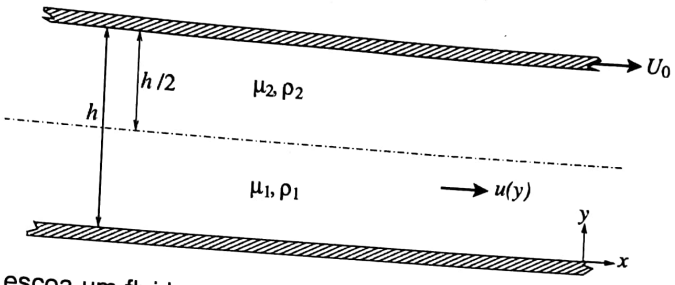
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PME3230 – MECÂNICA DOS FLUIDOS I
1ª PROVA – 31/08/2018 – Duração de 120 minutos

RECOMENDAÇÕES:

- Preencha todas as informações da capa do Caderno de Respostas
- Cada questão deve ser resolvida na página identificada do Caderno de Respostas
- Todos aparelhos de comunicação devem permanecer desligados durante toda a prova

1ª Questão (3,5 pontos)

Considere o escoamento de fluidos incompressíveis e imiscíveis, em regime permanente, entre duas placas paralelas como mostra a figura ao lado. A placa superior se move a velocidade U_0 para a direita enquanto a placa inferior fica estacionária. Na metade inferior da região entre as placas ($0 \le y \le h/2$) escoa um fluido com massa específica ρ_1 e viscosidade μ_1, e na metade superior ($h/2 \le y \le h$) escoa outro fluido com massa específica ρ_2 e viscosidade μ_2. Admitindo distribuição linear de velocidades nos escoamentos descritos, pedem-se:



1.1. As condições que as velocidades dos fluidos precisam satisfazer nas paredes e na interface dos fluidos; **(0,5 ponto)**

1.2. As distribuições de velocidades das regiões **1** e **2**: $u_1(y) = f(y)$ para $0 \le y \le h/2$ e $u_2(y) = f(y)$ para $h/2 \le y \le h$; **(2,0 pontos)**

1.3. Admitindo, agora, que $\mu_2 = (5/4).\mu_1$, faça um esboço da distribuição das velocidades na forma ($y \times u(y)$) para $0 \le y \le h$; **(0,5 ponto)**

1.4. A tensão de cisalhamento junto à placa inferior em função de U_0, h e μ_1, para a mesma relação entre μ_1 e μ_2 do item anterior. **(0,5 ponto)**

2ª Questão (3,0 pontos)

Um bocal foi projetado para acelerar o escoamento de um fluido da velocidade na entrada v_1 para velocidade v_2 na saída de modo linear. Assim a velocidade pode ser expressa por: $v = a.x + b$, com a e b constantes. Pedem-se:

2.1. Admitindo que o regime é permanente e que a velocidade v_1=10 m/s em x_1 = 0 m, e que a velocidade v_2=25 m/s em x_2=1 m, determinar as acelerações local, convectiva e total nos pontos x_1 e x_2; **(1,5 pontos)**

2.2. Adote agora uma nova hipótese de que o escoamento é transitório. Nestas condições considere que $\partial v_1/\partial t$ = 20 m/s², e que $\partial v_2/\partial t$ = 60 m/s² no instante t_0 em que v_1 = 10 m/s, e em que v_2 = 25 m/s. Determine novamente as acelerações locais, convectiva e total nos pontos x_1 e x_2. **(1,5 pontos)**

convectiva e total nos pontos x_1 e x_2.

3ª Questão (3,5 pontos)

Um novo tipo de automóvel começa a ser projetado, com uma análise inicial em modelo reduzido (**m**) na escala geométrica **1:3** em relação ao protótipo (**p**), submetido a ensaios em túnel de vento, com variação da velocidade V_m e da resultante F_m das forças causada pelo escoamento sobre o automóvel.

Os resultados destes ensaios em modelo estão na tabela abaixo.

V_m (m/s)	40	60	80
F_m (N)	3400	7650	13600

Considerando que as grandezas que interferem no fenômeno são ρ (massa específica do fluido), ν (viscosidade cinemática do fluido), ***L*** (dimensão frontal do automóvel), ***V*** (velocidade) e ***F*** (força de resistência do ar ao deslocamento do automóvel), pede-se determinar:

3.1. A matriz dimensional na base **M, L, T** e deduzir as grandezas adimensionais que representam o fenômeno utilizando a base ρ, ***V, L***; **(1,0 ponto)**

3.2. Interpretar o significado físico das grandezas adimensionais deduzidas; **(1,0 ponto)**

3.3. Determinar a força de resistência do ar ao avanço do protótipo F_p, quando atinge a velocidade de **80 km/h. (1,5 ponto)**

Dados: ρ_{ar}**=1,2 kg/m³** e ν_{ar}**=1,5x10⁻⁵ m²/s**

FORMULÁRIO:

1. Tensão de cisalhamento: $\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$

2. Vetor velocidade: $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

3. Componentes do vetor velocidade: $u = \frac{dx}{dt}; v = \frac{dy}{dt}; w = \frac{dz}{dt}$

4. Gradiente de uma grandeza G (escalar ou vetorial): $\vec{\nabla}G = \frac{\partial G}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial G}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial G}{\partial x}\vec{k}$

5. Derivada total de uma grandeza G (escalar ou vetorial): $\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})G$

6. Relação diferencial das linhas de corrente: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$

SOLUÇÃO DA 1ª QUESTÃO

(a) • $u_1 = 0$ p/ $y = 0$ e $u_2 = U_0$ p/ $y = h$: princípio da aderência completa

• $u_1 = u_2$ p/ $y = h/2$: não há escorregamento entre os fluidos (viscosidades são da mesma ordem de grandeza)

(b) Chamando U_1 a velocidade em $y = h/2$:

$$\tau_1 = \mu_1 \cdot \frac{du_1}{dy} = \mu_1 \cdot \frac{U_1}{h/2} = C^{te} \; ; \; \tau_2 = \mu_2 \frac{du_2}{dy} = \mu_2 \frac{(U_0 - U_1)}{h/2} = C^{te}$$

Na interface $\tau_1 = \tau_2$ e, como τ_1 e τ_2 são constantes segue-se que $\tau(y) = C^{te} = \mathbb{C}$, não importando o valor de y.

$$\mu_1 \frac{du_1}{dy} = \mu_2 \frac{du_2}{dy} = \mathbb{C}$$

$$du_1 = \frac{\mathbb{C}}{\mu_1} dy \Rightarrow u_1(y) = \frac{\mathbb{C}}{\mu_1} \cdot y + C_1$$

$$p/ \; y = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$du_2 = \frac{\mathbb{C}}{\mu_2} dy \Rightarrow u_2(y) = \frac{\mathbb{C}}{\mu_2} \cdot y + C_2$$

$$p/ \; y = h \Rightarrow u_2 = U_0 \Rightarrow C_2 = U_0 - \frac{\mathbb{C} \cdot h}{\mu_2}$$

$$p/ \; y = h/2 \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \frac{\mathbb{C}}{\mu_1} \cdot \frac{h}{2} = \frac{\mathbb{C}}{\mu_2} \cdot \frac{h}{2} + U_0 - \frac{\mathbb{C}}{\mu_2} \cdot h$$

$$\frac{\mathbb{C}}{\mu_1} \cdot \frac{h}{2} + \frac{\mathbb{C}}{\mu_2} \cdot \frac{h}{2} = U_0 \Rightarrow \frac{\mathbb{C} \cdot h}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = U_0 \therefore \mathbb{C} = \frac{2 \cdot U_0 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2}{h(\mu_1 + \mu_2)}$$

SOLUÇÃO DA 1ª QUESTÃO - CONTINUAÇÃO

Assim: $$\boxed{u_1(y) = \frac{2 \cdot U_0 \cdot \mu_2}{h \cdot (\mu_1 + \mu_2)} \cdot y}$$

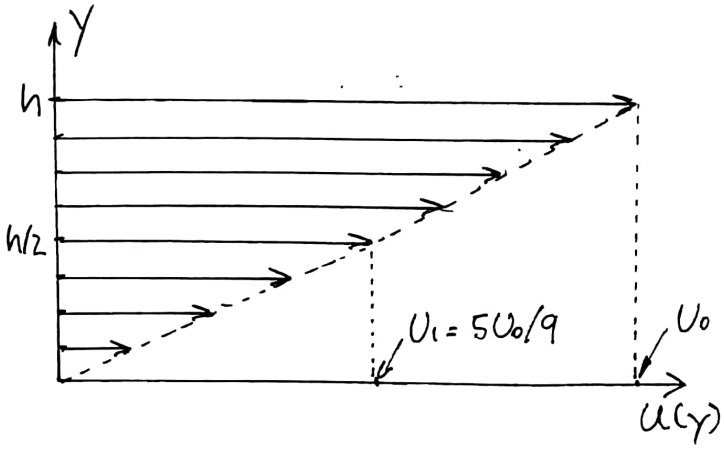
$$u_2(y) = \frac{2 \cdot U_0 \cdot \mu_1}{h(\mu_1 + \mu_2)} \cdot y + U_0 - \frac{2 \cdot U_0 \cdot \mu_1}{h(\mu_1 + \mu_2)} \cdot h$$

$$\boxed{u_2(y) = U_0 \left[1 + \frac{2 \cdot \mu_1}{h(\mu_1 + \mu_2)} (y - h) \right]}$$

(c) Na interface: $u_1(y) = \frac{\cancel{2} U_0 \mu_2}{\cancel{h} \cdot (\mu_1 + \mu_2)} \cdot \frac{\cancel{h}}{\cancel{2}} = \frac{U_0 \cdot \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = U_1$

Como $\mu_2 = \frac{5}{4} \cdot \mu_1$

$$U_1 = \frac{U_0 \cdot \frac{5}{4} \cdot \mu_1}{\mu_1 + \frac{5}{4}\mu_1} \Rightarrow U_1 = \frac{5 U_0}{9}$$



(d) $\tau = C$ e $C = \frac{2 \cdot U_0 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2}{h \cdot (\mu_1 + \mu_2)}$

$$\tau = \tau_{pl.inf.} = \frac{2 \cdot U_0 \cdot \mu_1 \cdot (5/4) \cdot \mu_1}{h \cdot \left(\mu_1 + \frac{5 \cdot \mu_1}{4}\right)} \therefore \boxed{\tau_{pl.inf.} = \frac{10 \cdot U_0 \cdot \mu_1}{9 \cdot h}}$$

τ é c^{te} em y: ver início item (b)

Resolução questão 2

a) Pela equação dada: $u = ax + b$, e $v = w = 0$

Como $u = V_1 = 10\ m/s$ em $x = 0$ e $u = V_2 = 25\ m/s$ em $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 0 + b \\ 25 = ax + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 15 \text{ e } b = 10 \Rightarrow u = (15x + 10)\frac{m}{s}$$

A aceleração $\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$, e só tem componentes em x:

$$a_x = \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\text{Regime Permanente}}^{\to 0} + u\frac{\partial u}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} = u\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore a_x = (15x + 10)\frac{15}{1} = \underline{(225x + 150)\ m/s^2}$$

A aceleração local é zero, Regime Permanente

A " Convectiva em $x = 0 \Rightarrow a_{x_{x=0}} = \underline{150\ m/s^2}$

" " " em $x = 1 \Rightarrow a_{x_{x=1}} = \underline{375\ m/s^2}$

---

b) No caso de regime transiente, a aceleração na direção x se torna:

$\vec{a} = a_x \vec{i}$ e $a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$, onde

$$u = a(t)x + b(t)$$

Para um tempo t qquer:

$u = V_1 = 10\ m/s$ em $x = 0$ e $u = V_2 = 25\ m/s$ em $x = 1$.

Assim:

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 0 + b(t_0) \\ 25 = a(t_0) + b(t_0) \end{array}\right\} a(t_0) = 15 \text{ e } b(t_0) = 10$$

$25 = a(t_0)x + b(t_0)$; $b(t_0) = 10$

Também em $t = t_0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial V_1}{\partial t} = 20\,m/s^2 \text{ em } x=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial V_2}{\partial t} = 60\,m/s^2 \text{ em } x=1$$

aceleraçoes locais em $t=t_0$.

A aceleração convectiva em $x=0$ é:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = (ax+b)\cdot a = (15.0+10).15 = 150\,m/s^2$$

e em $x=1$:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = (15.1+10).15 = 375\,m/s^2$$

A aceleração total do Fluido em $t=0$ é:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 20+150 = 170\,m/s^2 \text{ em } x=0$$

$$a_x = 60+375 = 435\,m/s^2 \text{ em } x=1$$

GABARITO

a) Matriz dimensional e Indução dos adimensionais

$$f(\rho, V, L, \nu, F) = 0 \Rightarrow \phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0$$

	ρ	V	L	ν	F
M	1	0	0	0	1
L	-3	1	1	2	1
T	0	-1	0	-1	-2

$$\nu = \Pi_1 \cdot \rho^{\alpha_1} \cdot V^{\alpha_2} \cdot L^{\alpha_3} \Rightarrow \Pi_1 = \frac{\nu}{VL}$$

$$F = \Pi_2 \cdot \rho^{\beta_1} V^{\beta_2} L^{\beta_3} \Rightarrow \Pi_2 = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$$

b) Significados físicos:

$\Pi_1 \equiv$ relação entre forças viscosas e forças de inércia

$\Pi_2 \equiv$ relação entre forças de pressão e forças de inércia

c) Força de resistência ao avanço do protótipo (para 80 km/h)

Semelhança em $\Pi_1 \Rightarrow \left(\frac{\nu}{V \cdot L}\right)_m = \left(\frac{\nu}{VL}\right)_p \Rightarrow K_\nu = K_V \cdot K_L$

Mesmo fluido $\Rightarrow K_\nu = 1 \therefore$

$$\boxed{\frac{V_p}{V_m} = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{3}}$$

Semelhança em $\Pi_2 \Rightarrow \left(\frac{F}{\rho V^2 L^2}\right)_m = \left(\frac{F}{\rho V^2 L^2}\right)_p \Rightarrow K_F = K_\rho \cdot K_V^2 \cdot K_L^2$

Mesmo fluido $\Rightarrow K_\rho = 1 \therefore$

$$\frac{F_m}{F_p} = 1 \cdot \left(\frac{3}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \therefore \boxed{F_m = F_p}$$

$V_p = 80\ km/h = 22{,}2\ m/s \quad \therefore V_m = 3 \cdot V_p = 66{,}6\ m/s$

Interpolando na tabela $\Rightarrow \boxed{F_m = F_p = 9.700\ N}$