2,40

FUJA DO NABO

PROBABILIDADE – P1

1°SEMESTRE DE 2015

ARTHUR SALLES

esumo P1 - Probabilidade

PARTE 1 (Resto em breve)

Por Arthur Salles

I - Uma breve motivação

Não, meu amigo, probabilidade não é apenas a arte de calcular resultados do jogo de dados. Pode não parecer neste momento, mas a probabilidade é muito útil.

Por quê? Por uma simples razão: nada no mundo é exato. As coisas e suas medidas variam e só podemos entendê-las bem se falarmos na diferentes probabilidades associadas aos estados em que podem estar.

Por exemplo, se um dia você ~~decidir vender sua alma para ficar muito rico~~ entrar num banco de investimento, verá que muito do que eles fazem por lá é entender a probabilidade das ações subirem ou descerem.

Espero ter convencido vocês de que o estudo desta matéria serve para mais coisas do que acumular dois créditos, então, vamos lá!

II - Conceitos básicos de probabilidade

O objetivo de nosso estudo será entender como medir as probabilidades envolvidas em um experimento. Um experimento não precisa ser algo feito em laboratório; qualquer ação de que desconhecemos o resultado. Por exemplo, fazer o exame do bafômetro ou contar os gols numa partida de futebol.

Cada experimento possui um espaço amostral, que inclui todos os seus resultados possíveis. Por exemplo, se o experimento for jogar um dado, o espaço amostral (S) é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Além disso, podemos definir eventos para um experimento. Um evento nada mais é do que um grupo de resultados, por exemplo, tirar um número par ao jogar um dado.

Vamos ter que usar os conceitos básicos de conjuntos: união, intersecção e complemento. Não gastarei muito tempo com isso; vamos só recapitular

$A \cup B$
(união)

$A \cap B$
(intersecção)

A'
(complementar)

III - Axiomas e Propriedades básicas

Sendo A um evento (por exemplo: "chover amanhã"), representamos por $P(A)$ a probabilidade de ocorrência de A.

- $P(A) \geq 0$ ⇒ nenhum evento tem probabilidade negativa
- $P(S) = 1$ ⇒ a probabilidade de dar um resultado em S (espaço amostral) é 100%, ou 1.
- $\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$
- $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Além dessas, temos algumas propriedades para eventos mutuamente exclusivos. Dizemos que A e B são mutuamente exclusivos se:

$$\boxed{P(A \cap B) = 0} \quad \text{(A e B mutuamente exclusivos)}$$

Por exemplo, se A for "hoje é domingo" e B "hoje é segunda-feira", claramente A e B são mutuamente exclusivos, pois as duas coisas não podem acontecer ao mesmo tempo

- Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ for um conjunto de eventos mutuamente exclusivos: $\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)}$

- Técnicas de Contagem

Quando os resultados possíveis de um experimento têm todos a mesma probabilidade (por exemplo resultado do jogo da roleta), podemos achar a probabilidade de um evento A como:

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N}}$$

← Número de resultados em A

└ Número de resultados possíveis

Por exemplo, se A for tirar um número par no dado:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

⇒ Exercícios na aula

V - Probabilidade Condicional

Muitas vezes, a probabilidade de um evento depende de outro. Por exemplo, a probabilidade de um indivíduo ser calvo depende do fato do indivíduo ser homem ou mulher.

Representamos por $P(A|B)$ a probabilidade de A acontecer dado que B acontece. Por exemplo, podemos calcular a probabilidade de alguém ser calvo sabendo que este alguém é homem: $P(\text{calvo} \mid \text{homem})$

Por definição: $$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Fazendo uma incrível multiplicação em cruz, chegamos na regra da multiplicação: $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

V - Independência

Dizemos que dois eventos A e B são independentes se:

$$\boxed{P(A|B) = P(A)}$$

Por exemplo, se A = { ter 1° filho homem } e B = { ter 2° filho mulher }, claramente $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$, ou seja, o sexo de um filho independe do de outros filhos.

Se voltarmos para a fórmula

$$\underbrace{P(A|B)}_{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$ (A e B independentes)

Generalizando, se os eventos $A_1, \ldots, A_K$ são mutuamente independentes:

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_K) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_K)$$

CONCEITOS BÁSICOS

Fonte: Lista

1. Uma transmissão de fax pode ser realizada com 3 velocidades, dependendo da condição da conexão entre duas máquinas de fax: velocidade alta (A), média (M) ou baixa (B) (vide tabela abaixo).

	Alta (A)	Média (M)	Baixa (B)
Velocidade (bps)	14.400	9600	4800

Uma empresa envia apenas dois tipos de fax: curtos (C), com duas páginas, ou longos (L), com quatro páginas. Considere o experimento de monitorar uma transmissão de fax e observar a velocidade de transmissão e o comprimento da mensagem.

(a) Qual é o espaço amostral do experimento?

(b) Seja A_1 o evento "fax de velocidade média". Quais são os elementos de A_1?

(c) Seja A_2 o evento "fax curto". Quais são os elementos de A_2?

(d) Seja A_3 o evento "fax de alta velocidade ou de baixa velocidade". Quais são os elementos de A_3?

(e) Os eventos A_1, A_2 e A_3 são mutualmente exclusivos?

TÉCINCAS DE CONTAGEM

2 Fonte: Devore (exemplo 2.23)

Um armazém de universidade recebeu uma entrega de 25 impressoras, das quais 10 são impressoras a laser e 15 são a jato de tinta. Se 6 das 25 forem selecionadas aleatoriamente para serem verificadas por um técnico, qual será a probabilidade de que exatamente 3 delas sejam a laser (sendo as outras 3 a jato de tinta)?

3 Fonte: Devore

31. a. Beethoven escreveu 9 sinfonias e Mozart escreveu 27 concertos para piano. Se a estação de rádio de uma universidade desejar tocar primeiro uma sinfonia de Beethoven e depois um concerto de Mozart, de quantas formas pode ser feita a escolha?

b. O gerente da rádio decide que em cada noite sucessiva (7 dias por semana) será tocada uma sinfonia de Beethoven, seguida por um concerto de piano de Mozart, seguido por um quarteto de cordas de Schubert (de um total de 15). Por cerca de quantos anos essa política pode continuar, antes que exatamente o mesmo programa seja repetido?

Fonte: Devore

4 **41.** Uma professora de matemática deseja marcar uma reunião com cada um de seus oito assistentes, quatro homens e quatro mulheres, para discutir o curso de cálculo. Suponha que todas as seqüências de reuniões sejam igualmente prováveis de serem escolhidas.

a. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma assistente mulher esteja entre as primeiras três pessoas com quem a professora se reunirá?

b. Qual é a probabilidade de que após as primeiras cinco reuniões ela tenha se reunido com todas as assistentes mulheres?

c. Suponha que a professora tenha os mesmos oito assistentes no semestre seguinte e marque reuniões sem considerar a ordem seguida no primeiro semestre. Qual a probabilidade de que a ordem dos compromissos seja diferente?

Fonte: Lista 2015

5 Existem dois tipos de telefones celulares: normais (N) e *smartphones* (S). Chamadas telefônicas realizadas a partir desses celulares podem ser classificadas como curtas (C) ou longas (L). Ao monitorar uma chamada de celular, observa-se o tipo de telefone e a duração da chamada. As seguintes informações são coletadas sobre o modelo de probabilidade deste experimento: $\Pr[C] = 0.5$, $\Pr[NC] = 0.2$ e $\Pr[SL] = 0.1$. Qual o espaço amostral do experimento? Calcule:

(a) $\Pr[L]$

(b) $\Pr[SC]$

(c) $\Pr[N]$

Probabilidade Condicional

6 Fonte: Devore

45. A população de um país consiste em três grupos étnicos. Cada indivíduo pertence a um de quatro grupos sangüíneos principais. A *tabela de probabilidade conjunta* fornece as proporções de indivíduos nas diversas combinações de grupos étnicos-grupos sangüíneos.

		Grupo sangüíneo			
		O	A	B	AB
Grupo étnico	1	0,082	0,106	0,008	0,004
	2	0,135	0,141	0,018	0,006
	3	0,215	0,200	0,065	0,020

Suponha que um indivíduo seja selecionado aleatoriamente da população e defina os eventos A = {tipo A selecionado}, B = {tipo B selecionado} e C = {grupo étnico 3 selecionado}.

a. Calcule $P(A)$, $P(C)$, e $P(A \cap C)$.

b. Calcule $P(A \mid C)$ e $P(C \mid A)$ e explique, no contexto, o que significa cada uma dessas probabilidades.

c. Se o indivíduo selecionado não tiver o tipo sangüíneo B, qual é a probabilidade de que ele ou ela seja do grupo étnico 1?

Fonte: Devore

7

59. Em determinado posto de gasolina, 40% dos clientes usam gasolina comum (A_1), 35% usam gasolina aditivada (A_2) e 25% usam gasolina *premium* (A_3). Dos clientes que usam gasolina comum, apenas 30% enchem o tanque (evento B). Dos clientes que usam gasolina aditivada e *premium*, 60% enchem o tanque, enquanto dentre os que usam *premium*, 50% enchem o tanque.

a. Qual é a probabilidade de o próximo cliente pedir gasolina aditivada e encher o tanque ($A_2 \cap B$)?

b. Qual é a probabilidade de o próximo cliente encher o tanque?

c. Se o próximo cliente encher o tanque, qual é a probabilidade de pedir gasolina comum? E gasolina aditivada? E gasolina *premium*?

8 Fonte: Devore

65. Em uma grande universidade, na pesquisa por um livro-texto satisfatório, o departamento de estatística testou um livro diferente durante os últimos três trimestres. No trimestre do outono, 500 alunos usaram o livro do professor Média; durante o inverno, 300 alunos usaram o livro do professor Mediana e durante a primavera, 200 alunos usaram o livro do professor Moda. Uma pesquisa no final de cada trimestre mostrou que 200 estavam satisfeitos com o livro do Média, 150 estavam satisfeitos com o livro do Mediana e 160 estavam satisfeitos com o livro do Moda. Se um aluno que estudou estatística durante um dos trimestres for selecionado aleatoriamente e admitir estar satisfeito com o livro-texto, ele terá mais probabilidade de ter usado o livro do Média, do Mediana ou do Moda? Quem é o autor igualmente menos provável? (*Sugestão:* Desenhe um diagrama de árvore ou use o teorema de Bayes.)

Independência

9 Fonte: Slides Celma

Jogam-se dois dados honestos.

Evento E1: soma das faces é 6. Evento F: primeira face é 4

Evento E2: soma das faces é 7. Evento F: primeira face é 4

a) Os eventos E1 e F são Independentes?

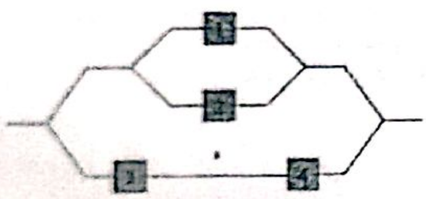
b) Os eventos E2 e F são Independentes?

Fonte: Lista

Suponha que para a população em geral, 1 em cada 5000 pessoas carrega o vírus HIV e que existe um teste para a presença do HIV cujo os possíveis resultados são positivo (+) e negativo (−). Suponha que o teste acerte a resposta em 99% das casos, isto é, para uma pessoa que tem HIV ou não, o teste dá o resultado correto 99% das vezes. Qual é a probabilidade $\Pr[-|\mathrm{HIV}]$ de que o teste dê negativo dado que a pessoa possui o vírus HIV? Qual a probabilidade $P[\mathrm{H}|+]$ de que uma pessoa escolhida aleatoriamente tenha o vírus HIV dado que o teste deu positivo?

Fonte: Devore

Considere o sistema de componentes ligados como na figura a seguir. Os componentes 1 e 2 estão ligados em paralelo, de forma que o subsistema funciona se e, somente se, 1 ou 2 funcionar. Como 3 e 4 estão ligados em série, o subsistema funcionará se, e somente se, 3 e 4 funcionarem. Se os componentes funcionarem independentemente um do outro e P(componente funciona) = 0,9, calcule P(sistema funciona).



Fonte: Lista

14. Com base em dados de 2012 da Rede Interagencial de Informações para a Saúde (RIPSA) do Ministério da Saúde, aproximadamente 12% da população brasileira tem diabetes melito [link]. Suponha que existem 2 métodos de diagnóstico para esta enfermidade: o método A dá resultado positivo para 80% dos que tem diabetes e para 10% dos sãos, enquanto que o método B dá positivo para 70% dos acometidos e para 5% dos sãos.

   (a) Calcule a probabilidade de uma pessoa qualquer obter um resultado positivo pelos dois métodos.

   (b) Calcule a probabilidade de que, entre duas pessoas com diabetes melito, pelo menos uma obtenha um resultado positivo por algum método.

dução dos Exercícios

1.

a) Os resultados possíveis são combinações de uma velocidade e um tipo

$$S = \{(A,C), (A,L), (M,C), (M,L), (B,C), (B,L)\} \quad (\underset{\text{velocidade}}{\uparrow}, \underset{\text{tipo}}{\uparrow})$$

b) $A_1 = \{(M,C), (M,L)\}$

c) $A_2 = \{(A,C), (M,C), (B,C)\}$

d) $A_3 = \{(A,C), (A,L), (M,C), (M,L)\}$

e) Não, pois há intersecções, por exemplo $A_1 \cap A_2 = \{(M,C)\}$

2. Usando técnicas básicas de contagem, sendo o evento A = { 3 das 6 impressoras é jato de tinta }

$$P(A) = \frac{N(A) \longrightarrow \text{Como escolher 3 jato e 3 laser}}{N' \longrightarrow \text{Como escolher 6}} = \frac{\binom{15}{3}\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} = \frac{\frac{15!}{3!\,12!}\;\frac{10!}{3!\,7!}}{\frac{25!}{6!\,19!}}$$

$$\boxed{P(A) = 0.3083}$$

3. a) $P(A) = 9 \cdot 27 = 243$

$\uparrow$ Escolher uma sinfonia

$\uparrow$ Escolher um concerto

b) De quantas formas podemos combinar?

$$\underset{\text{Sinfonia}}{\underline{9}} \times \underset{\text{Concerto}}{\underline{27}} \times \underset{\text{Quarteto}}{\underline{15}} = 3645$$

Como toca uma combinação por dia, podemos esperar que uma delas se repita depois de 3645 dias.

4.

a) É mais fácil fazer o complementar. Sendo X = nº de mulheres entre as três primeiras, ao invés de calcular:

$$P(x \geq 1) = P(x=1) + P(x=2) + P(X=3)$$

Podemos fazer

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(X=0)$$

Dito isso, qual a probabilidade de ter 0 mulheres nas 3 primeiras entrevistas?

$$P(x=0) = \frac{N(X=0)}{N} = \frac{\overset{3 H}{\binom{4}{3}}\overset{0 M}{\binom{4}{0}}}{\binom{8}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!}}{\frac{8!}{3!5!}} = 0,0714$$

Logo $P(x \geq 1) = 1 - 0,0714 = \underline{0,9286}$

b) Sendo X = nº de mulheres entre os 5 primeiros

$$P(x=4) = \frac{N(X=4)}{N} = \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{1}}{\binom{8}{5}} = \frac{1 \cdot \frac{4!}{3!1!}}{\frac{8!}{5!3!}} = \underline{0,0714}$$

c) Dada uma forma de combinação, a probabilidade de repetir é:

$$\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} = 0,9999752$$

5.

	C	L
N	0,2	
S		0,1
	0,5	

Preenchendo com os dados faltantes

	C	L
N	0,2	0,4
S	0,3	0,1

a) $P(L) = 0,4 + 0,1 = 0,5$

b) $P(SC) = 0,3$

c) $P(N) = 0,2 + 0,4 = 0,6$

a) $P(A) = 0,106 + 0,191 + 0,2 = 0,497$

$P(C) = 0,215 + 0,2 + 0,065 + 0,02 = 0,5$

$P(A \cap C) = 0,2$

sin tipo A
& grupo 3

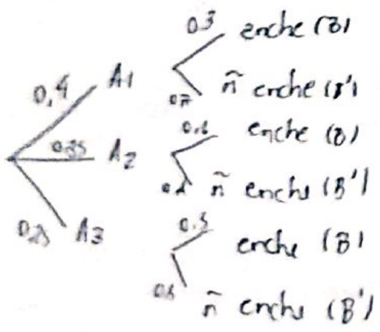
b) $P(A|C) = \dfrac{P(A\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4$

$P(C|A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{0,2}{0,497} = 0,497$

c) $P(1|B') = \dfrac{P(1 \cap B')}{P(B')} = \dfrac{0,082 + 0,106 + 0,004}{1 - 0,008 - 0,018 - 0,065} = \dfrac{0,192}{0,909}$

$P(1|B') = 0,211$

7.



a) $P(A_2 \cap B) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$

b) $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

$P(B) = 0,4 \times 0,3 + 0,35 \times 0,6 + 0,25 \times 0,5$

$P(B) = 0,455$

c) $P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,4 \times 0,3}{0,455} = 0,264$

$P(A_2|B) = \dfrac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,35 \times 0,6}{0,455} = 0,462$

$P(A_3|B) = \dfrac{P(A_3 | B)}{P(B)} = \dfrac{0,5 \times 0,25}{0,455} = 0,275$

8. 500 Média → 200 ☺
300 Mediana → 150 ☺
200 Moda → 160 ☺

ii $P(\text{Satisfeito}) = \dfrac{200+150+160}{100} = 0{,}51$

iii $P(\text{Média} \mid \text{Satisfeito}) = \dfrac{P(\text{Média} \cap \text{Satisfeito})}{P(\text{Satisfeito})} = \dfrac{\frac{200}{1000}}{0{,}51} = 0{,}392$

$P(\text{Mediana} \mid \text{Satisfeito}) = \dfrac{P(\text{Mediana} \cap \text{Satisfeito})}{P(\text{Satisfeito})} = \dfrac{\frac{150}{1000}}{0{,}51} = 0{,}294$

$P(\text{Moda} \mid \text{Satisfeito}) = \dfrac{P(\text{Moda} \cap \text{Satisfeito})}{P(\text{Satisfeito})} = \dfrac{\frac{160}{1000}}{0{,}51} = 0{,}314$

1.

a) i) $P(E_1) = \dfrac{N(E_1)}{N} = \dfrac{5}{36}$

$\hookrightarrow E_1 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

ii) $P(F) = \dfrac{1}{4}$

iii) $P(F \cap E_1) = \dfrac{N(F \cap E_1)}{N} = \dfrac{1}{36}$

$\hookrightarrow$ só $(4,2)$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

$\dfrac{1}{36} \neq \dfrac{5}{36} \cdot \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ A e B não são independentes

b) i) $P(E_2) = \dfrac{N(E_2)}{N} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$\hookrightarrow E_2 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

ii) $P(F \cap E_2) = \dfrac{N(F \cap E_2)}{N} = \dfrac{1}{36}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6}$

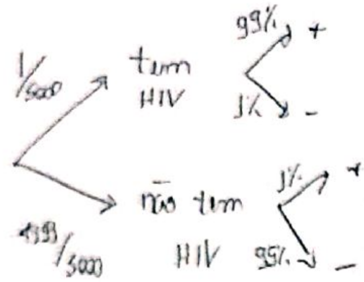
$\Rightarrow$ A e B são independentes

10.

a) $P(\ |HIV) = ?$

Se a pessoa tem HIV, haverá 99% de chance do teste dar certo (+). Logo $\boxed{P(-|HIV) = 0{,}01 = 1\%}$

b) $P(HIV|+) = ?$



i) $P(HIV \cap +) = \frac{1}{5000} \cdot 0{,}99 = 0{,}000198$

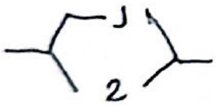
ii) $P(+) = \frac{1}{5000} \cdot 0{,}99 + \frac{4999}{5000} \cdot 0{,}01$

$P(+) = 0{,}010196$

$\Rightarrow P(HIV|+) = \frac{P(HIV \cap +)}{P(+)} = \frac{0{,}000198}{0{,}010196} = 0{,}0194$

11. O sistema funciona se um dos subsistemas funcionar

Subsistema 1



Funciona se 1 ou 2 funciona

$P(1 \cup 2) = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2)$

$P(1 \cup 2) = 0{,}9 + 0{,}9 - \underbrace{0{,}9 \times 0{,}9}_{\text{1 e 2 funcionam independentemente}}$

$P(1 \cup 2) = 0{,}99$

Subsistema 2

—3—4— Funciona se 3 E 4 funcionam

$P(3 \cap 4) = P(3) \times P(4) = 0{,}9^2 = 0{,}81$

↑ independentes

Sistema: funciona se um dos subsistemas funciona

$P(\text{Sub 1} \cup \text{Sub 2}) = P(\text{Sub 1}) + P(\text{Sub 2}) - P(\text{Sub 1} \cap \text{Sub 2})$

$P(\text{Sub 1} \cup \text{Sub 2}) = 0{,}99 + 0{,}81 - 0{,}99 \times 0{,}81$

↑ independentes

$\boxed{P(\text{Sub 1} \cup \text{Sub 2}) = 0{,}9981}$

12.

a)

12% → tem Diabete (A) → detecta em ambos (B) ⇒ ocorre em 0,8 × 0,7

88% → Saudável (A') → detecta em ambos (B) → ocorre em 0,1 × 0,05

$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$

$P(B) = 0{,}12 \times (0{,}8 \times 0{,}7) + 0{,}88 \times (0{,}1 \times 0{,}05)$

$P(B) = 0{,}0716$

b) Sendo A = { pelo menos um detecta em algum teste }, é mais fácil ver seu complementar A' = { nenhum dos dois detecta em ambos testes }.

$P(A) = 1 - P(A')$

$P(A) = 1 - P(1^{\circ} \text{ não identifica}) \times P(2^{\circ} \text{ não identifica})$

$P(A) = 1 - (0{,}2 \times 0{,}3) \times (0{,}2 \times 0{,}3)$

$P(A) = 0{,}9964$