Questão 1 (2,5)

Historicamente sabe-se que 10% dos artigos de uma firma são de segunda qualidade. Um inspetor de controle de qualidade da firma examina os artigos de um lote classificando-os como de primeira qualidade ou de segunda qualidade. Este profissional pode cometer erros de classificação. A chance de classificar um artigo de primeira categoria como sendo de segunda é de 0,3. A probabilidade de que classifique um artigo de segunda categoria como sendo de primeira é de 0,4.

a) **(1,0)** Se um artigo foi classificado como de primeira qualidade, qual a probabilidade de que a classificação esteja incorreta?

b) **(1,5)** Considere que se um produto é classificado incorretamente, a probabilidade de que o gerente de qualidade identifique o erro do inspetor seja de 15%. Uma vez identificado o erro a probabilidade do gerente encaminhar o inspetor para um programa de treinamento é de 25%. Se o erro não for identificado, esta probabilidade é de 17%. Finalmente, o inspetor não é encaminhado para treinamento se não houve erro de classificação. Qual a probabilidade de que o inspetor seja encaminhado para o treinamento?

I → primeira qualidade $P(I) = 0,90$

II → segunda qualidade $P(II) = 0,10$

CI → classificado como primeira qualidade

CII → classificado como segunda qualidade

$P(CI|II) = 0,4$ $P(CII|II) = 0,6$

$P(CI|I) = 0,7$ $P(CII|I) = 0,3$

a) $$P(II|CI) = \frac{P(CI|II)P(II)}{P(CI)} \quad \text{(Bayes)}$$

$$P(CI) = P(CI|I)P(I) + P(CI|II)P(II) \quad \text{(P. Total)}$$

$$= 0,7 \times 0,9 + 0,4 \times 0,1 = 0,67$$

$$P(II|CI) = \frac{0,4 \times 0,1}{0,67} = 0,06$$

AX6B87V1

b) E → produto classificado incorretamente

$$P(E) = P(CI \mid II)\,P(II) + P(CII \mid I)\,P(I)$$

$$= 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}31$$

EI → erro identificado → $P(EI \mid E) = 0{,}15$

$P(\overline{EI} \mid E) = 0{,}85$

T → inspetor vai a treinamento

$$P(T \mid EI \cap E) = 0{,}25$$

$$P(T \mid \overline{EI} \cap E) = 0{,}17$$

$$P(T \mid \overline{E}) = 0$$

$$P(T \mid E) = P(T \mid EI \cap E) . P(EI \mid E) + P(T \mid \overline{EI} \cap E) . P(\overline{EI} \mid E)$$

$$= 0{,}25 \times 0{,}15 + 0{,}17 \times 0{,}85 = 0{,}1820$$

$$P(T) = P(T \mid E)\,P(E) + \underbrace{P(T \mid \overline{E})}_{0} . P(\overline{E})$$

$$= 0{,}1820 \times 0{,}31 = 0{,}0564.$$

Questão 2 (valor 2,5)

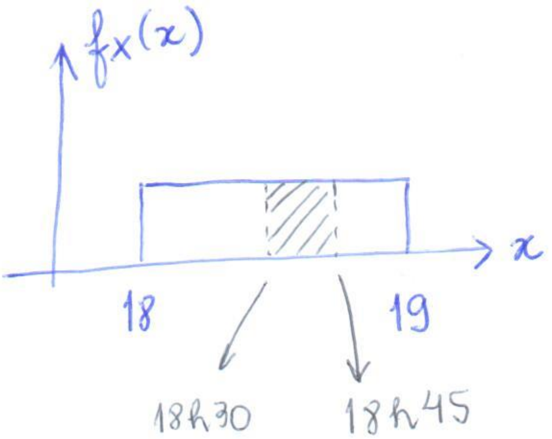
Milton e Victor combinam de se encontrar entre 18 e 19 horas para jantar em um restaurante italiano. Sejam X = hora de chegada de Victor e Y = hora de chegada de Milton. Suponha que X e Y sejam independentes com distribuição uniforme no intervalo [18;19].

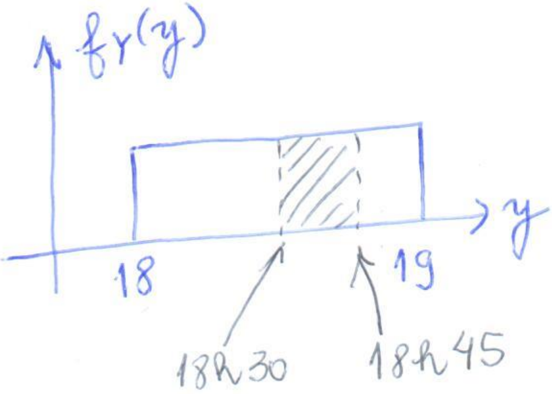
a) **(0,5)** Determine a probabilidade de que ambos cheguem entre 18:30 e 18:45.

b) **(1,0)** Imagine agora que 10 alunos marquem de jantar neste restaurante e que a hora da chegada seja independente. Assuma ainda que a hora de chegada de cada um tenha distribuição uniforme no intervalo [18;19]. Qual a probabilidade de que exatamente 2 alunos cheguem antes das 18:30? (dê um número e não uma fórmula!)

c) **(1,0)** Qual a probabilidade de que Milton e Victor cheguem antes das 18:45 e apenas três dos oito alunos restantes cheguem após 18:45?

a)





$$P(18h30 < X < 18h45) = P(18h30 < Y < 18h45) = \frac{1}{4}$$

$$P((18h30 < X < 18h45) \cap (18h30 < Y < 18h45)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

b) $n = 10$ alunos $\quad X_i$ (uniforme $[18;19]$) $i = 1, 2, \dots, 10$

$$P(X_i < 18h30) = \frac{1}{2}$$

A → aluno chega antes das 18h30

$$P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

$$\underset{1}{\underline{A}}\ \underset{2}{\underline{A}}\ \underset{3}{\underline{\bar{A}}}\ \underset{4}{\underline{\bar{A}}}\ \underset{5}{\underline{\bar{A}}}\ \underset{6}{\underline{\bar{A}}}\ \underset{7}{\underline{\bar{A}}}\ \underset{8}{\underline{\bar{A}}}\ \underset{9}{\underline{\bar{A}}}\ \underset{10}{\underline{\bar{A}}}$$

$$P(\text{sequência}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{2^{10}}$$

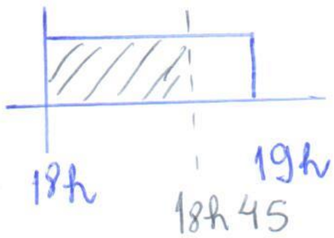
O número de sequências que atende ao solicitado é

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}\,\cancel{2} \cdot 1} = 45$$

P(de exatamente 2 alunos cheguem antes das 18h30) =

$$= 45 \times \frac{1}{2^{10}} = \binom{10}{2} \frac{1}{2^{10}} = 0{,}0439$$

c) A → Vitor e Milton chegam antes das 18h45



$$P(A) = P(\text{Vitor} \cap \text{Milton}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Sobram 8 alunos dos quais 3 chegam depois das 18h45

D → aluno chega depois das 18h45

$$P.(\text{sequência}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

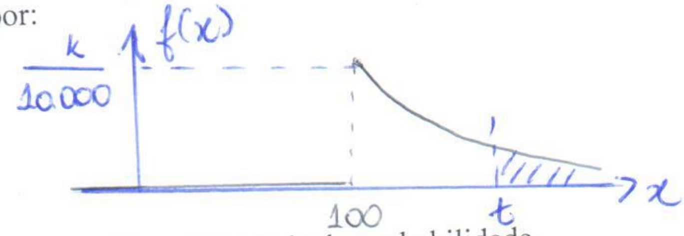
$$\underset{1}{\underline{D}}\ \underset{2}{\underline{D}}\ \underset{3}{\underline{D}}\ \underset{4}{\underline{\bar{D}}}\ \underset{5}{\underline{\bar{D}}}\ \underset{6}{\underline{\bar{D}}}\ \underset{7}{\underline{\bar{D}}}\ \underset{8}{\underline{D}}$$

Há $\binom{8}{3}$ sequências possíveis, então $P(DDD) = \binom{8}{3} \frac{3^5}{4^8}$

$$P((DDD) \cap A) = \binom{8}{3} \frac{3^5}{4^8} \cdot \frac{9}{16} = \frac{8!}{5!\,3!} \frac{3^5}{4^8} \frac{9}{16} = 0{,}1168$$

Questão 3 (valor 2,5)

O tempo de vida, em horas, de um chip de um computador é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & x > 100 \\ 0 & x \le 100 \end{cases}$$

a) **(0,5)** Encontre k de forma que f(x) seja uma função densidade de probabilidade.

b) **(1,0)** Qual a probabilidade de um chip durar mais que t horas?

c) **(1,0)** Qual a probabilidade de exatamente dois de cinco chips do aparelho tenham que ser trocadas nas primeiras 150 horas de operação? Suponha que os eventos em que o chip i tem que ser substituído dentro desse intervalo sejam mutuamente independentes.

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 = \int_{100}^{\infty} \frac{k}{x^2}\,dx = -\frac{k}{x}\Big|_{100}^{\infty} = \frac{k}{100} = 1$$

$$\boxed{k = 100}$$

b) T → vida do chip, variável aleatória

t → valor da vida do chip

$$P(T > t) = 1 - \int_{100}^{t} \frac{100}{x^2}\,dx = \int_{t}^{\infty} \frac{100}{x^2}\,dx = \frac{100}{t},\ t > 100$$

$P(T > t) = 1,\ t \le 100$

c) D → chip com defeito nas primeiras 150 horas

$$P(D) = 1 - P(T > 150) = 1 - \frac{100}{150} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

$\underset{1}{D}\ \underset{2}{D}\ \underset{3}{\bar{D}}\ \underset{4}{\bar{D}}\ \underset{5}{\bar{D}}$ $\qquad P(\text{seq.}) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^5}$

são $\binom{5}{2}$ sequências então

AX6B87V2

$$P\left(\text{exatamente 2 de 5 chips tenham de ser trocados nas 150 primeiras horas}\right) = \binom{5}{2}\frac{2^3}{3^5}$$

$$= \binom{5}{2} \frac{2^3}{3^5} = 10 \, \frac{8}{243} = \frac{80}{243} = 0{,}32922$$

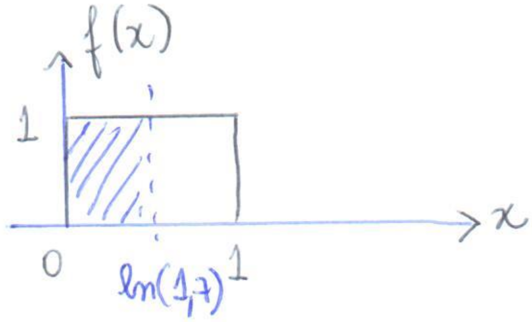
Questão 5 (2,5)

A função densidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Considere Y= e^X .

a) **(0,5)** Calcule $P(e^X \le 1{,}7)$.
b) **(1,0)** Determine a função densidade acumulada de Y.
c) **(1,0)** Determine a função densidade de probabilidade de Y.



$Y = e^x$

a) $P(Y \le 1{,}7) = F_Y(1{,}7) = P(e^X \le 1{,}7)$

$= P(X \le \ln(1{,}7)) = \ln(1{,}7)$

b) Se $a \le 0$

$F_Y(a) = P(Y \le a) = P(e^X \le a) = 0$

Se $0 < a < 1$

$F_Y(a) = P(Y \le a) = P(e^X \le a) = P(X \le \ln(a)) = 0$

Se $1 \le a \le e$

$F_Y(a) = P(Y \le a) = P(e^X \le a) = P(X \le \ln(a)) = \ln(a)$

Se $a > e$

$F_Y(a) = P(Y \le a) = P(e^X \le a) = P(X \le \ln(a)) = 1$

AX6B87V2

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ 0 & , \quad 0 < y < 1 \\ \ln(y) & ; \quad 1 \leq y \leq e \\ 1 & ; \quad y > e \end{cases}$$

c) derivando

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & , \text{ se } 1 \leq y \leq e \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$