \leq 100)$

$$P(70 \leq T \leq 100) = P\left(\frac{70-85}{10} \leq \frac{T-\mu}{\sigma} \leq \frac{100-85}{10}\right)$$

$$P(70 \leq T \leq 100) = P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}5) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 1{,}5)$$

$$P(70 \leq T \leq 100) = 2 \times 0{,}43319$$

$$\boxed{P(70 \leq T \leq 100) = 0{,}86638}$$

ofessor paga 25 centavos por erro que os alunos encontrarem nas derivações
sa. Em uma carreira de n anos, o total pago pelos erros cometidos pode ser
mado por uma variável aleatória Gaussiana Y_n, com valor esperado $40n$ e
cia $100n$. Qual a probabilidade de que Y_{20} exceda 1000 reais? Quantos n
professor deve lecionar para que $\Pr[Y_n > 1000] > 0.99$?

a) i) Para $n = 20$: $Y_{20} = N(800 ; 2000)$

ii) $P(Y_{20} > 1000) = P\left(\underbrace{\frac{Y_{20} - \mu}{\sigma}}_{Z} > \frac{1000-800}{\sqrt{2000}}\right)$

cuidado $\sigma^2 = 2000$ e não $\sigma = 2000$

$P(Y_{20} > 1000) = P(Z > 4{,}472)$

Esse valor é tão pequeno que não encontramos nas tabelas comuns. Usando um software adequado podemos calcular:

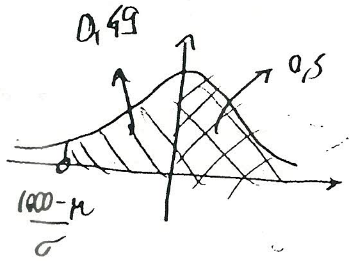
$$\boxed{P(Y_{20} > 1000) = 3{,}87 \times 10^{-6}}$$

b) Vamos procurar o valor limite de n tal que

$$P(Y_n > 1000) = 0{,}99$$

$$P\left(\frac{Y_n - \mu}{\sigma} > \frac{1000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}99$$

$$P\left(Z > \frac{1000-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}99$$



Pela tabela, sabemos que $P(0 < Z < 2{,}32) = 0{,}49$

Logo: $\frac{1000-\mu}{\sigma} = -2{,}32$, como $\mu = 40n$ e $\sigma = 100n$

$$1000 - 40n = 2{,}32 \times \sqrt{100n}$$

Elevando ao quadrado:

$$(1000 - 40n)^2 = 2{,}32^2 \times 100n$$

Cuja solução é: $\boxed{n \simeq 28 \text{ anos}}$

7. Considere a variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada abaixo. Calcule o valor de c e desenhe $f_X(x)$ e $F_X(x)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x-1), & 1 \le x \le 2, \\ c(3-x), & 2 < x \le 3, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

i) $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_1^2 c(x-1)\,dx + \int_2^3 c(3-x)\,dx = 1$

$$\left[c\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_1^2 + \left[c\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\right]_2^3 = 1$$

$$\frac{c}{2} + \frac{9}{2}c - 4c = 1$$

$$\boxed{c = 1}$$

ii) Vamos calcular a acumulada:

i) $\underline{a < 1}$: $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = 0$

ii) $\underline{1 \le a \le 2}$: $F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_1^a (x-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)_1^a$

$$F(a) = \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} = \frac{(a-1)^2}{2}$$

iii) $\underline{2 < a \le 3}$: $F(a) = F(2) + \int_2^a (3-x)\,dx = \frac{1}{2} + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)_2^a$

$$F(a) = \frac{1}{2} + 3a - \frac{a^2}{2} - 6 + 2$$

$$F(a) = 1 - \frac{(3-a)^2}{2}$$

iv) Assim: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{2}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

9. Em um certo jogo de loteria, a chance de ter um bilhete premiado é 1 em 1000. Suponha que uma pessoa compra um bilhete por dia ao longo de 50 anos. Qual é o valor esperado $E[T]$ de bilhetes premiados em 50 anos? Se cada bilhete premiado pagar R\$1000,00, qual o valor esperado $E[R]$ pago pelos bilhetes premiados ao longo de 50 anos? Se cada bilhete custar R\$2,00, qual o seu lucro esperado depois de 50 anos?

i) Note que T é a contagem de sucessos, assim T é uma variável com distribuição binomial com

- $50 \times 365 = 18250$ experimentos (cada experimento é ver se ganha em um ano)
- $p = \frac{1}{1000}$: probabilidade de sucesso em cada evento

ii) Queremos calcular o lucro esperado. Devemos considerar.

a) gastos: cada bilhete custa $R = 2$. Assim ao comprar 18250 bilhetes gastará: $E(R) = 18250 \times 2 \Rightarrow \boxed{E(R) = 36500}$

b) ganhos: quantas vezes espera ganhar? Olhando para T:

$$E(T) = np = 18250 \cdot \frac{1}{1000} \Rightarrow \boxed{E(T) = 18,25}$$

Se T é o número de vezes que ganha o ganho será de $1000 \times T$ (cada vez que ganha recebe R\$ 1000)

$$\text{Ganho esperado} = E(1000\,T) = 1000\,E(T) = 18250$$

Assim o lucro esperado será de:

$$\text{Lucro esperado} = \text{Ganho esperado} - \text{Gastos} = 18250 - 36500$$

$$\boxed{\text{Lucro esperado} = -18250}$$

10. Seja a variável aleatória X, que corresponde aos resultados possíveis no lançamento de um dado honesto. Dada a função $f(\alpha) = \alpha^3$, uma outra variável Z é obtida por meio de $Z = f(X)$.

(a) Quais os valores assumidos por Z e qual a sua função de massa de probabilidade?

(b) Obtenha o valor de $E[f(X)]$, em função do valor de $E\{X\}$.

(c) Calcule o valor de $f(E[X])$. Esse resultado é igual ao obtido para $E[f(X)]$?

a)

X	1	2	3	4	5	6
$Z = X^3$	1	8	27	64	125	216
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

b) $E(f(x)) = E(x^3) = \Sigma\, x^3 \cdot p(x)$ ou $\Sigma\, z \cdot p(z)$

$E(f(x)) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{1}{6} + 27 \cdot \frac{1}{6} + 64 \cdot \frac{1}{6} + 125 \cdot \frac{1}{6} + 216 \cdot \frac{1}{6}$

$\boxed{E(f(x)) = 73{,}5}$

c) i) $E(X) = \Sigma\, x \cdot p\,x$

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$

$E(X) = 3{,}5$

ii) $[E(x)]^3 = 3{,}5^3$

$[E(x)]^3 = 42{,}875$

13. Uma empresa de manutenção de computadores pode demorar até 4 dias para consertar um PC. O reparo é cobrado de acordo com o tempo que o serviço leva para ser executado. O número de dias D para que um computador seja consertado e o preço do serviço C são descritos por

$$f_D(d) = \begin{cases} 0.2, & d = 1 \\ 0.4, & d = 2 \\ 0.3, & d = 3 \\ 0.1, & d = 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$C = \begin{cases} 90, & \text{se o computador é consertado em 1 dia} \\ 70, & \text{se o computador é consertado em 2 dias} \\ 40, & \text{se o computador é consertado em 3 dias} \\ 40, & \text{se o computador é consertado em 4 dias} \end{cases}$$

(a) Qual é o valor esperado para o tempo de conserto $\mu_D = \mathrm{E}[\,D\,]$?

(b) Qual é o desvio esperado $\mathrm{E}[\,D - \mu_D\,]$?

(c) Expresse C em função de D.

(d) Qual o valor esperado de C?

a) $E(D) = \sum d\,p(d) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1$

$\boxed{E(D) = 2{,}3}$

b) $E(D - \mu_D) = E(D) - \mu_D = \mu_D - \mu_D = 0$

c) $C(D) = \begin{cases} 90, & D = 1 \\ 70, & D = 2 \\ 40, & D = 3 \\ 40, & D = 4 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$

d) $E(C(D)) = \sum C(D) \cdot p(D)$

$E(C) = 90 \cdot 0{,}2 + 70 \cdot 0{,}4 + 40 \cdot 0{,}3 + 40 \cdot 0{,}1$

$\boxed{E(C) = 62}$

16. Seja a variável aleatória contínua T, com função de densidade de probabilidade

$$f_T(t) = \begin{cases} 1/8, & 1 \leq t \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $U = h(T) = 1/\sqrt{T}$.

(a) Calcule E[T] e var[T].

(b) Calcule h (E[T]) e E[$h(T)$].

(c) Calcule E[U] e var[U].

$$a) \text{ i) } E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt = \int_1^9 t \cdot \frac{1}{8}\, dt = \left.\frac{t^2}{16}\right|_1^9 = 5$$

$$\text{ii) } var(T) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 \cdot f(t)\, dt = \int_1^9 (t-5)^2 \cdot \frac{1}{8}\, dt$$

$$var(T) = \left(\frac{(t-5)^3}{3} \cdot \frac{1}{8}\right)\Big|_1^9 = \frac{4^3}{24} - \frac{(-4)^3}{24} = \frac{16}{3}$$

Ou, usando as propriedades para distribuição uniforme com $a = 1$ e $b = 9$

$$E(T) = \frac{b+a}{2} = \frac{9+1}{2} \Rightarrow \boxed{E(T) = 5}$$

$$Var(T) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(9-1)^2}{12} \Rightarrow \boxed{var(T) = \frac{16}{3}}$$

$$b) \text{ i) } h(E(T)) = h(5) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{ii) } E(h(T)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot f(t)\, dt = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{8}\, dt$$

$$E(h(T)) = \left.\frac{\sqrt{t}}{4}\right|_1^9 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{E(h(T)) = 1/2}$$

c) i) Como já vimos:

$$E(U) = E(h(T)) \Rightarrow \boxed{E(U) = 1/2}$$

ii) $E(U^2) = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)^2\right] = E\left(\frac{1}{|T|}\right)$

$$E(U^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|} f(t)\,dt = \int_{1}^{9} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{8}\,dt = \frac{\ln t}{8}\Big|_1^9$$

$$E(U^2) = \frac{\ln 9}{8}$$

iii) $Var(U) = E(U^2) - [E(U)]^2$.

$$\boxed{Var(U) = \frac{\ln 9}{8} - \frac{1}{4}}$$

17. A função de probabilidade acumulada de variável aleatória V é dada por

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < -5 \\ (v+5)^2/144, & -5 \leq v < 7 \\ 1, & v \geq 7. \end{cases}$$

(a) Qual é o valor de $E[V]$?

(b) Qual é o valor de $\text{var}[V]$?

(c) Qual é o valor de $E[V^3]$?

a) i) Podemos primeiro determinar a f.d.p.:

$$f(v) = \frac{dF(v)}{dv} = \begin{cases} \frac{v+5}{72}, & -5 \leq v \leq 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ii) $$E(v) = \int_{-\infty}^{\infty} v\, f(v)\, dv = \int_{-5}^{7} \frac{v(v+5)}{72}\, dv = \left(\frac{v^3}{216} + \frac{5v^2}{144} \right)\Big|_{-5}^{7}$$

$$\boxed{E(v) = 3}$$

b) i) $$E(v^2) = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v)\, dv = \int_{-5}^{7} \frac{v^2(v+5)}{72}\, dv = \left(\frac{v^4}{288} + \frac{5v^3}{216} \right)\Big|_{-5}^{7}$$

$$E(v^2) = 17$$

ii) $$\text{Var}(v) = E(v^2) - [E(v)]^2 = 17 - 9$$

$$\boxed{\text{Var}(v) = 8}$$

c) $$E(v^3) = \int_{-\infty}^{\infty} v^3 f(v)\, dv = \int_{-5}^{7} \frac{v^3(v+5)}{72}\, dv$$

$$E(v^3) = \left(\frac{v^5}{360} + \frac{5v^4}{288} \right)\Big|_{-5}^{7} \Rightarrow \boxed{E(v^3) = 86,2}$$

´·el aleatória uniforme com $E[X] = 7$ e $var[X] = 3$. Qual a função ·bilidade de X?

i) Sabemos que:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$7 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \underline{a+b = 14} \quad (1) \rightarrow a = 14-b$$

ii) Além disso:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$3 = \frac{(b-14+b)^2}{12}$$

$$36 = [2(b-7)]^2$$

$$9 = (b-7)^2 \quad \therefore \quad b-7 = \pm 3$$

$$\boxed{\begin{matrix} b = 10 \\ a = 4 \end{matrix}} \qquad \cancel{\begin{matrix} b = 4 \\ a = 10 \end{matrix}}$$

Obrigatoriamente $b > a$

Assim a função densidade de probabilidade é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 4 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$