Resolução P3 probabilidade 2015

(1) Seja X a variável aleatória que denota o número de alunos que concluem o curso. X segue uma distribuição binomial com $n = 450$ e $p = \frac{1}{3}$. Logo, o valor esperado é $\mu = np = 150$, e o desvio padrão é $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 10$.

Aproximando esta binomial pela normal, temos:

$$P(X \geq 160) = P\left(Z \geq \frac{160-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{160-150}{10}\right) = P(Z \geq 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = \boxed{0{,}1587}$$

• Com correção de continuidade:

$$P(X \geq 160) = P\left(Z \geq \frac{160+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \geq 1{,}05) = 1 - P(Z \leq 1{,}05) = 1 - \Phi(1{,}05) = \boxed{0{,}1469}$$

(2) Seja X o número de quilômetros que o carro pode rodar.

a) O valor esperado é 10000 Km. Portanto, $\frac{1}{\lambda} = 10000 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10000}$

Como a distribuição exponencial não possui memória, utilizando a F.D.A., temos: $P(X \leq 5000) = 1 - e^{-\frac{1}{10000}\cdot 5000} = \boxed{1 - e^{-1/2}}$

b) Novamente utilizando a F.D.A., temos $P(X \leq 3000) = 1 - e^{-\frac{1}{10000}\cdot 3000} = 1 - e^{-\frac{3}{10}}$

Como a distribuição é uniforme para o intervalo $[3000; 7000]$, temos que:

$$\int_{3000}^{5000} \frac{1}{7000-3000}\,dx = \frac{1}{4000}\cdot x \Big|_{3000}^{5000} = \frac{2000}{4000} = \frac{1}{2}$$

Logo, a probabilidade pedida é: $\left(1 - e^{-\frac{3}{10}}\right) + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{1}{e^{3/10}}} \approx 0{,}75$

(3) $\mu = 40$ horas ; $\sigma = 10$ horas ; $n = 25$ equipamentos

b) Se T é a variável aleatória do tempo de vida do equipamento e X é a variável aleatória que representa o número de equipamentos, pelo teorema central do limite, teremos:

$$P(T > 1100) = P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 1100\right) = P\left(Z \geq \frac{1100 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1100 - 25.40}{\sqrt{25.100}}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= 1 - \Phi(2) = \boxed{0{,}0228}$$

③ a) A probabilidade de os dois primeiros equipamentos durarem menos que 20 horas é $1 - 0{,}0228^2$, e a receita esperada é, portanto, $\boxed{500\,(1-0{,}0228^2)}$

---

④ X: número de vendas em uma semana → X assume valores entre 0 e 3
Y: compradores que solicitaram blindagem → Y assume valores entre 0 e 3

a) A probabilidade de uma pessoa comprar blindagem, dado que ela pertence ao grupo de pessoas que comprou automóvel, é 0,6. Logo, a probabilidade de uma pessoa <u>não</u> comprar blindagem, dado que ela pertence a esse grupo, é 0,4.

É impossível haver mais compradores de blindagem do que compradores de automóveis, então:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X=0, Y=1)=0 \\ P(X=0, Y=2)=0 \\ P(X=0, Y=3)=0 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} P(X=1, Y=2)=0 \\ P(X=1, Y=3)=0 \end{array}} \quad \boxed{P(X=2, Y=3)=0}$$

Como $P(X=0) = 0{,}25$ e $P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=3)$,
concluímos que $\boxed{P(X=0, Y=0) = 0{,}25}$

Sabemos também que $P(Y=y \mid X=x) = \dfrac{P(Y=y, X=x)}{P(X=x)}$ e que

$P(Y=1 \mid X=1) = 0{,}6$, portanto:

$$P(Y=1 \mid X=1) = \frac{P(Y=1, X=1)}{P(X=1)} \Rightarrow P(Y=1, X=1) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(Y=1, X=1) = 0{,}15}$$

Analogamente, $P(Y=2, X=2) = 0{,}6^2 \cdot 0{,}25 \Rightarrow \boxed{P(Y=2, X=2) = 0{,}09}$

$P(Y=3, X=3) = 0{,}6^3 \cdot 0{,}25 \Rightarrow \boxed{P(Y=3, X=3) = 0{,}054}$

Como a probabilidade de <u>não</u> comprar blindagem, dado que se pertence ao grupo de pessoas que comprou automóvel, é 0,4, teremos também:

$$P(X=1, Y=0) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 \Rightarrow \boxed{P(X=1, Y=0) = 0{,}1}$$

$$P(X=2, Y=0) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}25 \Rightarrow \boxed{P(X=2, Y=0) = 0{,}04}$$

$$P(X=3, Y=0) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}25 \Rightarrow \boxed{P(X=3, Y=0) = 0{,}016}$$

Por fim, $P(X=2, Y=1) = 2(0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}25) \Rightarrow \boxed{P(X=2, Y=1) = 0{,}12}$

$P(X=3, Y=1) = 3(0{,}4^2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}25) \Rightarrow \boxed{P(X=3, Y=1) = 0{,}072}$

$P(X=3, Y=2) = 3(0{,}4 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}25) \Rightarrow \boxed{P(X=3, Y=2) = 0{,}108}$

Montando uma tabela:

X \ Y	0	1	2	3	P(X=x)
0	0,25	0	0	0	0,25
1	0,1	0,15	0	0	0,25
2	0,04	0,12	0,09	0	0,25
3	0,016	0,072	0,108	0,054	0,25
P(Y=y)	0,406	0,342	0,198	0,054	1

b) $P(X>Y) = P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=1) + P(X=2, Y=0) +$

$+ P(X=3, Y=2) + P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=0) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(X>Y) = 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}04 + 0{,}108 + 0{,}072 + 0{,}016 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P(X>Y) = 0{,}456}$

c) Olhando a tabela,

$P(Y=0) = 0{,}406$
$P(Y=1) = 0{,}342$
$P(Y=2) = 0{,}198$
$P(Y=3) = 0{,}054$

5 a) Seja X o número de bactérias

Se a concentração esperada é 1 em 20cc de água, para 10cc de água teremos uma concentração esperada de $1/2$ e, portanto, $\lambda = \frac{1}{2}$

Logo: $P(X=2) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-1/2}}{2!} \Rightarrow \boxed{P(X=2) = \frac{e^{-1/2}}{8}}$

b) Nesse caso, $\lambda = \frac{1}{2}$ para o Rio Santa Genoveva e $\lambda = 3$ para o Rio São Severino.

Temos três possibilidades:

1) encontrar 2 bactérias na água do Rio Santa Genoveva e nenhuma na água do Rio São Severino:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-1/2}}{2!} \cdot \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} = \frac{1}{8} e^{-7/2}$$

2) encontrar 1 bactéria em cada rio:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot e^{-1/2}}{1!} \cdot \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = \frac{3}{2} e^{-7/2}$$

3) encontrar 2 bactérias na água do Rio São Severino e nenhuma na água do Rio Santa Genoveva:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot e^{-1/2}}{0!} \cdot \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} = \frac{9}{2} e^{-7/2}$$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$\frac{1}{8} e^{-7/2} + \frac{3}{2} e^{-7/2} + \frac{9}{2} e^{-7/2} = \boxed{\frac{49}{8} e^{-7/2}} = 6{,}125 e^{-3{,}5}$$