Gabarito

0303200 – Probabilidades | Turma: | Prof: | **Prova SUB**

Nome (completo):	No. USP:

1) A prova tem duração de 100 minutos; não haverá tempo adicional.
2) O aluno deve comprovar sua identidade com documento oficial.
3) Alunos só podem sair da sala de prova 60 minutos após o início da prova.
4) Não é permitido o uso de calculadoras.
5) Não é permitido o uso de telefones celulares ou equipamentos móveis similares. Esses equipamentos devem ser colocados na frente da sala.
6) Se necessário, consulte o formulário e a tabela da distribuição normal em anexo.
7) Responda as questões em papel almaço.

1) Uma variável aleatória discreta tem distribuição de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{c}{x}, \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5,$$

sendo c uma constante. $\mathbb{P}(X = x)$ é nula para todos os outros valores de x. Pede-se:
a) O valor de c.
b) A esperança de X.
c) $\mathbb{P}(X > 1)$ e $\mathbb{P}(2 < X \leq 4)$.
d) Considere uma variável binomial Y com parâmetros $n = 4$, $p = 1/2$, independente de X. Obtenha a covariância de X e Y.
e) Considere uma variável Z que tem sua distribuição condicional dado X, ou seja, $\mathbb{P}(Z = z|X = x)$, definida como uma distribuição Poisson com parâmetro X. Obtenha a esperança de Z.

2) As variáveis aleatórias X e Y têm densidade conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Calcule a probabilidade de $X < Y^2$.
b) Calcule a densidade marginal de X.
c) X e Y são independentes? Justifique.
d) Suponha que você saiba agora que ocorreu o evento $A = \{X = 0,5\}$. Qual é a probabilidade de $B = \{Y \geq 0,5\}$ dado A?

3) Considere três lotes de 20 peças cada. O número de peças dentro do padrão no primeiro, segundo e terceiro lotes são, respectivamente, 20, 15 e 10. De um lote escolhido ao acaso, retira-se uma peça aleatoriamente e verifica-se que está dentro do padrão. Devolve-se a peça ao lote e efetua-se uma nova retirada do mesmo lote e verifica-se que a segunda peça também está dentro do padrão.
a) Qual a probabilidade das duas peças retiradas estarem dentro do padrão?
b) Qual a probabilidade das peças terem sido retiradas do terceiro lote?

4) Uma construtora sabe que os pilares de uma ponte tem resistência à carga de compressão, depois de terminados, de 1800 kg com desvio padrão de 300kg. A carga a que eles são submetidos varia com o tráfego e tem distribuição normal de média 1400 kg e desvio padrão de 400 kg.
a) Qual a probabilidade de um pilar se romper por excesso de carga?
b) Qual a carga máxima que deveria ser admitida por pilar para que a probabilidade de ruptura seja no máximo 0,03?

PSUB - Gabarito

1 **a** $\sum_{x=1}^{5} P(X=x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c + \frac{c}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{4} + \frac{c}{5} = 1 \Rightarrow \frac{(60+30+20+15+12)}{60} c = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{60}{137}}$$

0,5

b $$E[X] = \sum_{x=1}^{5} x\, P(X=x) = c + 2 \cdot \frac{c}{2} + 3\frac{c}{3} + 4\frac{c}{4} + 5\frac{c}{5} =$$

$$= 5c = \frac{300}{137} \Rightarrow \boxed{E[X] = \frac{300}{137}}$$

0,5

c $$P(X>1) = 1 - P(X=1) = 1 - c = \frac{77}{137}$$

0,2

$$P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{c}{3} + \frac{c}{4} = \frac{7c}{12} = 7 \cdot \frac{\cancel{60}^{5}}{137 \cdot \cancel{12}}$$

$$= \frac{35}{137}$$

0,3

(d) Como X e Y são independentes, $\boxed{cov(X,Y)=0}$

0,5

(e) $E[Z] = \sum_z z\, P[Z=z] =$

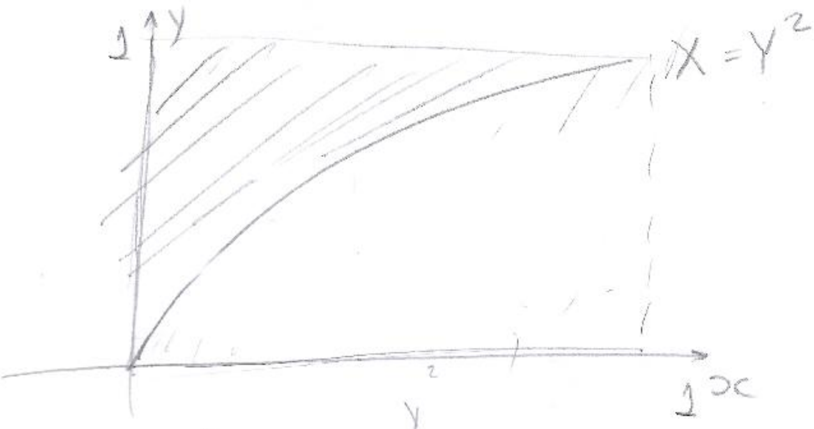
Poisson com par x $\qquad \frac{P[Z\cap X]}{P[X]}$

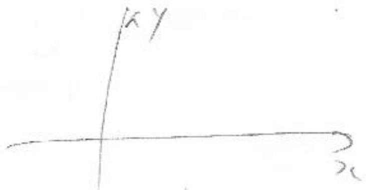
$$= \sum_z z \sum_x P[Z=z \mid X=x] \cdot P[X=x]$$

$$\sum_x x\, P[X=x] = \frac{300}{137}$$

0,5

(2) (a)





$$P[X<Y^2] = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)\, dy\, dx = \int_0^1 xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{\sqrt{x}}^1 dx =$$

0,5

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x^{3/2} - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(-x^{3/2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx =$$

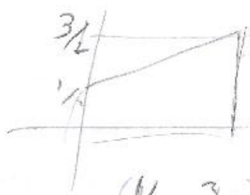
$$= \left[-\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-8+5+10}{20} = \frac{7}{20}$$

0,5

(b) $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}$

$$\boxed{f_X(x) = x + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1}$$

0,5



$\frac{(1/2 + 3/2) \cdot 1}{2}$ $3/4$

(c) $f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + yx\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + y, \quad 0 \leq y \leq 1$

Note que $\boxed{f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)}$.

Assim, X e Y não são independentes.

0,5

(d) $P(Y \geq 0.5 \mid X = 0.5)$

$f_{Y|X}(y \mid x = 0.5) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{y + 0.5}{1} = y + 1/2$

0,2

$P(Y \geq 0.5 \mid X \geq 0.5) = \int_{0.5}^1 y + 1/2 \, dy = \frac{y^2}{2} + y/2 \Big|_{0.5}^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} -$

$- 1/8 - 1/4 = 1 - 1/8 - 1/4 = \frac{8 - 1 - 2}{8} = 5/8$

0,3

3

a $P(P_1) = 1$

$P(P_2) = 3/4$

$P(P_3) = 1/2$

$$P = \frac{1}{3}\left[P(P_1)^2\right] + \frac{1}{3}P^2(P_2) + \frac{1}{3}P^2(P_3) =$$

0,5

$$= \frac{1 + 9/16 + 1/4}{3} = \frac{\frac{16+9+4}{16}}{3} = \frac{29}{48}$$

$\frac{16}{3}$ 8

1,0

b $P(P \mid 3°\text{Lote}) = 1/4$

$P(P \mid 2°\text{Lote}) = 9/16$

$P(P \mid 1°\text{Lote}) = 1$

$$P(3°\text{Lote} \mid P) = \frac{P(P \mid 3°\text{Lote}) \cdot P(3°\text{Lote})}{P(P)} =$$

0,5

$$= \frac{1/4 \cdot 1/3}{29/48} = \frac{1}{12} \cdot \frac{48}{29} = 4/29$$

0,5

4. $R \sim N(1800, 300^2)$

$C \sim N(1400, 400^2)$

a) $P(C > R) = P(C - R > 0)$

$C - R \sim N(-400, (300)^2 + (400)^2)$

0,5

$P(C-R>0) = 1 - F_{C-R}(0) = 1 - F_Z\left(\frac{0+400}{500}\right)$

$= 1 - F_Z(0.8) = 1 - [0{,}2881 + 0{,}5] = 0{,}2119$

1,0

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 564 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}0000 \\ 0{,}7881 \\ \hline 2119 \end{array}$$

b) $P(R < C_{max}) = 0{,}03 \Rightarrow F_R(C_{max}) = 0{,}03 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_Z\left(\frac{C_{max} - 1800}{300}\right) = 0{,}03 \Rightarrow \frac{C_{max} - 1800}{300} = -1{,}88$

0,5

$$\begin{array}{r} 1{,}88 \\ 300 \\ \hline 6400 \end{array}$$

$\Rightarrow C_{max} = 1800 - 1{,}88 \cdot 300$

$= 1236 \text{ kg}$

0,5