VI - Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória é uma regra que associa um valor a cada resultado no espaço amostral. Por exemplo, se o experimento for jogar um dado quatro vezes, uma variável aleatória pode ser: X = número de vezes que sai um número-primo.

Uma variável aleatória (v.a.) pode ser discreta ou contínua, dependendo se seu valor assume valores discretos ou contínuos. No exemplo anterior, X é uma v.a. discreta (assume valores $0, 1, 2, \ldots$). Se X for o tempo de um voô, X será uma v.a. contínua.

A) Variáveis aleatórias discretas

Sendo X uma v.a. discreta, definimos a função distribuição de probabilidade ou função massa de probabilidade (Fdp ou Fmp) na forma $p(x)$ que para cada valor de x indica a probabilidade de $X = x$

$$\boxed{p(x) = P(X = x)}$$ FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Além disso, definimos a função de distribuição acumulada (FDA) como sendo:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y;\, y \leq x} p(y)}$$

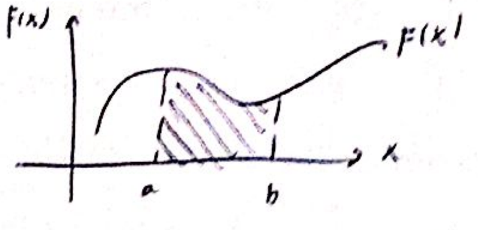
Ou seja, $F(x)$ é a probabilidade da v.a ser menor ou igual a x.

Propriedades

- $0 \leq \underset{p(x)}{P(X = t)} \leq 1$
- $\sum p(x_i) = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$ — maior valor possível inferior a a

B) Variáveis Aleatórias Contínuas

Se X é uma v.a. contínua, definimos uma distribuição de probabilidade ou função de densidade de probabilidade $f(x)$ que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \leq b)$

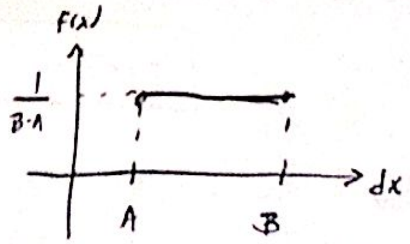


$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1}$

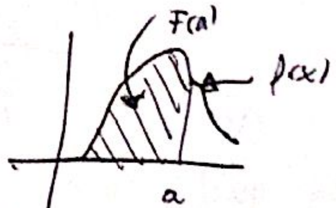
* **Distribuição Uniforme**: uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme num intervalo $[A, B]$ se:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A}, & A \leq x \leq B \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



* **Função de Distribuição acumulada** $F(x)$ é definida como

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy}$$



Propriedades
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

* Relação entre $f(x)$ e $F(x)$: Dada a função de densidade acumulada $F(x)$, achamos a fdp pela sua derivada:

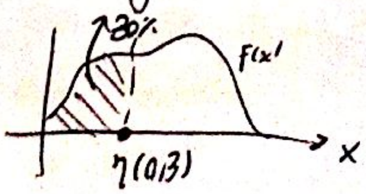
$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

* Percentis: Sendo p um número entre 0 e 1, o 100p-ésimo percentil da distribuição é representado por $\eta(p)$ e calculado como:

$$\boxed{p = F(\eta(p)) = \int_{-\infty}^{\eta(p)} F(y)\,dy}$$

Por exemplo, se $p = 0,3$, o 30° percentil ou $\eta(0,3)$ é o valor para o qual $\int_{-\infty}^{\eta(0,3)} f(y)\,dy = 0,3$

Ou, graficamente:



Em especial, para $p = 0,5$, damos um nome especial para $\eta(p)$: é a mediana ($\tilde{\mu}$)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\tilde{\mu}} f(y)\,dy = 0,5$$

Exercícios Resolvidos : P1 2ª Parte (v.as)

1. Vamos primeiramente calcular a acumulada

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.2	0.16	0.04
$F(x)$	0.1	0.25	0.45	0,7	0.1	0.96	1

a) $P(X \leq 3) = F(3) = 0,7$

b) $P(X < 3) = F(3) - p(3) = 0,7 - 0,25 = 0,45$

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0,45 = 0,55$

d) $P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) + p(2) = 0,96 - 0,45 + 0,2 = 0,71$

2.

a) Para testar só 2, ambas devem ser aceitáveis

$p(2) = p(Y=2) = 0,9 \times 0,9 = 0,9^2 = 0,81$

b) Para testar 3, a última é aceitável e uma das outras duas também

A I A

ou

I A A

$$p(Y=3) = 2 \times \underbrace{0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1}_{\text{probabilidade de uma das opções}} = 2 \times 0,9^2 \times 0,1 = 0,162$$

c) A quinta pilha é boa. Entre as 4 primeiras há 1 boa e 3 ruins

Qual a probabilidade de uma configuração

Por exemplo $\underset{A}{\_}\ \underset{I}{\_}\ \underset{I}{\_}\ \underset{I}{\_}\ A$ $\quad P = 0,9 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,9$

$P = 0,9^2 \times 0,1^3$

Mas de quantas formas podemos organizar as 4 primeiras? 4 (onde ponho A)

$$P = 4 \times 0,9^2 \times 0,1^3 = 0,0045$$

d) No caso geral será: $p(Y=n) = p(n) = 0,9^2 \times 0,1^{(n-2)} \times (n-1)$

3. Como X só assume valores inteiros

a)

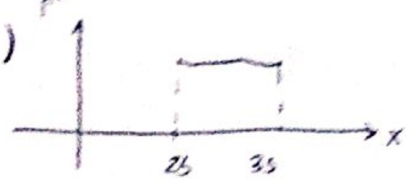
	1	3	4	6	12
F(x)	0,3	0,4	0,45	0,6	1
p(x)	0,3	0,1	0,05	0,15	0,4

b) $P(3 \le X \le 6) = F(6) - P(X < 3) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

$P(4 \le X) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

4.

a)



$$f(x) = \begin{cases} K, & 25 \le x \le 35 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{25}^{35} K\,dx = 1$

$10K = 1$

$K = 1/10$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 1/10, & 25 \le x \le 35 \\ 0, & c.c \end{cases}}$$

b) $P(X \ge 33) = \int_{33}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{33}^{35} \frac{1}{10}\,dx + \int_{35}^{\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx = \frac{1}{5}$

c) Obviamente a média é $\mu = 30$

Daí: $P(\mu - 2 \le X \le \mu + 2) = P(28 \le \mu \le 32)$

$= \int_{28}^{32} f(x)\,dx = \int_{28}^{32} \frac{1}{10}\,dx = \frac{2}{5}$

d) Ou seja: $25 \le a \le 33$

Logo a e $(a+2)$ estão sempre no intervalo $[25, 35]$

$\Rightarrow \int_{a}^{a+2} f(x)\,dx = \int_{a}^{a+2} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}[(a+2) - a] = \frac{1}{5}$

5.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{-\infty}^{1} \cancel{f(x)}\,dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{1}^{\infty} \frac{K}{x^4}\,dx = 1$

$\left(-\frac{K}{3x^3} \right)\Big|_1^{\infty} = 1$

$\frac{K}{3} = 1$

$\boxed{K = 3}$

b) Para $x \leq 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \cancel{f(y)}\,dy = 0$

Para $x > 1$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy = \int_{1}^{x} \frac{3}{y^4}\,dy = \left(\frac{-1}{y^3} \right)_1^x = 1 - \frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow \boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ 1 - x^{-3} & , x > 1 \end{cases}}$

c) • $P(x \geq 2) = 1 - F(2) = 1 - [1 - 2^{-3}] = 2^{-3} = 0{,}125$

• $P(2 \leq x \leq 3) = F(3) - F(2) = [1 - 3^{-3}] - [1 - 2^{-3}] = 2^{-3} - 3^{-3}$

$P(2 \leq x \leq 3) = 0{,}088$

d) Queremos $\tilde{\mu}$ tal que $F(\tilde{\mu}) = 0{,}5$

$1 - \tilde{\mu}^{-3} = 0{,}5$

$\tilde{\mu}^{-3} = 0{,}5$

$\tilde{\mu}^{3} = \frac{1}{0{,}5} = 2$

$\boxed{\tilde{\mu} = 1{,}26}$

3. Como X ... valores inteiros

6.

a) $P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{4}\left[1+\ln 4\right] = 0,597$

b) $P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{3}{4}\left[1+\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right] - 0,597 = 0,369$

c) Derivando $F(x)$:

$\underline{x \leq 0}$: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d0}{dx} = 0$

$\underline{0 < x \leq 4}$ $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{4}\left(1+\ln\left(\frac{4}{x}\right)\right)\right] = \frac{1}{4}\left(1+\ln\left(\frac{4}{x}\right)\right) + \frac{x}{4}\left[\frac{x}{4}\left(\frac{-4}{x^2}\right)\right]$

$(\ldots)$ $\boxed{f(x) = 0,3466 - 0,25\ln x}$

$\underline{x > 4}$ $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0$