PROVA 1 – 2017

PMR3302 – Sistemas Dinâmicos para Mecatrônica I
(Sistemas mecânicos e linearização)

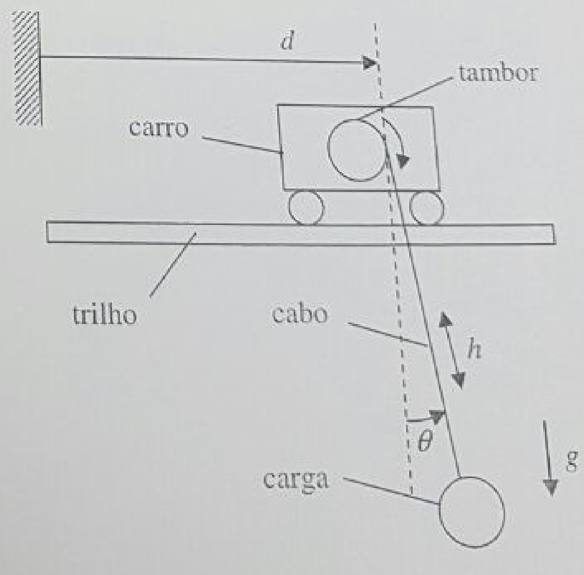
Nome: Resolução **No. USP:** ______________

Questão 1: (4,5 pontos)

As Figuras abaixo apresentam uma foto e um esquema de um guindaste levantando uma carga. O guindaste é composto basicamente por um carro e um sistema de levantamento da carga. No caso desse guindaste estamos analisando somente o seu movimento em um único plano vertical, dessa forma o carro do guindaste translada somente em uma única direção. O movimento do carro é proporcionado por um motor elétrico que gira as suas rodas. O carro tem massa m e suas rodas tem raio R. O sistema de levantamento da carga é composto por um cabo, um gancho, um tambor para enrolar o cabo e um motor elétrico. O motor gira o tambor que por sua vez enrola ou desenrola o cabo fazendo com que a carga presa ao gancho suba ou desça. O motor e o tambor têm momento de inércia J_T, o tambor tem raio R_T, o gancho e a carga tem massa M, e momento de inércia J_C. Como a carga é muito pesada o atrito de rolamento entre as rodas do carro e o trilho não é desprezível. O motor do carro aplica um torque τ_C no eixo das rodas e o motor do sistema de levantamento da carga aplica um torque τ_T no tambor. O controle de um guindaste tem por objetivo pegar uma carga localizada em uma posição, levantá-la e levá-la para outra posição sem que a carga oscile. O problema principal é que ao levantar e mover a carga, a mesma começa a oscilar e somente pode ser rebaixada e colocada na sua nova posição após as oscilações pararem. Deseja-se obter um modelo dinâmico do guindaste para ser usado para projetar o seu sistema de controle, assim, pede-se:

a) Adote as hipóteses que julgar necessárias. Ressalta-se que as hipóteses têm que ser compatíveis com as equações do seu modelo. (1 ponto)
b) Calcule a energia cinética do sistema. (1,5 ponto)
c) Calcule a potência dissipada e a energia potencial do sistema. (0,5 ponto)
d) Obtenha as equações dinâmicas do sistema usando as coordenadas d, h e θ. (2 pontos)

Observação: se precisar de algum dado que não é fornecido no enunciado defina-o.



Questão 3: (2,5 pontos)
A dinâmica de um sistema é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}(t) = -l\sin(\alpha(t))f(t) \\ m\dot{v}_x(t) = f(t)\cos(\theta(t)+\alpha(t)) \\ m\dot{v}_z(t) = f(t)\sin(\theta(t)+\alpha(t)) - mg \end{cases}$$

onde θ é posição angular, v_x é velocidade na direção horizontal, v_z é velocidade na direção vertical, f é força e α é um ângulo. Sabendo que as entradas do sistema são a força f e o ângulo α e as saídas são as componentes da velocidade v_x e v_z, pede-se:

a) Determine a condição de linearização do sistema em regime permanente assumindo uma condição estacionária onde: $\theta_0 = 90°$, $\alpha_0 = 0°$, $v_x = 0$ e $v_z = 10$ m/s. (0,5 ponto)

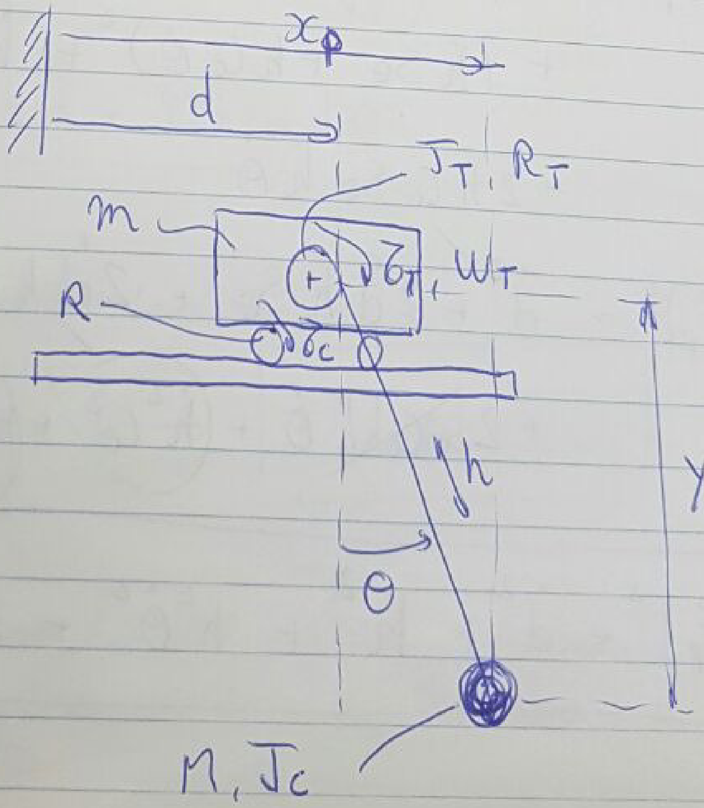
b) Linearize as equações dinâmicas do sistema em torno da posição de equilíbrio obtida no item (a). (1,5 ponto)

c) Coloque as equações do sistema linearizado na forma do espaço dos estados matricial. (0,5 ponto)

PMR3302 - P1 - 2017 4

Q1 a) Hipóteses

- Rodas do carro giram sem deslizar
- Carro é massa pontual
- Cabo é rígido e não flexiona em nenhuma direção
- Massa do cabo é desprezível
- Tambor e roda são corpos rígidos
- Momento de inércia do Tambor é constante
- Carga e gancho são corpos rígidos
- Existe atrito de rolamento entre rodas e trilho
- Outras forças de atrito são desprezíveis
- ~~Fontes~~ de torque no eixo das rodas é ideal
- Fonte de torque no tambor é ideal
- Momento de inércia das rodas é desprezível
- Força normal entre rodas e trilho é constante (variação pequena)



4.

b). Posição do carro $\rightarrow \boxed{\begin{cases} x_c = d \\ y_c = 0 \end{cases}}$

. Posição da carga $\rightarrow \boxed{\begin{cases} x_p = d + h \operatorname{sen}\theta \\ y_p = -h \cos\theta \end{cases}}$

. Velocidade do carro $\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_c = \dot{d} \\ \dot{y}_c = 0 \end{cases}$

$$\boxed{|\vec{v}_c|^2 = \dot{d}^2}$$

. Velocidade linear da carga:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \dot{d} + \dot{h} S_\theta + h C_\theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_p = -\dot{h} C_\theta + h S_\theta \dot{\theta} \end{cases}$$

$$|\vec{v}_p|^2 = \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 = \dot{d}^2 + 2\dot{d}(\dot{h} S_\theta + h C_\theta \dot{\theta}) +$$

$$+ (\dot{h} S_\theta + h C_\theta \dot{\theta})^2 + \dot{h}^2 C_\theta^2 + h^2 S_\theta^2 \dot{\theta}^2 -$$

$$- 2 h C_\theta S_\theta \dot{h} \dot{\theta}$$

$$|\vec{v}_p|^2 = \dot{d}^2 + 2\dot{d}\dot{h} S_\theta + 2\dot{d} h C_\theta \dot{\theta} + \dot{h}^2 S_\theta^2 + h^2 C_\theta^2 \dot{\theta}^2$$

$$+ \cancel{2 S_\theta C_\theta h \dot{h} \dot{\theta}} + \dot{h}^2 C_\theta^2 + h^2 S_\theta^2 \dot{\theta}^2 - \cancel{2 C_\theta S_\theta h \dot{h} \dot{\theta}}$$

$$\boxed{|\vec{v}_p|^2 = \dot{d}^2 + \dot{h}^2 + h^2 \dot{\theta}^2 + 2 S_\theta \dot{d} \dot{h} + 2 h C_\theta \dot{d} \dot{\theta}}$$

- Velocidade angular do tambor:

$$w_T = \dot{h}/R_T$$

- Velocidade angular da carga: $w_c = \dot{\theta}$
- Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{v}}_c|^2 + \frac{1}{2} M |\dot{\vec{v}}_p|^2 + \frac{1}{2} J_T w_T^2 + \frac{1}{2} J_c w_c^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{d}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{d}^2 + \dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2 S_\theta \dot{h} \dot{d} + 2 h C_\theta \dot{d} \dot{\theta}) + \frac{1}{2} J_T \frac{\dot{h}^2}{R_T^2} + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{d}^2 + \frac{1}{2}\left(M + \frac{J_T}{R_T^2}\right)\dot{h}^2 + \frac{1}{2}(Mh^2 + J_c)\dot{\theta}^2 + M S_\theta \dot{h} \dot{d} + M h C_\theta \dot{d} \dot{\theta}}$$

c) Energia potencial:

$$U = Mg\, y_p \rightarrow \boxed{U = -M h C_\theta g}$$

Potência dissipada por atrito rolamento entre rodas do carro e trilho:

$$Fat = \mu N \overset{\sim}{=} \mu (m+M) g \, \text{sinal}(v)$$

$$D = Fat \, |\vec{v}_{carro}|$$

$$\boxed{D = \mu (m+M) g \, |\dot{d}|}$$

d). Nº de graus de liberdade $= 3$
. Coordenadas generalizadas $\Rightarrow$ d, h, θ

. Equação de movimento p/ d

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = (m+M)\dot{d} + M S\theta \dot{h} + M h C\theta \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) = (m+M)\ddot{d} + M S\theta \ddot{h} + M C\theta \dot{h}\dot{\theta} + M h C\theta \ddot{\theta} + M C\theta \dot{\theta}\dot{h} - M h S\theta \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial d} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{d}} = \mu (m+M) g \, \text{sinal}(\dot{d})$$

$$Q_d = \frac{\tau_c}{R}$$

. Equação de movimento p/ h

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = \left(M + \frac{J_T}{R_T^2}\right)\dot{h} + M S\theta \dot{d}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{h}}\right) = \left(M + \frac{J_T}{R_T^2}\right)\ddot{h} + M S\theta \ddot{d} + \cancel{M C\theta \dot{d} \dot{\theta}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = + M C\theta g + M h \dot{\theta}^2 + \cancel{M C\theta \dot{d} \dot{\theta}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{h}} = 0$$

$$Q_h = \frac{\zeta_T}{R_T}$$

. Equação do movimento p/ θ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (M h^2 + J_c)\dot{\theta} + M h C\theta \dot{d}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (M h^2 + J_c)\ddot{\theta} + 2 M h \dot{\theta} \dot{h} + M h C\theta \ddot{d} + M C\theta \dot{d} \dot{h} - \cancel{M h S\theta \dot{d} \dot{\theta}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = + \cancel{M C\theta \dot{h} \dot{d}} - \cancel{M h S\theta \dot{d} \dot{\theta}} - M h S\theta g$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$Q_\theta = 0$$

. Equações do movimento completas

4/

$Fat = \mu N \overset{\text{sinal}(\dot{v})}{=} \mu (m + M) g \, \text{sinal}(\dot{v})$

6/

$2MC_\theta \dot{h}\dot{\theta}$

$$\boxed{(m+M)\ddot{d} + MS_\theta \ddot{h} + Mh C_\theta \ddot{\theta} + MC_\theta \dot{h}\dot{\theta} + MC_\theta \dot{\theta}\dot{h} - MhS_\theta \dot{\theta}^2 + \mu(m+M) g \, \text{sinal}(\dot{d}) = \frac{\tau_C}{R}}$$

$$\boxed{\left(M + \frac{J_T}{R_T^2}\right)\ddot{h} + MS_\theta \ddot{d} - Mh\dot{\theta}^2 - MC_\theta g = \frac{\tau_T}{R_T}}$$

$$\boxed{(Mh^2 + J_C)\ddot{\theta} + 2Mh\dot{\theta}\dot{h} + MhC_\theta \ddot{d} + MghS_\theta = 0}$$

Q2 Sistema dinâmico não linear na forma SS

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w = f_1(\theta, w, v_x, v_z, \alpha, f) \\ \dot{w} = -\frac{l}{J}(\sin\alpha) f = f_2(\theta, w, v_x, v_z, \alpha, f) \\ \dot{v}_x = \frac{f}{m}\cos(\theta + \alpha) = f_3(\theta, w, v_x, v_z, \alpha, f) \\ \dot{v}_z = \frac{f}{m}\sin(\theta + \alpha) - g = f_4(\theta, w, v_x, v_z, \alpha, f) \end{cases}$$

a) Condição de linearização de regime permanente

- $\dot{\theta}_0 = \dot{w}_0 = \dot{v}_{x0} = \dot{v}_{z0} = 0$

- Dados: $\theta_0 = 90^\circ$, $\alpha_0 = 0^\circ$, $v_x = 0 \, m/s$, $v_z = 10 \, m/s$

- Subst. condição linearização nas eq. dinâmicas

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = \boxed{\theta = w_0} \\ \dot{w}_0 = 0 = -\frac{l}{J}\sin(\alpha_0) \cancel{f_0} = 0 \\ \dot{v}_{x0} = 0 = \frac{f_0}{m}\cos(\underbrace{\cancel{\theta_0} + \alpha_0}_{90^\circ}) = 0 \end{cases}$$

$$\dot{v}_{z0} = 0 = \frac{f_0}{m}\sin(\underbrace{\theta_0 + \alpha_0}_{90^\circ}) - g \Rightarrow \boxed{f_0 = mg}$$

- Condição de linearização:

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta_0 = 90^\circ, \ w_0 = 0 \text{ rad/s}, \ v_{x0} = 0 \text{ m/s}, \ v_{z0} = 10 \text{ m/s} \\ &\alpha_0 = 0^\circ, \ f_0 = mg \end{aligned}}$$

b) Usando método das derivadas parciais

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v_z}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial f}\right)_0 = 0 \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial w}\right)_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial w}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial v_z}\right) = 0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{l}{J}\underbrace{(\cos\alpha_0)}_{1}\underbrace{f_0}_{mg} = -\frac{lmg}{J} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial f}\right)_0 = -\frac{l}{J}(\underbrace{\sin\alpha_0}_{0}) = 0 \end{cases}$$

4/

$$= \mu N \overset{\text{sinal}(v)}{=} \mu (m+M) g \,\text{sinal}(v)$$

8/

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial v_z}\right)_0 = 0 \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right)_0 = -\frac{f_0}{m} \sin(\underbrace{\theta_0 + \alpha_0}_{90^\circ}) = -g \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{f_0}{m} \sin(\underbrace{\theta_0 + \alpha_0}_{90^\circ}) = -g \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial f}\right)_0 = \frac{1}{m} \cos(\underbrace{\theta_0 + \alpha_0}_{90^\circ}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f_4}{\partial \omega}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_x}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_4}{\partial v_z}\right)_0 = 0 \\ \left(\frac{\partial f_4}{\partial \theta}\right)_0 = \frac{f_0}{m} \cos(\underbrace{\theta_0 + \alpha_0}_{90^\circ}) = 0 \\ \left(\frac{\partial f_4}{\partial \alpha}\right)_0 = \frac{f_0}{m} \cos(\underbrace{\theta_0 + \alpha_0}_{90^\circ}) = 0 \\ \left(\frac{\partial f_4}{\partial f}\right)_0 = \frac{1}{m} \sin(\underbrace{\theta_0 + \alpha_0}_{90^\circ}) = \frac{1}{m} \end{cases}$$

- Equações dinâmicas linearizadas

$$\boxed{\begin{cases} \delta\dot{\theta} = \delta\omega \\ \delta\dot{\omega} = -\frac{mgl}{J}\,\delta\alpha \\ \delta\dot{v}_x = -g\,\delta\theta - g\,\delta\alpha \\ \delta\dot{v}_z = \frac{\delta f}{m} \end{cases}}$$

c) Equações linearizadas na forma matricial

• Equações de estado

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{\omega} \\ \delta\dot{v}_x \\ \delta\dot{v}_z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\omega \\ \delta v_x \\ \delta v_z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{l}{J}mg & 0 \\ -g & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta f \end{bmatrix}}_{\vec{u}}$$

• Equações das saídas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_z \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\omega \\ \delta v_x \\ \delta v_z \end{bmatrix}}_{\vec{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta f \end{bmatrix}}_{\vec{u}}$$