Prof. Dr. Eduardo A. Tannuri

Lista de Exercícios – Sistemas Dinâmicos PMR3302

1) (Dorf & Bishop)

■ Example 2.10 Mechanical accelerometer

A mechanical accelerometer is used to measure the acceleration of a levitated test sled, as shown in Fig. 2.36. The test sled is magnetically levitated above a guide rail a small distance δ. The accelerometer provides a measurement of the accel-

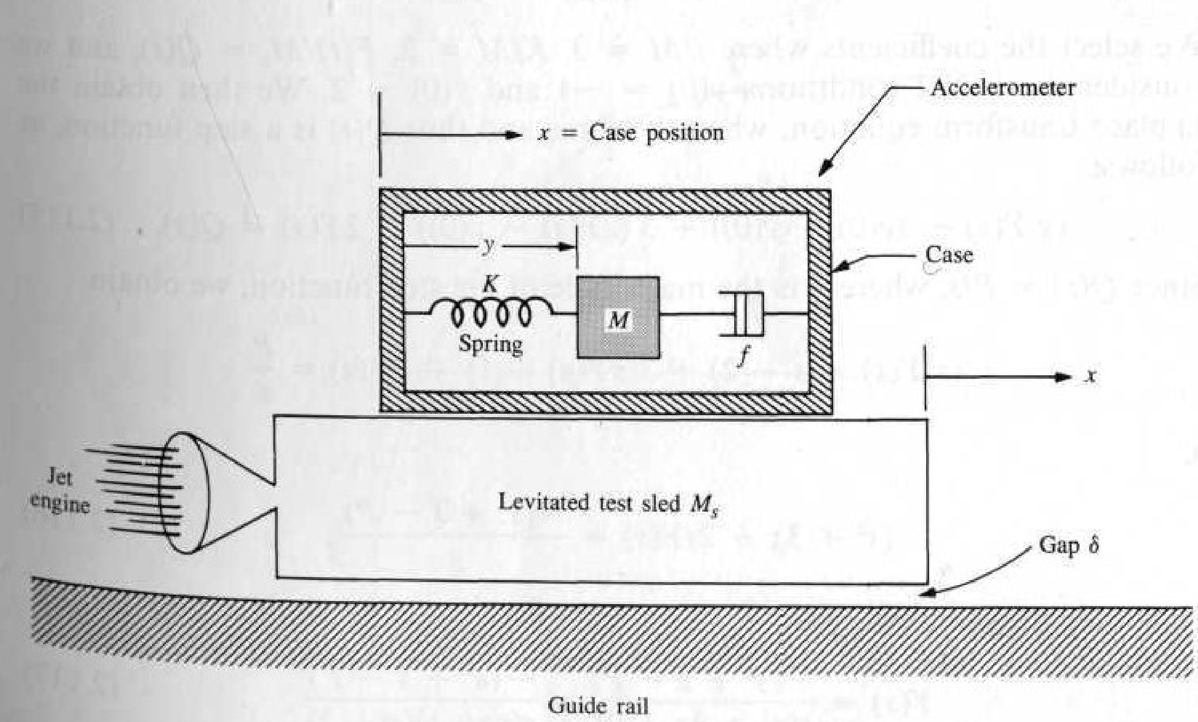


Figure 2.36. An accelerometer mounted on a jet engine test sled.

Sugestão de Solução:

eration $a(t)$ of the sled since the position y of the mass M, with respect to the accelerometer case, is proportional to the acceleration of the case (and the sled). The goal is to design an accelerometer with an appropriate dynamic responsiveness. We wish to design an accelerometer with an acceptable time for the desired measurement characteristic, $y(t) = qa(t)$, to be attained (q is a constant).

The sum of the forces acting on the mass is

$$-f\frac{dy}{dt} - Ky = M\frac{d^2}{dt^2}(y - x)$$

or

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + Ky = M\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.113}$$

Since

$$M_s\frac{d^2x}{dt^2} = F(t),$$

the engine force, we have

$$M\ddot{y} + f\dot{y} + Ky = \frac{M}{M_s}F(t)$$

or

$$\ddot{y} + \frac{f}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = \frac{F(t)}{M_s}. \tag{2.114}$$

We select the coefficients where $f/M = 3$, $K/M = 2$, $F(t)/M_s = Q(t)$, and we consider the initial conditions $y(0) = -1$ and $\dot{y}(0) = 2$. We then obtain the Laplace transform equation, when the force and thus $Q(t)$ is a step function, as follows:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 3\,(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = Q(s). \tag{2.115}$$

Since $Q(s) = P/s$, where P is the magnitude of the step function, we obtain

$$(s^2Y(s) + s - 2) + 3(sY(s) + 1) + 2Y(s) = \frac{P}{s}$$

or

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{-(s^2 + s - P)}{s}. \tag{2.116}$$

Thus the output transform is

$$Y(s) = \frac{-(s^2 + s - P)}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-(s^2 + s - P)}{s(s + 1)(s + 2)}. \tag{2.117}$$

Expanding in partial fraction form,

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}. \qquad (2.118)$$

We then have

$$k_1 = \frac{-(s^2 + s - P)}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=0} = \frac{P}{2}. \qquad (2.119)$$

Similarly, $k_2 = -P$ and $k_3 = \dfrac{P-2}{2}$.

Thus

$$Y(s) = \frac{P}{2s} - \frac{P}{s+1} + \frac{(P-2)}{2(s+2)}. \qquad (2.220)$$

Therefore the output measurement is

$$y(t) = ½\,[P - 2Pe^{-t} + (P-2)e^{-2t}]\,,\ t \geq 0$$

A plot of $y(t)$ is shown in Fig. 2.37 for $P = 3$. We can see that $y(t)$ is proportional to the magnitude of the force, and thus the acceleration, after four seconds. If this period is excessively long, we must increase the spring constant, K, and the friction, f, while reducing the mass, M. If we are able to select the components so that $f/M = 12$ and $K/M = 32$, the accelerometer will attain the proportional response in one second. (It is left to the reader to show this.)

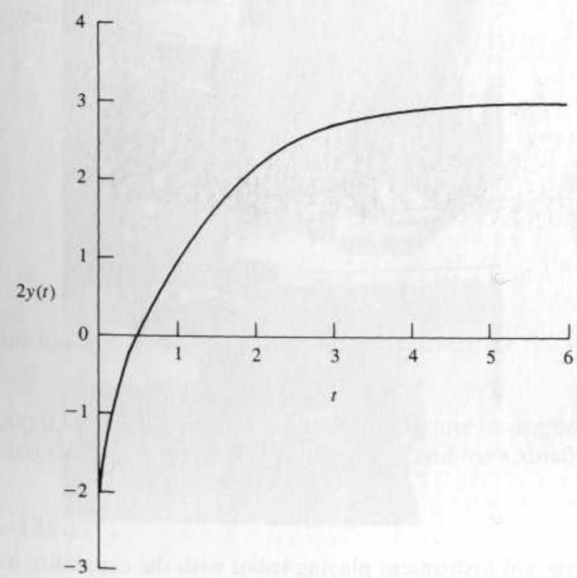


Figure 2.37. Accelerometer response.

2) (Dorf & Bishop)

P2.29. We desire to balance a rolling ball on a tilting beam as shown in Fig. P2.29. We will assume the motor input current i controls the torque with negligible friction. Assume the beam may be balanced near the horizontal ($\phi = 0$); therefore we have a small deviation of ϕ. Find the transfer function $X(s)/I(s)$ and draw a block diagram illustrating the transfer function showing $\phi(s)$, $X(s)$ and $I(s)$.

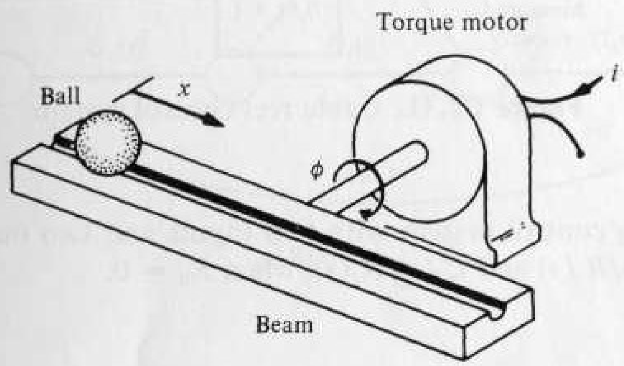


Figure P2.29. Tilting beam and ball.

Sugestão de Solução:

P2.29 Assume the motor torque is proportional to the input current

$$T_m = ki \ .$$

Then, the equation of motion of the beam is

$$J\ddot{\phi} = ki \ ,$$

where J is the moment of inertia of the beam and shaft (neglecting the inertia of the ball). We assume that forces acting on the ball are due to gravity and friction. Hence, the motion of the ball is described by

$$m\ddot{x} = mg\phi - b\dot{x}$$

where m is the mass of the ball, b is the coefficient of friction, and we have assumed small angles, so that $\sin\phi \approx \phi$. Taking the Laplace transfor of both equations of motion and solving for $X(s)$ yields

$$X(s)/I(s) = \frac{gk/J}{s^2(s^2 + b/m)} \ .$$

3) (Dorf & Bishop)

P2.43. In many applications, such as reading product codes in supermarkets and in printing and manufacturing, an optical scanner is utilized to read codes, as shown in Fig. P2.43. As the mirror rotates, a friction force is developed that is proportional to its angular speed. The friction constant is equal to 0.05 $N \cdot s$/rad, and the moment of inertia is equal to 0.1 kg-m^2. The output variable is the velocity, $\omega(t)$. (a) Obtain the differential equation for the motor. (b) Find the response of the system when the input motor torque is a unit step and the initial velocity at $t = 0$ is equal to 1.

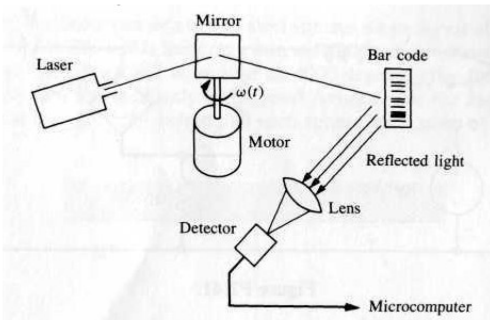


Figure P2.43. Optical scanner.

Sugestão de Solução:

P2.43 (a) The equation of motion of the motor is

$$J\frac{d\omega}{dt} = T_m - b\omega \ ,$$

where $J = 0.1$, $b = 0.06$, and T_m is the motor input torque.

(b) Given $T_m(s) = 1/s$, and $\omega(0) = 0.7$, we take the Laplace transform of the equation of motion yielding

$$s\omega(s) - \omega(0) + 0.6\omega(s) = 10T_m$$

or

$$\omega(s) = \frac{0.7s + 10}{s(s + 0.6)} \ .$$

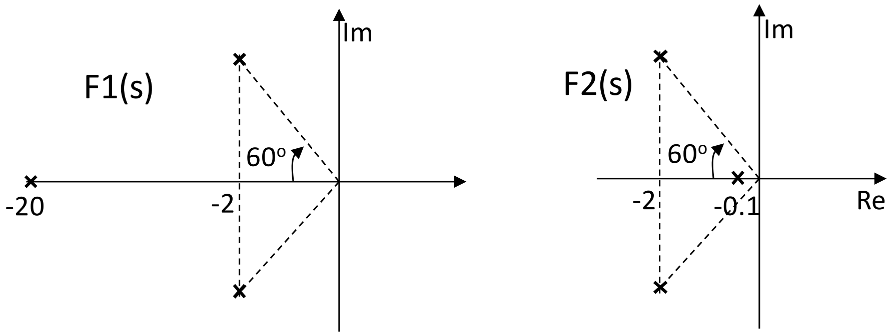
Then, computing the partial fraction expansion, we find that

$$\omega(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 0.6} = \frac{16.67}{s} - \frac{15.97}{s + 0.6} \ .$$

The step response, determined by taking the inverse Laplace transform, is

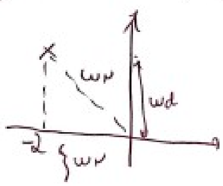
$$\omega(t) = 16.67 - 15.97e^{-0.6t} \ , \quad t \geq 0 \ .$$

4) Esboce e justifique a Sugestão de Solução temporal a degrau unitário dos sistemas F1 e F2 com polos abaixo, sabendo-se que estes sistemas possuem ganho unitário. Indique no gráfico o valor máximo da Sugestão de Solução, tempos característicos, valor em regime, e outras grandezas que achar pertinente.



Sugestão de Solução:

Q1) a) Polo em -20 é não dominante e sua influência pode ser desprezada.



$\cos 60^\circ = \zeta \Rightarrow \zeta = 0{,}5$

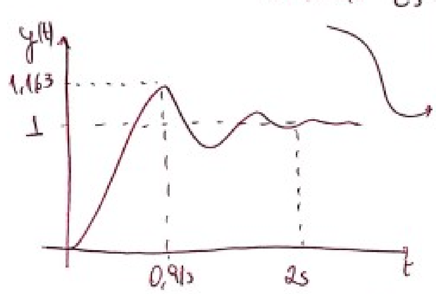
$\omega_n = 4$

$\Rightarrow F_1(s) \cong \dfrac{16}{s^2+4s+16}$

$M_p = \exp\left(\dfrac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = 16{,}3\%$

$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0{,}91\,s$

$t_s^{2\%} = \dfrac{4}{\zeta\omega_n} = \dfrac{4}{2} = 2s$

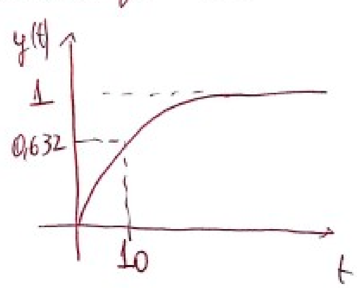


Sist. 2ª ordem subamortecido

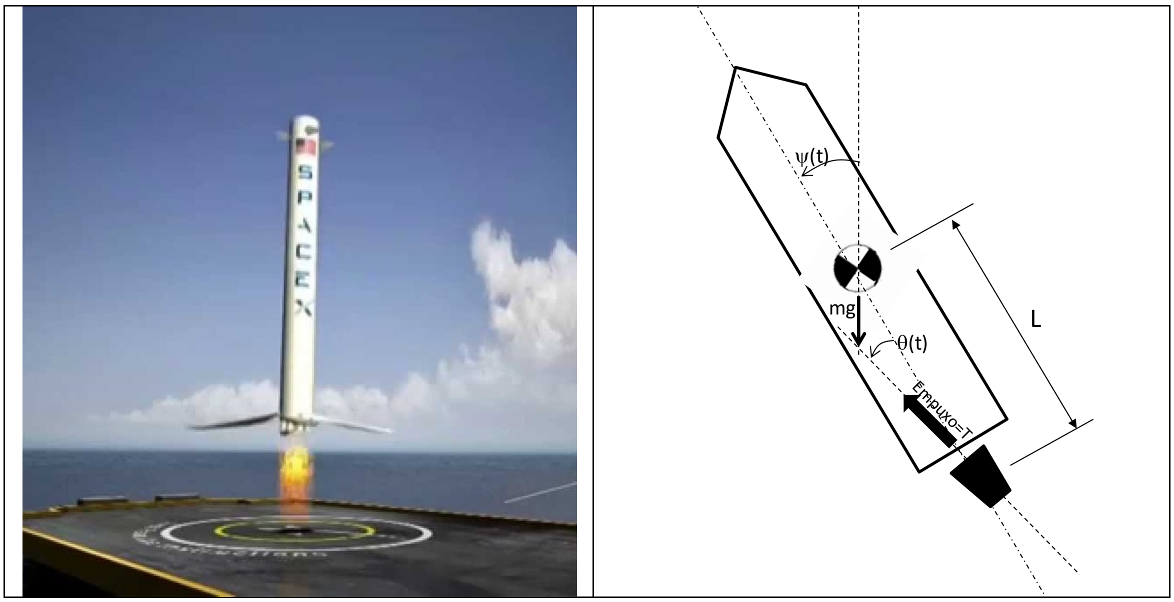
b) Polos complexos conjugados distantes mais de 5τ em relação ao eixo imaginário comparado ao polo real

$\Rightarrow F_2 \cong \dfrac{1}{10s+1}$

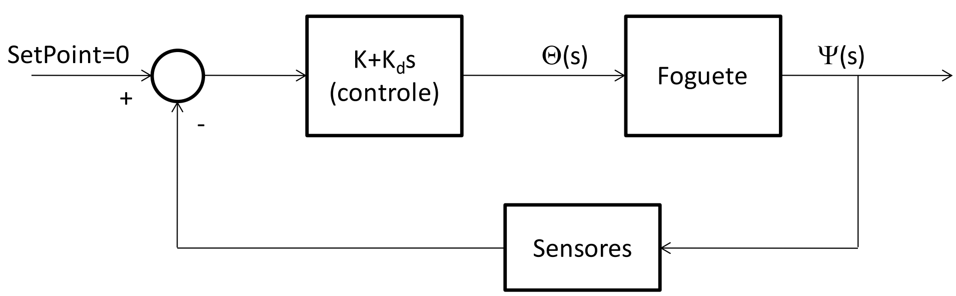
(Sist 1ª ordem)



5) O problema de pouso de um foguete na vertical pode ser descrito de forma simplificada pela figura abaixo. O propulsor gera um empuxo T na direção $\theta(t)$ em relação ao eixo do foguete. O ângulo $\theta(t)$ é controlado. A atitude do foguete em relação à vertical é dada por $\psi(t)$, e deve ser mantida próximo de zero para evitar o tombamento. Na fase final de aproximação, o Empuxo T(t) é aproximadamente igual ao peso do foguete (T=mg). O momento de inércia de rotação no eixo perpendicular ao desenho é dado por J, e a distância entre o ponto de aplicação do empuxo e o centro de gravidade é dado por L.



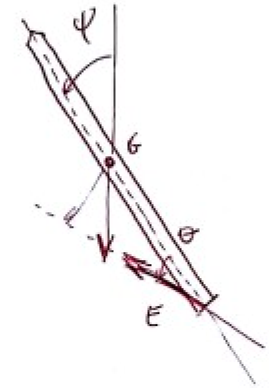
1) Obtenha a função de transferência $\Psi(s)/\Theta(s)$ para pequenos ângulos, dados: L=35m; m = 500kg ; $J = 2.10^5$ kg.m^2
2) Foi implementado um controle em malha fechada para estabilizar a atitude do foguete no pouso, sendo K=1,14 e Kd = 1,6. Mostre que este controlador de fato mantém o foguete estável e obtenha o tempo de estabilização (2%) para correção em sua atitude.



Sugestão de Solução

Q2)

a)



TMA)

$$J.\ddot{\Psi} = -E \cdot L \cdot \sin\theta$$

θ pequeno $\Rightarrow \sin\theta \doteq \theta$

$$J.s^2.\Psi(s) = -E.L.\theta(s)$$

$$\frac{\Psi(s)}{\theta(s)} = \frac{m.g.L}{Js^2} = \frac{-0{,}86}{s^2}$$

b)

$$G_{MF} = \frac{\frac{-(K+Kds).0{,}86}{s^2}}{1+\frac{(K+Kds).0{,}86}{s^2}} = \frac{0{,}86(K+Kds)}{s^2+0{,}86Kds+0{,}86K}$$

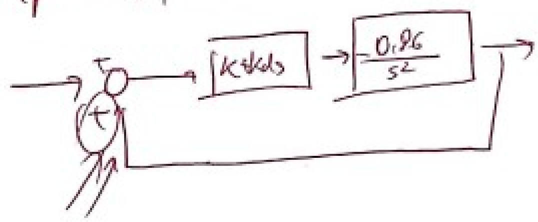
$$G_{MF} = \frac{1{,}38s+0{,}98}{s^2+1{,}38s+0{,}98}$$

$$\text{polos} = \frac{-1{,}38 \pm \sqrt{1{,}38^2-4.0{,}98}}{2} = -0{,}69 \pm 0{,}72j$$

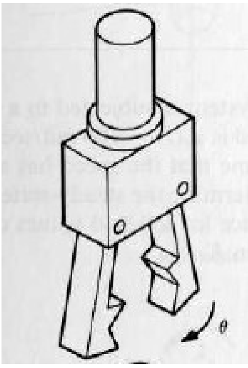
Estável

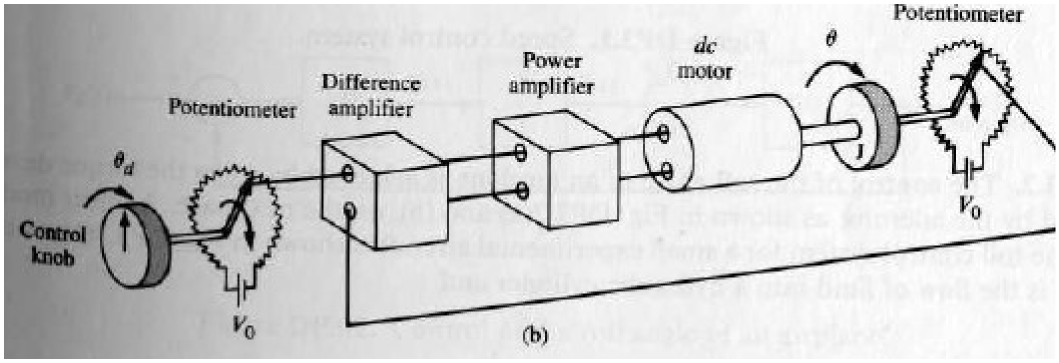
$\omega_n = 1$ rad/s
$\zeta = 0{,}7$ $\Rightarrow t_s = \frac{4}{0{,}7.1} = \underline{\underline{5{,}8s}}$

OBS: O Diagrama deveria prever realimentação com inversão de sinal (positiva), mas considerei corretas respostas que não se atentaram a este problema do enunciado.

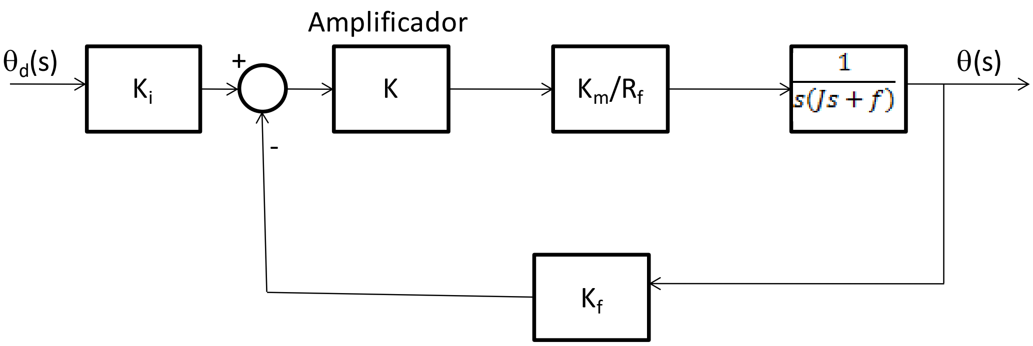


6**)** Um sistema de controle de uma garra robótica é apresentado nas figuras abaixo:





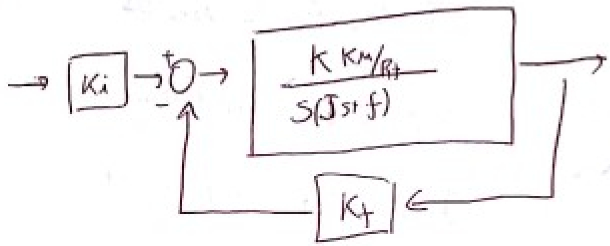
(b)



Um pré requisito deste sistema é de que não haja nenhum sobressinal, pois poderia danificar a carga a ser transportada. Sendo Km=30, Rf=1Ω, Kf=Ki=1, J=0.1 e f=1, obter o valor do ganho de realimentação para que o sistema satisfaça o pré-requisito, buscando ser o mais rápido possível. Neste caso, qual o tempo de estabilização 2% esperado? Esboce a Sugestão de Solução a uma entrada em degrau unitário.

Sugestão de Solução

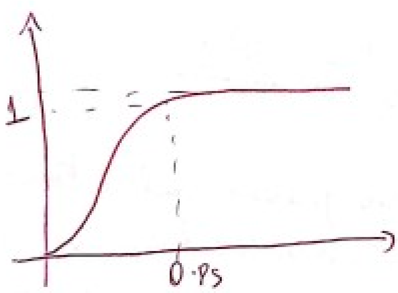
Q3)



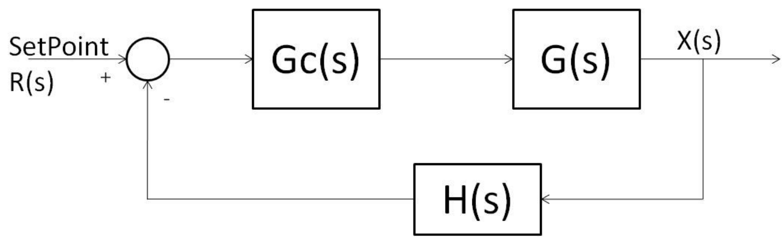
$$G = \frac{K_i \quad K \cdot K_m / R_f}{S(Js+f) + \frac{K K_m K_f}{R_f}} = \frac{K_i K \cdot K_m}{J R_f s^2 + f \cdot R_f \cdot s + K \cdot K_m \cdot K_f}$$

$$G = \frac{30K}{0{,}1 s^2 + s + 30K} = \frac{300K}{s^2 + 10s + 300K}$$

$$\zeta = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2\omega_n = 10 \\ \omega_n^2 = 300K \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_n = 5 \\ K = 0{,}083 \end{matrix} \Rightarrow t_s = \frac{4}{\omega_n} = \underline{0{,}8\,seg}$$



7) Um forno de precisão utilizado numa indústria de biotecnologia é dotado de um sistema de controle de temperatura, modelado conforme o diagrama abaixo. A função de transferência do sistema (que relaciona a Potência elétrica de aquecimento à Temperatura) é $G(s) = \frac{1}{(s+1)(100s+1)}$ e assume-se um controlador do tipo proporcional $G_c(s) = K_c$. O sensor de temperatura possui dinâmica dada por $H(s) = \frac{1}{(0.05s+1)}$.



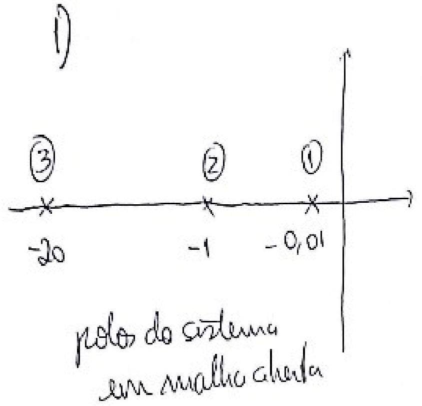
Utilizando o conceito de dominância de polos, calcule o valor do ganho K_c para que o sistema em malha fechada possua tempo de estabilização 2% de:

a) (1,75pt) 100seg

b) (1,75pt) 10seg

Sugestão de Solução:

1)



a) • para um sistema de 1ª ordem, $\left(\frac{1}{\tau s+1}\right)$ o tempo de estabelecimento 2% é $4 \cdot \tau$

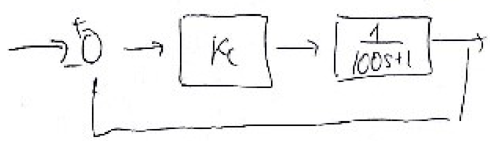
• para um sistema de 2ª ordem, $\frac{4}{\xi \omega_n}$

$\Rightarrow$ tempo de estab 2% $\cong -4$ / parte real do polo dominante

$t_s^{2\%} = 100s \Rightarrow$ parte real polo dominante $= \underline{\underline{-0{,}04}}$

$\Uparrow$

para este caso, podemos desprezar os polos ② e ③ e projetar o sistema de controle apenas considerando a função $G(s) \cong \frac{1}{100s+1}$



malha fechada

$$\Rightarrow G_{MF}(s) = \frac{K_c}{100s+1+K_c} = \frac{K_c/(1+K_c)}{\frac{100}{1+K_c}s+1} \Rightarrow \tau = \frac{100}{1+K_c}$$

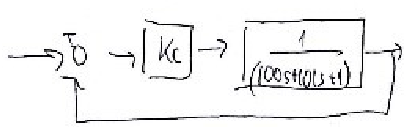
$\tau = \frac{1}{0{,}04} = 25$

$$\Rightarrow 25 = \frac{100}{1+K}$$

$\boxed{K_c = 3}$

b) $t_s^{2\%} = 10s$

parte real polo dominante $= -0{,}4 \Leftarrow$ só podemos desprezar o polo ③



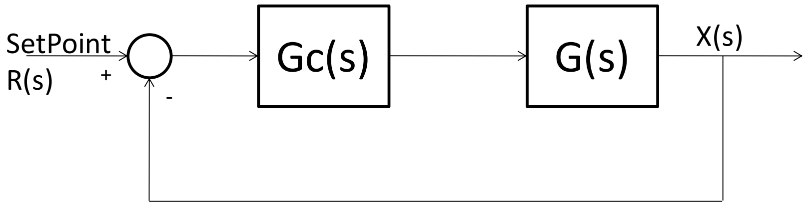
$$G_{MF} = \frac{K_c/(1+K_c)}{\frac{100}{1+K_c}s^2 + \frac{101}{1+K_c}s+1}$$

pólos em malha fechada: $-0{,}4$ e $-p \Rightarrow \frac{100}{1+K_c}s^2 + \frac{101}{1+K_c}s + 1 = (2{,}5s+1)\left(\frac{s}{p}+1\right)$

$\boxed{K_c = 23{,}5}$

$p = 0{,}62$

8) Uma planta instável $G(s) = \frac{1}{(s+5)(s-1)}$ é controlada por uma controlador do tipo proporcional $G_c(s) = K_c$.



Obter:

a)(1,5pt) o intervalo para o ganho K_c para o qual o sistema em malha fechada é estável.

b)(1,5pt) o valor do ganho K_c para o qual o sistema apresente em malha fechada Sugestão de Solução com amortecimento $\zeta = 0{,}7$.

Sugestão de Solução:

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s-1)} \Rightarrow G_{MF}(s) = \frac{K}{s^2+4s-5+K}$$

a) Para ser estável

$$S_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(K-5)}}{2}$$

$$\sqrt{16-4(K-5)} < 4$$

pois garante-se que os dois polos terão parte real negativa

$$\cancel{16} - 4K + 20 < \cancel{16}$$

$$\boxed{K > 5}$$

ou pode-se aplicar critério Routh-Hurwitz

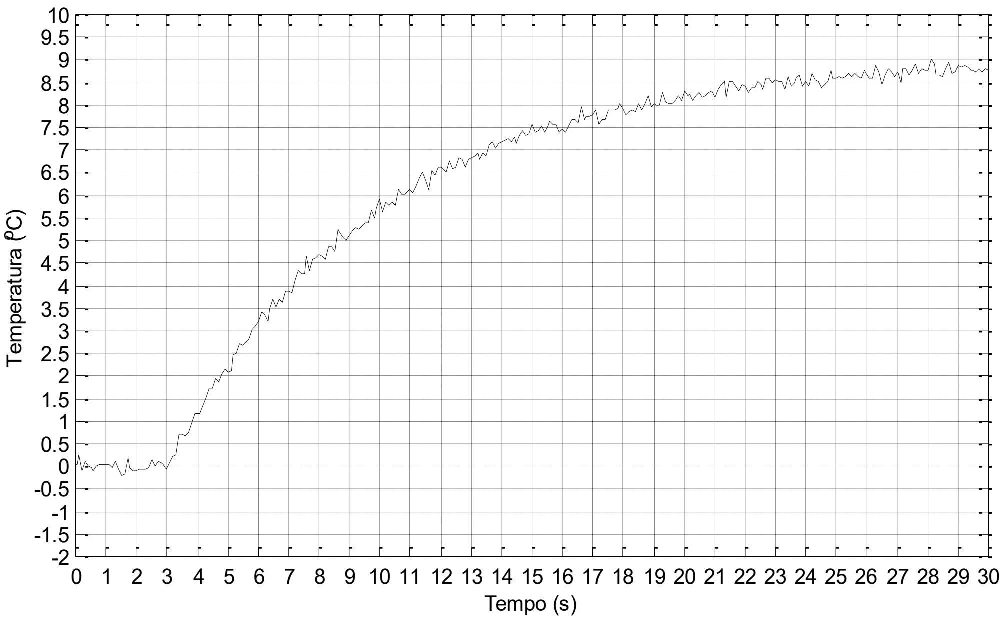
b)

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

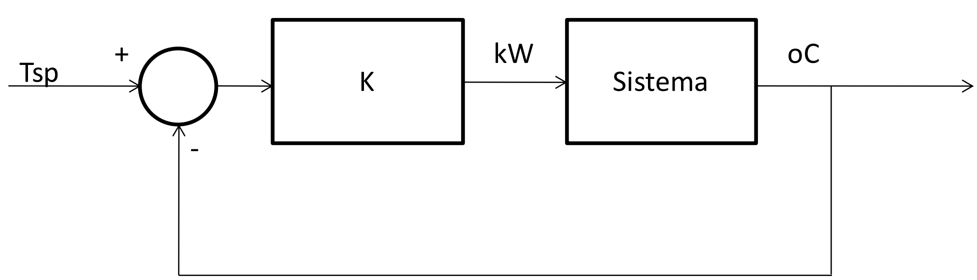
$$\begin{cases} \omega_n^2 = K-5 \\ 2\underbrace{\zeta}_{0,7}\omega_n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = K-5 \\ 1{,}4\omega_n = 4 \Rightarrow \omega_n = 4/1{,}4 \end{cases}$$

$$\text{e } K = \omega_n^2 + 5 \Rightarrow \boxed{K = 13{,}1}$$

9) Aplica-se um degrau de 100kW a um sistema dinâmico térmico em t=3s, o sistema apresenta a Sugestão de Solução abaixo. A entrada do sistema é a potência elétrica entregue a uma resistência de aquecimento (em kW) e a saída é a temperatura (oC).



Propôs-se um sistema de realimentação proporcional para que o sistema fique mais rápido. O objetivo é que a temperatura se estabilize em 2% após 4s apenas. Calcule o ganho K do sistema de controle para este objetivo. Qual o erro em regime permanente com o valor de K obtido, para uma entrada degrau de 10ºC em Tsp?



Sugestão de Solução:

PASSO 1) IDENTIFICAR SISTEMA MALHA ABERTA:

$$\frac{T(°C)}{P(kW)} = \frac{K_{MA}}{\tau_{MA}s+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{MA} = \dfrac{8,7}{100} = 8,7.10^{-2} \\ \tau_{MA} = 10-3 = 7\,seg \end{array} \right.$$

Passo 2) FUNÇÃO TRANSF. MALHA FECHADA

$$\frac{T}{T_{SP}} = \frac{K.K_{MA}}{\tau_{MA}s + 1 + KK_{MA}} \Rightarrow \tau_{MF} = \frac{\tau_{MA}}{1+KK_{MA}}$$

Objetivo: $4.\tau_{MF} = 4 \Rightarrow \tau_{MF} = 1\,seg$ *

$$* \quad \frac{7}{1+K\,8,7.10^{-2}} = 1 \Rightarrow 7 = 1 + 8,7.10^{-2}K$$

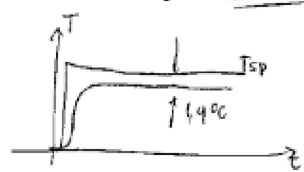
$$\boxed{K = 89}$$

ERRO EM REGIME:

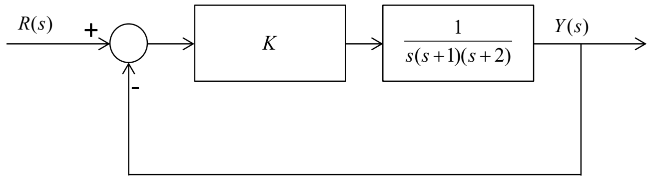
$$\frac{T}{T_{SP}} = \frac{6}{7s+7} = \frac{0,86}{s+1}$$

$$T(t\to\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s} \cdot \frac{0,86}{s+1} \cdot s = 8,6$$

$\Rightarrow$ erro em regime $= \underline{1,4°C}$



10) a)(1,5) Obtenha o intervalo de valores para o ganho K de forma a garantir a estabilidade do sistema em malha fechada abaixo



b) (1,0) Esboce a resposta ao degrau unitário em R(s) supondo *K*=4 para o sistema anterior. Você pode (e deve) usar o conceito de dominância de polos. Indique o tempo de estabilização, tempo de pico, sobressinal e valor em regime da resposta.

c) (1,0) Esboce a resposta ao degrau unitário em R(s) supondo *K*=0,1 para o sistema anterior. Você pode (e deve) usar o conceito de dominância de polos. Indique o tempo de estabilização e valor em regime da resposta.

Sugestão de Solução:

a) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3+3s^2+2s+K} \Rightarrow$

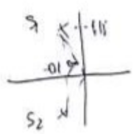
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \frac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} K>0 \\ K<6 \end{array}$$

p/ estabilidade

$\boxed{0<K<6}$

b) $K=4 \Rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{4}{s^3+3s^2+2s+4} \Rightarrow S_{1,2} = -0,1 \pm 1,1j$

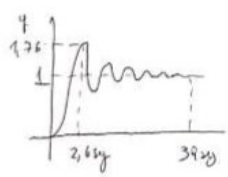
$S_3 = -2,8 \rightarrow$ não dominante



$\Rightarrow \zeta = \arccos\theta = 0,08$

$\omega_n = 1,2\,rad/s \approx \omega_d$

$M_p = \exp\left(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right) = 76\%$



$y(\infty) = \lim_{s\to 0} Y(s)\,\frac{1}{s}\,s = 1$

$t_{pico} = \frac{\pi}{\omega_d} = 2,6seg$ $\quad t_s^{2\%} = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 39seg$

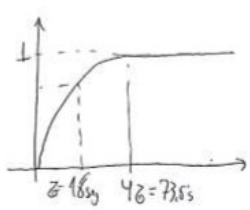
c) $K=0,1 \Rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{4}{s^3+3s^2+2s+0,1}$

$S_1 = -0,054 \leftarrow$ DOMINANTE $\Rightarrow$ sist 1ª ordem com constante

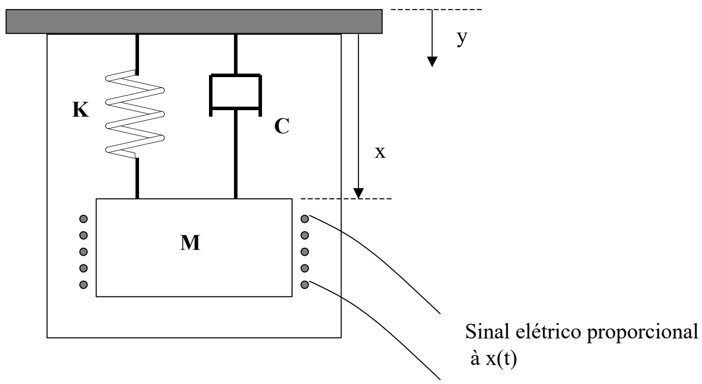
$S_2 = -0,899$ $\quad$ tempo $= \frac{1}{0,054} = 18,38seg$

$S_3 = -2,05$

$\Rightarrow$



11) Um medidor sísmico é composto por uma massa M presa à carcaça por uma mola de rigidez K e um sistema com amortecimento equivalente C. A carcaça é presa ao corpo vibrante, apresentando o movimento y(t). O que se deseja medir é aceleração $\ddot{y}(t)$. A massa M apresenta um movimento relativo à carcaça x(t), que é medido através de uma bobina instalada em volta da mesma. O sinal elétrico lido é dado por e(t). A aceleração da massa M em relação ao solo é $\ddot{x}(t)+\ddot{y}(t)$ e K_a é o ganho do sistema elétrico de medição E(s) = K_a.X(s). Obtenha a função de transferência $E(s)/A_Y(s)$, onde $A_Y(s)=s^2Y(s)$ é a aceleração da carcaça.



12) A função que modela um sistema de posicionamento é dada $G(s)=\frac{10}{s(\tau s+1)}$ com $\tau=0.001seg$. Um sistema de controle em malha fechada proporcional $G_c(s)=K$ é utilizado para garantir que a saída acompanhe o valor desejado.

(a) Qual o erro na saída X(s) para uma entrada a degrau unitário em R(s)?

(b) Obtenha o valor de K para que o erro em regime de 1mm a uma entrada rampa de 10cm/seg em R(s).

(c) Para K=20, esboce a resposta a um degrau unitário na entrada R(s).