Nome: _____ Nº USP: _____

(Colocar nome em todas as folhas!)

1ª Prova— 1º semestre de 2018

1ª Questão (4,0 pontos)

A viga prismática da figura está submetida a duas cargas transversais além das forças axiais de tração. Para a seção transversal d-d, pedem-se:

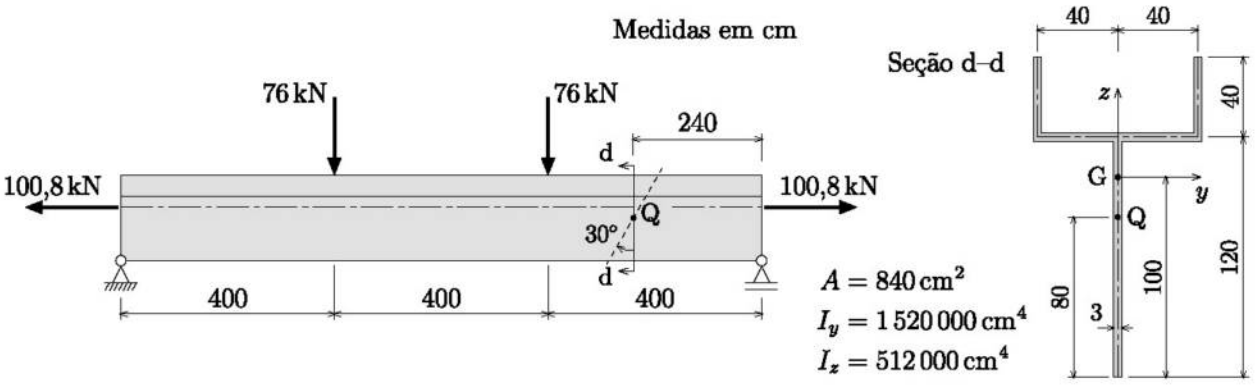
a) os esforços solicitantes;

b) as tensões normal e tangencial no ponto Q atuantes no plano da seção (não deixar de indicar as direções e sentidos das tensões);

c) o círculo de Mohr representando o estado duplo de tensão em Q;

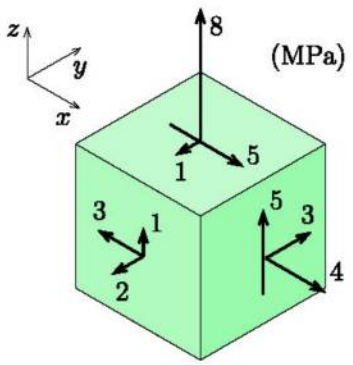
d) os valores das tensões normais e tangenciais extremas em Q e as direções dos planos em que ocorrem (indicar os resultados em prismas de tensões);

e) as componentes normal e tangencial do vetor tensão em Q atuante no plano inclinado de 30° indicado na figura.



2ª Questão (3,0 pontos)

Para o estado de tensão representado no paralelepípedo da figura, determine:



a) as componentes do tensor das tensões na base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$;

b) as tensões normal e tangencial no plano normal ao versor $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$;

c) o esboço do plano normal ao versor $\boldsymbol{n}$ no paralelepípedo e dos vetores tensão normal $\boldsymbol{\sigma}$ e tensão tangencial $\boldsymbol{\tau}$ que atuam nesse plano;

d) a direção $\boldsymbol{h}_3$ da tensão principal σ_3;

e) o valor da tensão principal σ_1.

São conhecidas as seguintes direções principais do estado de tensão:

$$\boldsymbol{h}_1 = 0{,}5806\boldsymbol{i} + 0{,}0986\boldsymbol{j} + 0{,}8082\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{h}_2 = 0{,}4667\boldsymbol{i} + 0{,}7731\boldsymbol{j} - 0{,}4296\boldsymbol{k}.$$

3ª Questão (3,0 pontos)

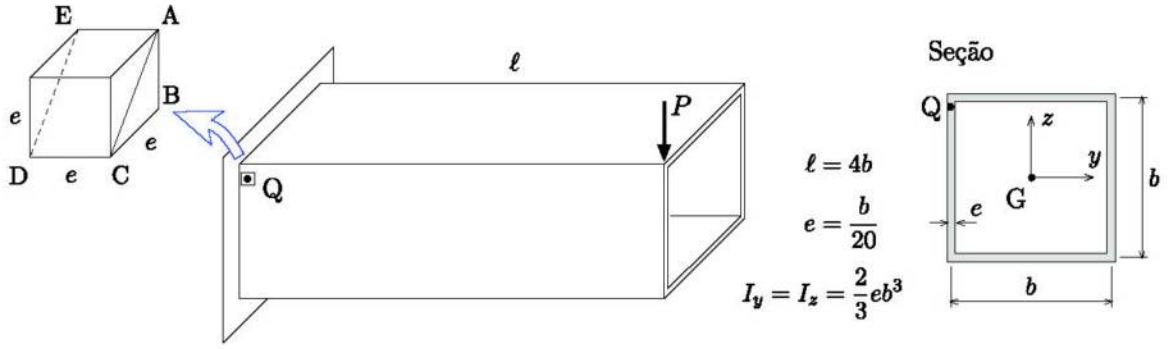
A figura abaixo mostra a posição de um elemento cúbico de lado $e = b/20$ no canto superior esquerdo da parede lateral de uma viga em balanço. Para o carregamento indicado, determine:

a) os esforços solicitantes na seção do engastamento;

b) as componentes das tensões nas faces desse elemento sabendo-se que $\tau^{M_T} = M_T/(2b^2e)$;

c) as tensões principais nesse elemento (sugestão, use os círculos de Mohr do estado duplo);

d) o vetor tensão no plano ACDE (cuidado, estado triplo!);



PEF 3306 - Tópicos de Mecânica dos Materiais 12/04/2018

Nome: GABARITO Nº USP: _____

(Colocar nome em todas as folhas!)

1ª Prova— 1º semestre de 2018

1ª **Questão** (4,0 pontos)

A viga prismática da figura está submetida a duas cargas transversais além das forças axiais de tração. Para a seção transversal d-d, pedem-se:

a) os esforços solicitantes;

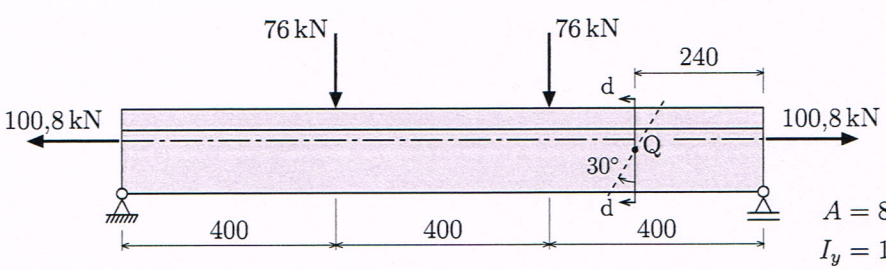
b) as tensões normal e tangencial no ponto Q atuantes no plano da seção (não deixar de indicar as direções e sentidos das tensões);

c) o círculo de Mohr representando o estado duplo de tensão em Q;

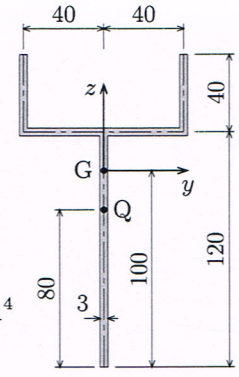
d) os valores das tensões normais e tangenciais extremas em Q e as direções dos planos em que ocorrem (indicar os resultados em prismas de tensões);

e) as componentes normal e tangencial do vetor tensão em Q atuante no plano inclinado de 30° indicado na figura.

Medidas em cm



Seção d–d



$A = 840\,\text{cm}^2$

$I_y = 1\,520\,000\,\text{cm}^4$

$I_z = 512\,000\,\text{cm}^4$

a) $M = 76(240) = 18.240\ \text{kN cm}$ (tração em baixo)

$V = 76\ \text{kN}$ (anti-horário)

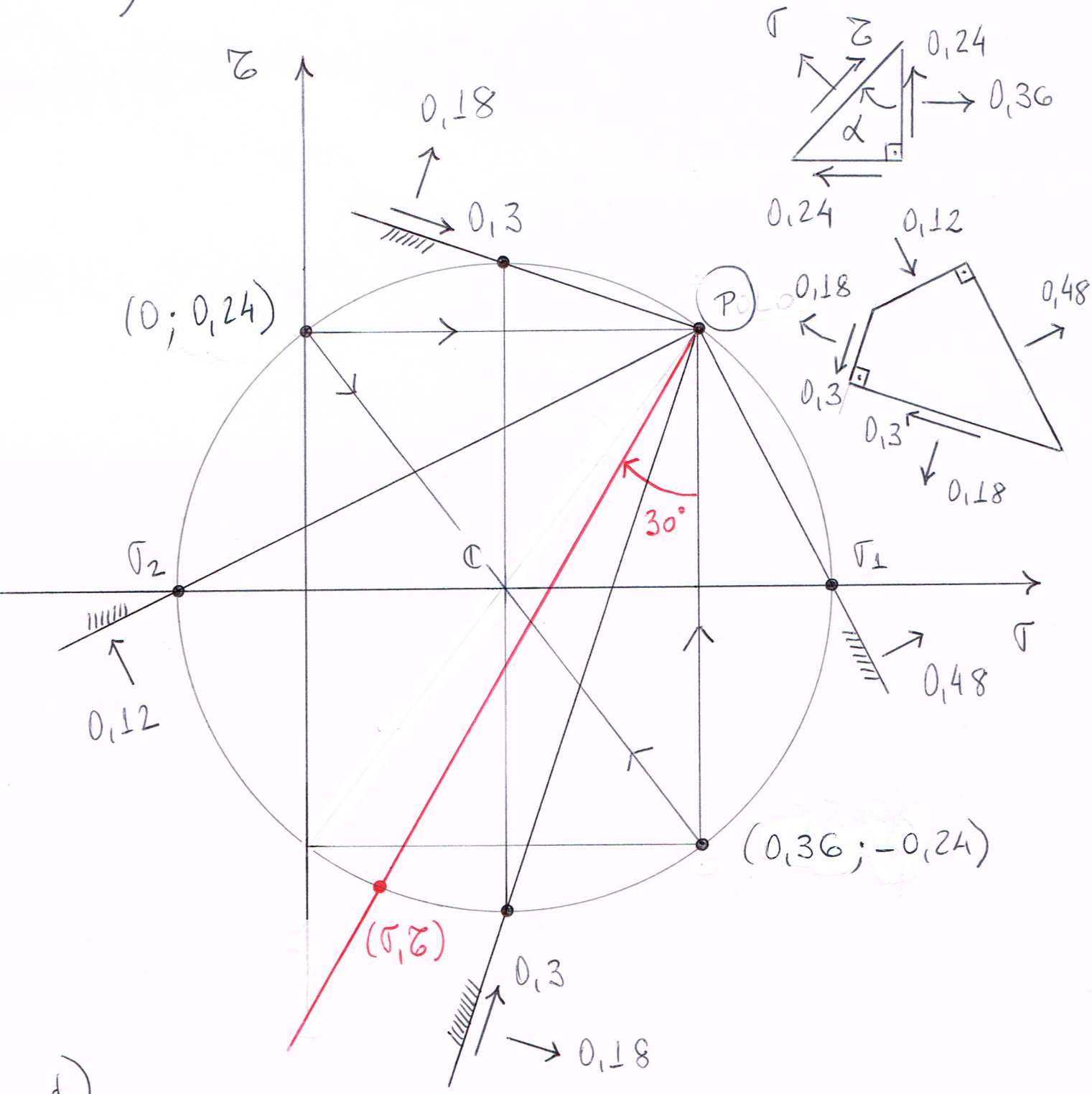
$N = 100{,}8\ \text{kN}$ (tração)

b) $\sigma = \dfrac{100{,}8}{840} + \dfrac{18.240}{1.520.000}(20) = 0{,}12 + 0{,}24$

$\therefore \boxed{\sigma = 0{,}36\ \text{kN/cm}^2}$

c) $\tau = \dfrac{76(240)60}{3(1.520.000)}$ $\therefore \boxed{\tau = 0{,}24\ \dfrac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}$

c)



d)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma' + R = 0{,}18 + 0{,}30 \quad \therefore \quad \sigma_1 = 0{,}48\ kN/cm^2 \\ \sigma_2 = \sigma' - R = 0{,}18 - 0{,}30 \quad \therefore \quad \sigma_2 = -0{,}12\ kN/cm^2 \end{cases}$$

$$\tau_{máx} = -\tau_{mín} = 0{,}30\ kN/cm^2$$

$$\begin{cases} tg\,\alpha_1 = -0{,}5 & \therefore \quad \alpha_1 = -26{,}565^\circ \ (\sigma_1) \\ tg\,\alpha_2 = 2 & \therefore \quad \alpha_2 = 63{,}435^\circ \ (\sigma_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\,\alpha_3 = 0{,}333\ldots & \therefore \quad \alpha_3 = 18{,}435^\circ \ (\tau_{mín}) \\ tg\,\alpha_4 = -3 & \therefore \quad \alpha_4 = -71{,}565^\circ \ (\tau_{máx}) \end{cases}$$

e) Para o plano em que $\alpha = 30^\circ$:

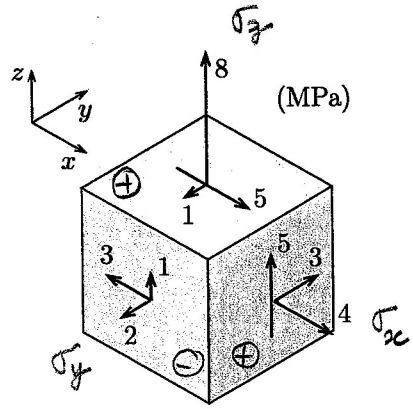
$$\sigma = 0{,}27 - 0{,}12\sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{\sigma = 0{,}0621539 \ \frac{kN}{cm^2}}$$

$$\tau = -0{,}12 - 0{,}09\sqrt{3} \quad \therefore \quad \boxed{\tau = -0{,}275885 \ \frac{kN}{cm^2}}$$

2018 aprn 20

a)

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$



b) $\underset{\sim}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i - j + k)$

$$\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n}) = \underline{T}\,\underset{\sim}{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}464 \\ 0 \\ 8{,}083 \end{bmatrix} \quad (MPa) \qquad \underline{|\underset{\sim}{t}| = 8{,}794\ MPa}$$

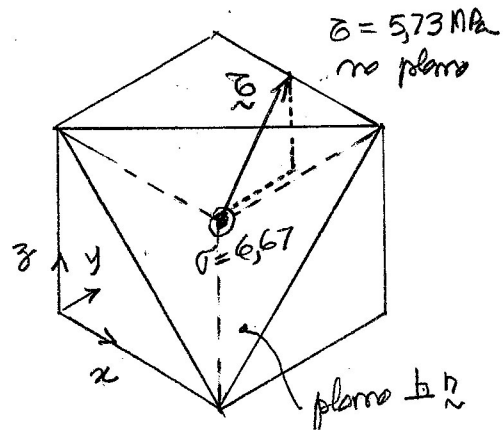
$$\sigma = \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{n} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{20}{3} = \underline{6{,}67\ MPa}$$

$$\underset{\sim}{\sigma} = \sigma\,\underset{\sim}{n} = \frac{20}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\tau} = \underset{\sim}{t} - \underset{\sim}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 6 - 20/3 \\ 0 - (-20/3) \\ 14 - 20/3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -2/3 \\ +20/3 \\ 22/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}385 \\ 3{,}85 \\ 4{,}23 \end{bmatrix} \quad MPa$$

c)



$$\tau = \sqrt{\underset{\sim}{\tau} \cdot \underset{\sim}{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{4 + 400 + 484}{9}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{296}}{3} = \underline{5{,}73\ MPa}$$

ou

$$\tau = \sqrt{t^2 - \sigma^2} = \sqrt{8{,}794^2 - 6{,}667^2} = 5{,}73\ MPa$$

2018 may 02

d) $$\underset{\sim}{h_3} = \underset{\sim}{h_1} \times \underset{\sim}{h_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0{,}5806 & 0{,}0986 & 0{,}8082 \\ 0{,}4667 & 0{,}7731 & -0{,}4296 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(-0{,}0424 - 0{,}6248) + \hat{j}\,(0{,}3772 + 0{,}2494) + \hat{k}\,(0{,}4489 - 0{,}0460)$$

$$\boxed{\underset{\sim}{h_3} = -0{,}6672\,\hat{i} + 0{,}6266\,\hat{j} + 0{,}4028\,\hat{k}}$$

e) Sol 1 : $$\sigma_1 = \overbrace{(\underline{T}\,\underset{\sim}{h_1})}^{\underset{\sim}{t_1}} \cdot \underset{\sim}{h_1}$$

$$\underset{\sim}{t_1} = \underline{T}\,\underset{\sim}{h_1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5806 \\ 0{,}0986 \\ 0{,}8082 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}659 \\ 1{,}131 \\ 9{,}270 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \underset{\sim}{t_1} \cdot \underset{\sim}{h_1} = [6{,}659 \;\; 1{,}131 \;\; 9{,}270]\,\underset{\sim}{h_1} = \boxed{11{,}47 \text{ MPa}}$$

Sol 2 : Sistema $\underline{T}\,\underset{\sim}{h_1} = \sigma_1\,\underset{\sim}{h_1}$

$$\begin{bmatrix} (4-\sigma_1) & 3 & 5 \\ 3 & (2-\sigma_1) & -1 \\ 5 & -1 & (8-\sigma_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5806 \\ 0{,}0986 \\ 0{,}8082 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Empregando a 1ª linha do sistema :

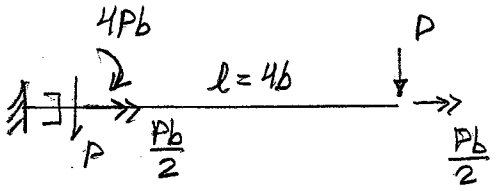
$$(4-\sigma_1)\,0{,}5806 + 3 \times 0{,}0986 + 5 \times 0{,}8082 = 0$$

$$0{,}5806\,\sigma_1 = 2{,}322 + 0{,}296 + 4{,}041 = 6{,}6592$$

$$\boxed{\sigma_1 = 11{,}47 \text{ MPa}}$$

2018 apr 20

a)



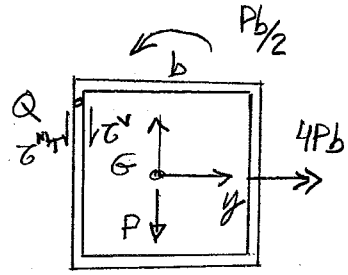
Esforços solicitantes no engaste

$N = 0 \qquad M = -4Pb$

$V = P \qquad M_T = \frac{Pb}{2}$

b) Tensão no ponto Q

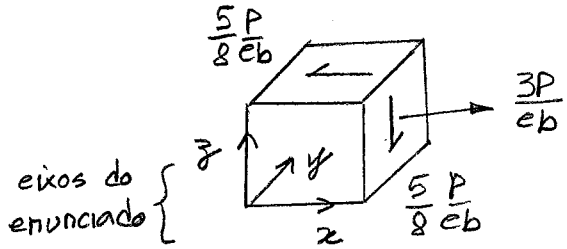
$I_y = \frac{2}{3} e b^3$



$$\sigma = \frac{4Pb}{\frac{2}{3}eb^3} \times \frac{b}{2} = 3\frac{P}{eb}$$

$$\tau = \tau^V + \tau^{M_T} = \frac{P\left(be \times \frac{b}{2}\right)}{2e \times \frac{2}{3}eb^3} + \frac{\frac{Pb}{2}}{2b^2e} = \frac{3}{8}\frac{P}{eb} + \frac{P}{4eb} = \frac{5}{8}\frac{P}{eb}\ (\downarrow)$$

Paralelepípedo de tensão:



$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5/8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{P}{eb}$$

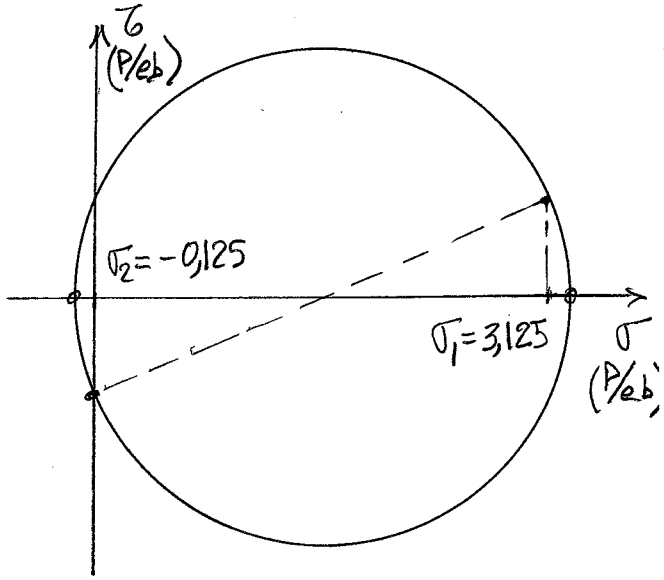
c) Tensões principais

$$\sigma_{1,2} = \frac{\frac{3P}{eb} + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3P}{2eb}\right)^2 + \left(\frac{5P}{8eb}\right)^2} =$$

$$= \frac{3P}{2eb} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{64}}\ \frac{P}{eb} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{8}$$

$$\sigma_1 = \frac{25}{8}\frac{P}{eb} = 3{,}125\frac{P}{eb}$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{8}\frac{P}{eb} = -0{,}125\frac{P}{eb}$$



d) Vetor tensão em ACDE

$$\hat{\underset{\sim}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{j} + \hat{k}) \qquad \underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n}) = \underline{T}\,\underset{\sim}{n} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5/8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{P}{\sqrt{2}eb} = \begin{bmatrix} -5/8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{P}{\sqrt{2}eb}$$

Logo, $\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n}) = -\frac{5}{8\sqrt{2}}\frac{P}{eb}\underset{\sim}{i}$

$\sigma = \underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n}) \cdot \underset{\sim}{n} = 0$

$\tau = \frac{5}{8\sqrt{2}}\frac{P}{eb}$