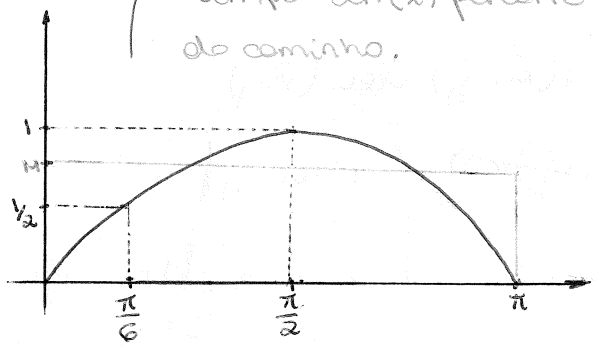
MAT 2455 - Cálculo 3

Aula 1 - Possani

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

Em menos de metade do tempo sen(x) percorre metade do caminho.



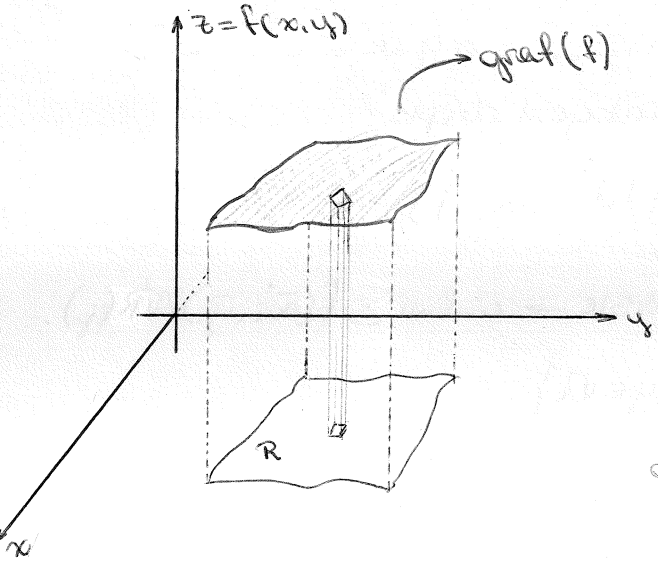
→ O valor medio da função é aquele que, sobre a mesma base $[0, \pi]$ vai realizar o mesmo valor que a função seno realize variando.

• Conceito de média: A media de uma função é um valor que se ficasse fixo sobre o mesmo intervalo geraria uma figura com a mesma área que o que tem de baixo do grafico da função.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = M(\pi - 0) \rightarrow -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2 \qquad M = \frac{2}{\pi}$$

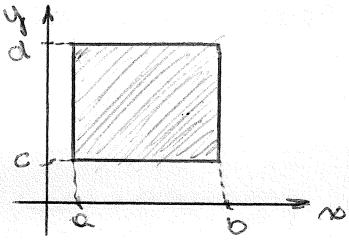
$$\text{Valor médio} = \frac{\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx}{\pi}$$

Aula 2 - Possani



Retângulo de lados paralelos aos eixos:

$R = [a, b] \times [c, d]$

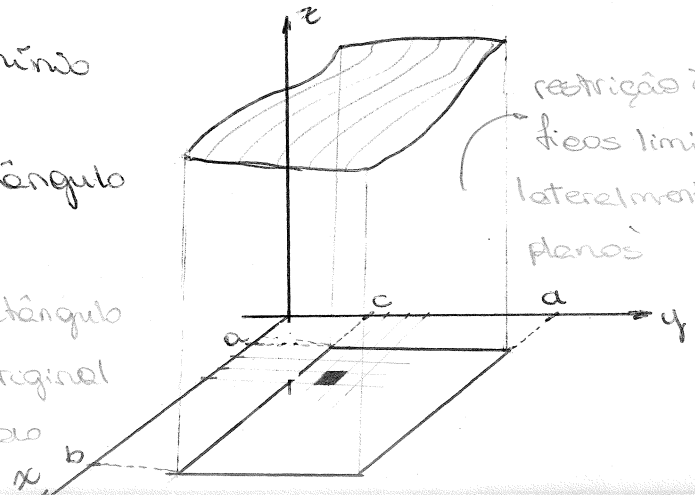


↳ O domínio como produto cartesiano de dois domínios é muito restrito. Só seria possível trabalhar com figuras de lados retos.

A primeira restrição, portanto será: domínio limitado:

Def: $D \subset \mathbb{R}^2$ é limitado se existe retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$, com $D \subset R$

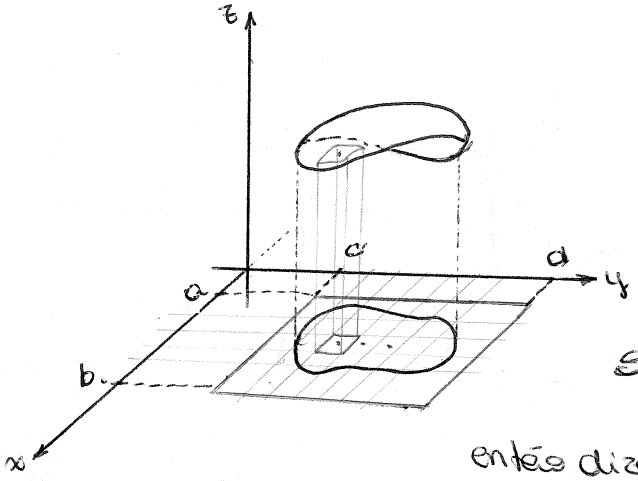
↳ Inserir um domínio não retângulo em um retângulo e crio uma nova função, coincidente com a original no domínio e vale zero fora, não introduzindo novos retângulos



restrição à gráficos limitados lateralmente por planos

Assim, dada $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitada e com D limitado em $\mathbb{R}^2$. $D \subset R$, retângulo

Tomemos partição de $[a,b]$ e de $[c,d]$ $\quad$ * $|P| \to$ diâmetro da partição



Escolho $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in R_{ij}$

$$\sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot \text{área}(R_{ij})$$

$$\left(\text{se } (\bar{x}_i, \bar{y}_j) \notin D \to f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0\right)$$

Se existir e for finito o $\lim\limits_{|P| \to 0} \sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \cdot A(R_{ij})$

então dizemos que f é integrável em D.

Notação: $\iint\limits_D f(x,y)\, dA$ ou $\iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy$

Aula 3 - Possani

Obs: propriedades operatórias são as usuais para integrais de 1 variável

* A integral de 2 variáveis nesse curso é uma passagem natural da integral de uma variável

Aplicação:

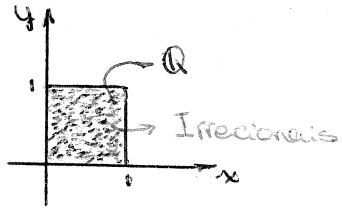
Duas perguntas: quando que um conjunto tem área e o que é a área?

quando é possível usar a integral dupla?

Sendo $D \subset \mathbb{R}^2$ a área de D é $\text{área}(D) = \iint\limits_D 1\, dA$, se $\iint$ existir.

- Conjuntos que não possuem área: $\iint$ não existe $\to$ o $\lim \sum f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) A(R_{ij})$.

↳ Ex: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1;\ x, y \in \mathbb{Q}\}$



$$\exists \lim_{|P| \to 0} \sum f(x_i, y_j) A(R_{ij})$$ → função descontínua (oscilante)

(oscilam entre 0 e 1)

$$\text{área}(D) = 0 \longrightarrow \iint\limits_D 1\, dx\, dy = 0$$

→ Integral de 1 variável: Se a f tiver um número finito de descontinuidades, ela é integrável.

→ Integral dupla: As descontinuidades podem ser infinitas. A condição é que o conjunto dos pontos de descontinuidade e a fronteira do domínio possuem área 0.

Teo: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitada se:

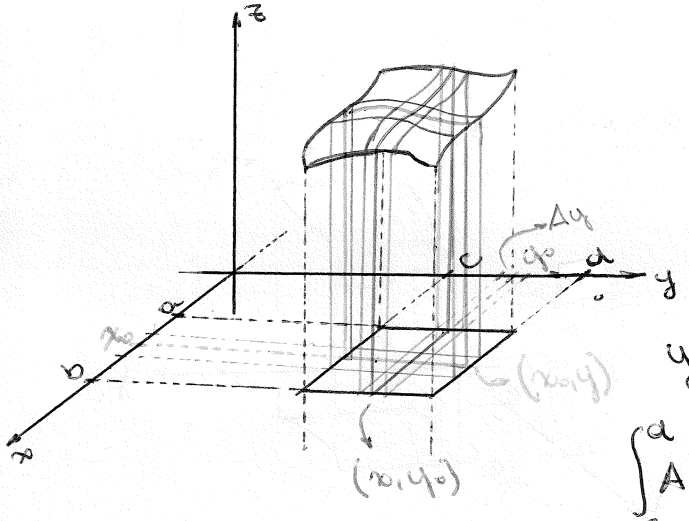
- a fronteira de D tiver área zero
- o conjunto das descontinuidades de D tiver área zero

Então existe: $\iint_D f(x,y)\, dA$

Aula 4 - Rossini

Teorema de Fubini (integrais iteradas)

- Para retângulos (pensando sempre em lados paralelos aos eixos)



$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

$y_0 \in [c,d] \to A(y_0)$ = área secção

$A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\, dx$

$y \in [c,d] \to A(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$

$\int_c^d A(y)\, dy = *$

Sob "condições": $\iint f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d A(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy$

Valor da função no ponto

$* \lim_{|P| \to 0} \sum_{j=1}^{n} A(y_j) \cdot \Delta y$

- Enunciado: $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ limitada e $\forall y \in [c,d]$, $A(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$ existe e que $A: [c,d] \to \mathbb{R}$ é integrável, então $\iint_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$

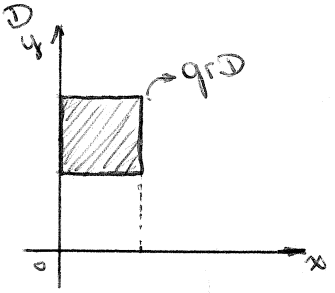
Vale versão análoga: $\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x,y)\, dy}_{A(x)}\, dx$
(apenas para retângulo)

* Quando não for um retângulo, pode só ter uma ordem possível, ou pode não ser trivial a troca de ordem.

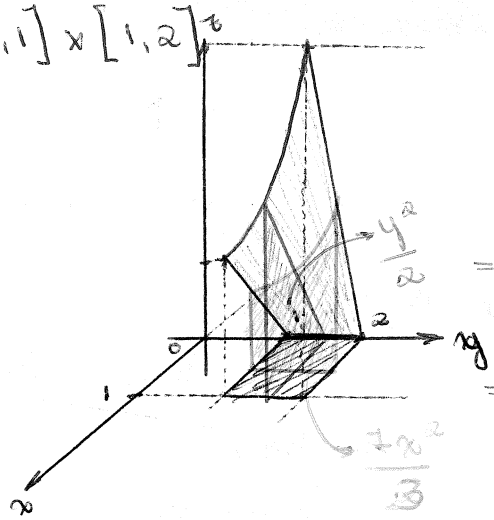
* A ordem só fica de fato determinada quando eu disser a ordem e os extremos

→ A primeira variável que eu analiso é a última que eu integro.

Ex: $\iint_D xy^2\,dA \qquad D=[0,1]\times[1,2]$



(caso retângulo)



$$\iint_D xy^2 = \int_1^2\int_0^1 xy^2\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1y^2}{2} - \frac{0y^2}{2}\,dy$$

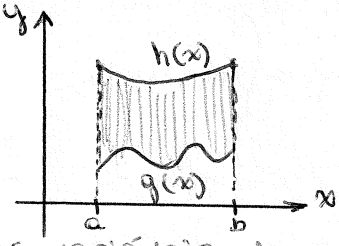
$$= \int_1^2 \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{y^3}{6}\Big|_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

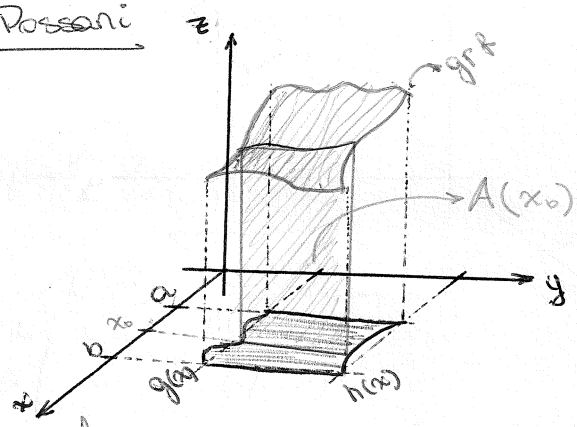
$$\iint_D xy^2\,dA = \int_0^1\int_1^2 xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{xy^3}{3}\Big|_1^2 dx = \int_0^1 \frac{8x}{3} - \frac{x}{3}\,dx = \int_0^1 \frac{7x}{3}\,dx = \frac{7x^2}{6}\Big|_0^1 = \frac{7}{6}$$

Aula 5 - Possani

• Caso geral: $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ e } g(x) \leq y \leq h(x)\}$$





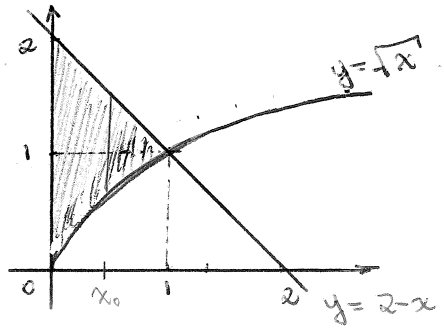
* Uma das variáveis deve variar em extremos fixos. Essa é a que será analisada primeiro e a que será integrada por último. Se ambas variarem em extremos fixos é retângulo. Se a figura for qualquer coisa diferente não pode ter as duas com extremos fixos.

$$A(x_0) = \int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0,y)\,dy \longrightarrow \forall x \in [a,b] : A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

$$\iint_D f(x,y)\underbrace{dx\,dy}_{dA} = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Aula 6

Ex (caso geral): $\iint_D (x^2-x)\,dA$, sendo D a região limitada pelos gráficos de $y=\sqrt{x}$ e $y=2-x$, com $0 \leq x \leq 1$



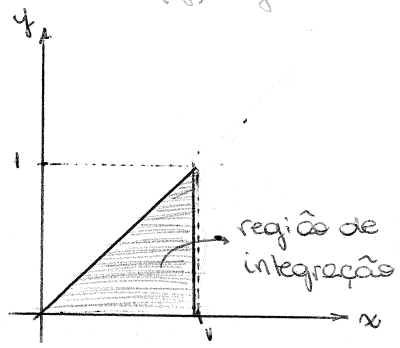
$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{2-x} (x^2-x)\,dy\,dx = \int_0^1 (x^2-2x)y\Big|_{\sqrt{x}}^{2-x} dx$$

$$\int_0^1 -x^{5/2} + 2x^{3/2} - x^3 + 4x^2 - 4x\,dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{7}\Big|_0^1 = -\frac{169}{420}$$

Ex1: $\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy$ $\quad y \to x(y)=y$

Aula 7



Invertendo a ordem de integração:

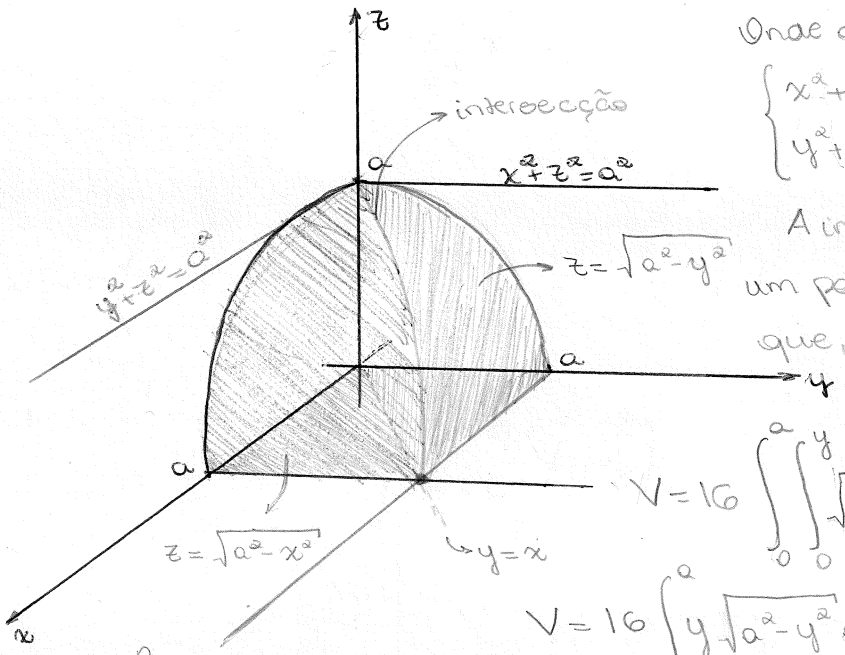
$x \to y(x)=x$

$$\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 e^{x^2}y\Big|_0^x dx = \int_0^1 x e^{x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \underbrace{2x}_{f'}\underbrace{e^{x^2}}_{f}dx}_{\int f' e^f df} = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Aula 8

Ex 2: Calcule o volume do sólido definido por $x^2+z^2\leq a^2$, $y^2+z^2\leq a^2$ $(a>0)$



Onde os dois cilindros se encontram:

$$\begin{cases} x^2+z^2=a^2 \\ y^2+z^2=a^2 \end{cases} \longrightarrow y^2=x^2 \to y=\pm x$$

A interseção dos dois cilindros NÃO É um par de retas, é uma curva no espaço que, se projetada no plano Oxy cai nessa reta

$$V = 16\int_0^a\int_0^y \sqrt{a^2-y^2}\,dx\,dy = 16\int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,x\Big|_0^y dy$$

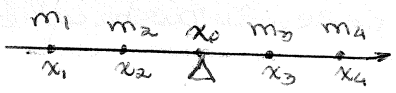
$$V = 16\int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$a^2-y^2=u \to du=-2y\,dy$

$y=0 \to u=a^2$; $y=a \to u=0$

$$V = 16\int_{a^2}^0 -\frac{\sqrt{u}}{2}\,du = -8\cdot\frac{2}{3}u^{2/3}\Big|_{a^2}^0 = \frac{16}{3}a^3$$

Aula 9



$$M_{x_0} = \sum m_i(x_i-x_0)$$

$$M_{x_G} = 0$$

$$\sum (x_i-x_G)m_i = 0$$

$$\sum m_i x_i - \sum x_G m_i = 0$$

$$\sum m_i x_i = x_G \sum m_i$$

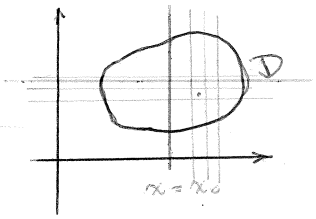
$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M_{x=0}}{m_t}\ *$$

* se $x_0=0$ (origem): $M_{x_0=0}=\sum m_i x_i$

Aplicação:

$D\subset\mathbb{R}^2$ placa com $\delta: D\to\mathbb{R}$

$\delta(x,y)$ = densidade superficial



$$\sum_{i,j}(x_i-x_0)\cdot\delta(x_i,y_j)\cdot \text{área}(R_{ij})$$

$$M_{x=x_0} = \iint_D (x-x_0)\cdot\delta(x,y)\,dA$$

$$M_{y=y_0} = \iint_D (y-y_0)\,\delta(x,y)\,dA$$

(x_G, y_G) é o centro de gravidade de D se e só se $M_{x=x_G}=0$ e $M_{y=y_G}=0$

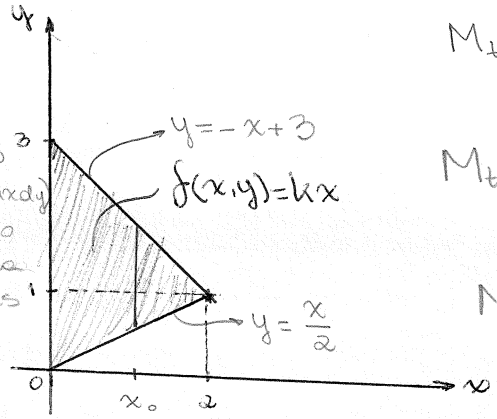
$$\iint_D x\,\delta(x,y)\,dA = x_G \iint_D \delta(x,y)\,dA \qquad y_G = \frac{\iint y\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint \delta(x,y)\,dx\,dy} = \frac{M_{y=0}}{M_t}$$

(igualando a zero)

$$x_G = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy} = \frac{M_{x=0}}{M_t}$$

Aula 10

Ex 3: Centro de gravidade do triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,3)$ $(2,1)$ com densidade proporcional à abscissa do ponto, ou seja $\delta(x,y) = kx$



Se fosse feito ao contrário (dxdy) seria necessário dividir em uma soma de integrais de $[0,1]$ e $[1,3]$

$$M_t = \iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{x/2}^{-x+3} kx\,dy\,dx$$

$$M_t = \int_0^2 kxy \Big|_{\frac{x}{2}}^{-x+3} dx = k\int_0^2 -x^2 + 3x - \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$M_t = k\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2 = k\left(-\frac{8}{3} + 6 - \frac{8}{6}\right) = 2k$$

$$M_{x=0} = \iint_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^{-x+3} k.x.x.\,dy\,dx = k\int_0^2 x^2 y \Big|_{\frac{x}{2}}^{-x+3} dx = k\int_0^2 -x^3 + 3x^2 - \frac{x^3}{2}\,dx$$

$$= k\left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^4}{8}\right)\Big|_0^2 = 2k \longrightarrow \underbrace{x_G = \frac{2k}{2k} = 1}\ \text{e}\ y_G = \frac{\iint_D y\,kx\,dA}{2k}$$

$\therefore$ 1 — Tem mais área antes de $x_G = 1$ e mais massa depois, equilibrando

Aula 11

Mudança de variáveis

* É importante ter o significado geométrico da mudança em mente, não basta aplicar fórmula como no cálculo 1.

Observações preliminares

1. Em uma variável:

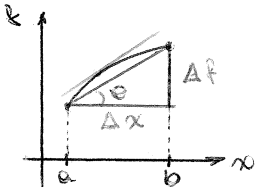
$$\int_a^b f(x)\,dx \;;\; x = g(u) \qquad dx = g'(u)\,du$$

$$\int_c^d f(g(u)).\underbrace{g'(u)}\,du \qquad g(c) = a \quad g(d) = b$$

fator local de correção de comprimento dos "intervalinhos".

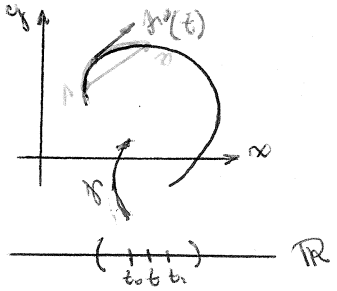
2. Teorema do Valor Médio:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



3. Curvas

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$



$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

continuação curvas

$A(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$

$B(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$

Arco $\widehat{AB} \approx \overrightarrow{AB}$ (para $t_1 - t_0$ pequeno)

$= (x(t_1) - x(t_0), y(t_1) - y(t_0))$

$\overset{TVM}{=} (x'(\bar{t})\underbrace{(t_1 - t_0)}_{\Delta t}; y'(\bar{t})(t_1 - t_0))$

$\approx (x'(\bar{t}); y'(\bar{t}))\Delta t = \gamma'(\bar{t}).\Delta t$

* O Δt ajusta o $\gamma'(\bar{t})$ para o tamanho do arco.

4. Produto vetorial

$\vec{u}, \vec{v}$ – vetores no $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

b)

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\text{sen}\theta$

= área do paralelogramo

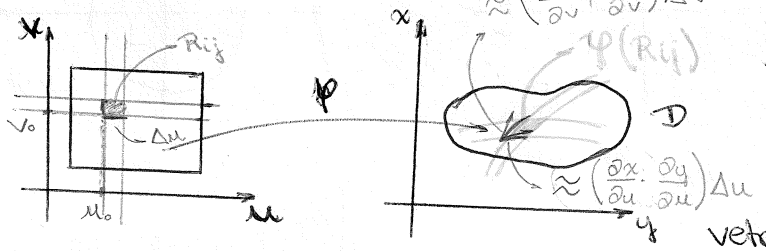
c) Em $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Aula 12

Mudança de variável

→ Usada quando o domínio é muito difícil de se trabalhar para um mais tranquilo para integrar



$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$u \to \varphi(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0))$

$v \to \varphi(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v))$

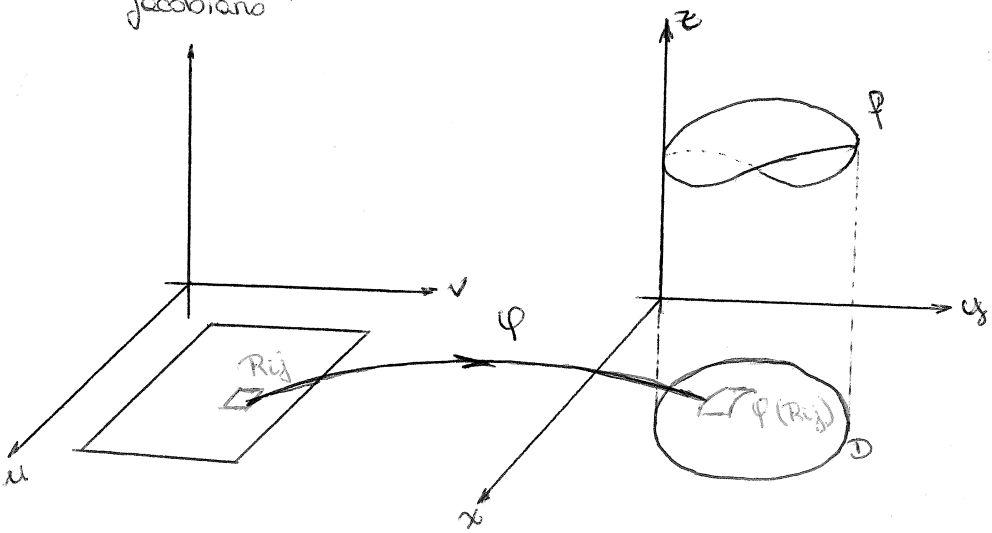
vetor tangente (u) $= \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v_0)\right)$

Vetor tangente (v) $= \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v)\right)$

$$\text{Área}(\varphi(R_{ij})) \approx \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta u \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Delta v \right\|$$

$$= \left| \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}_{\text{Jacobiano}} \right| \Delta u . \Delta v = |\text{Jac}| . \text{área}(R_{ij})$$

* $|\text{Jac}|$ – fator de correção de área



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)\,\text{área}\,\varphi(R_{ij})$$

$$\approx \sum_{i,j} f(\varphi(u_i, v_j)).|\text{Jac}|.\text{área}(R_{ij})$$

Teorema: $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua ; $\varphi: R \to D$

1. φ é de classe $\mathcal{C}^1$
2. $\det(\text{Jac}\,\varphi) \neq 0$ no interior de R e φ injetora*

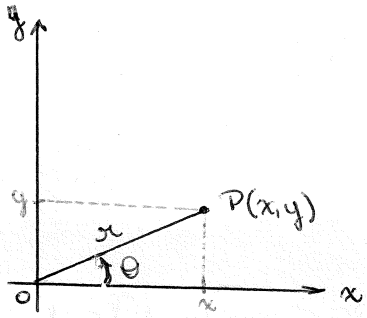
Então: $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(\varphi(u,v))\,|\text{Jac}|\,du\,dv$$

* A φ tem que preservar o mínimo de equivalência de áreas (ela não pode levar tudo numa região sem área) pois senão a mudança não vale.

Aula 13

Exemplo 1: Coordenadas Polares

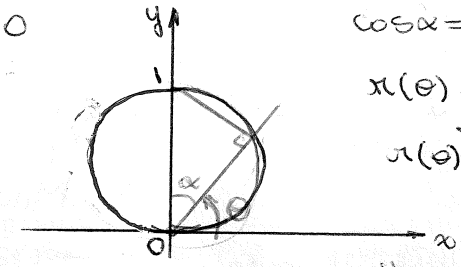
* $r \to$ distância no plano $\rho \to$ distância no espaço



$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad r \geq 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$

$r(\theta) = \text{sen}\,\theta$



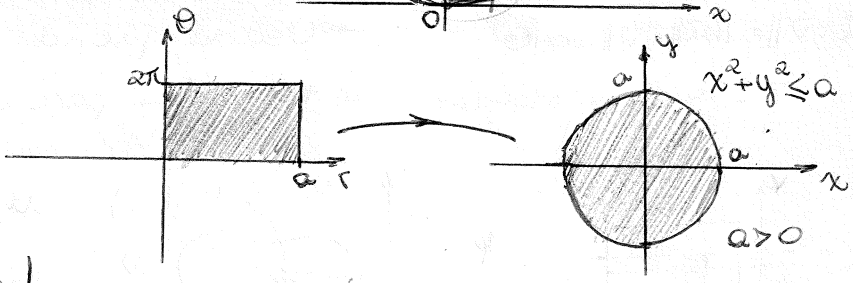
$\cos\alpha = \dfrac{r(\theta)}{1}$

$r(\theta) = \cos\alpha$

$r(\theta) = \text{sen}\,\theta$

$x(r,\theta) = r\cos\theta \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$

$y(r,\theta) = r\,\text{sen}\,\theta \qquad 0 \leq r \leq a$



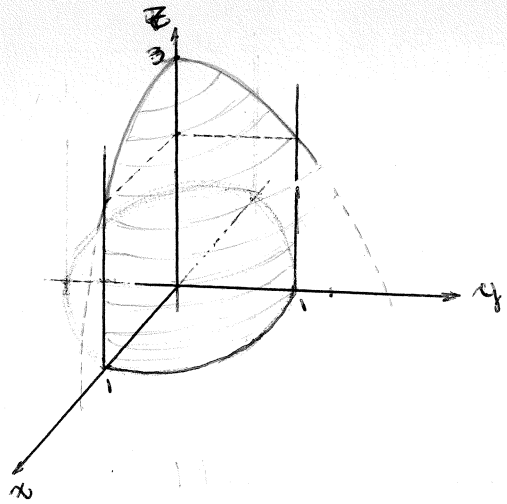
$$\text{Jac}\,\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

A ordem (r,θ) ou (θ,r) muda o sinal do Jacobiano, mas na fórmula entra o módulo do Jacobiano.

Aula 14

Ex1: Calcule o volume do sólido dado por $\underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{\text{domínio } D}$; $0 \leq z \leq \underbrace{3-x^2-y^2}_{\text{função integranda}}$

parabolóide de revolução



$$\iint_{\substack{D \\ x^2+y^2 \leq 1}} 3-x^2-y^2\,dx\,dy \longrightarrow$$

Escrevendo em coordenadas cartesianas:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3-x^2-y^2\,dy\,dx$$

Mudança de variável:

$x = r\cos\theta \qquad 0 \leq r \leq 1$

$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\text{Jac}\,\varphi = r$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (3-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^1 3r - r^3\,dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{5\pi}{2}$$

Aula 15

Coordenadas Polares

Exemplo 2: $x^2+y^2 \leq a^2$

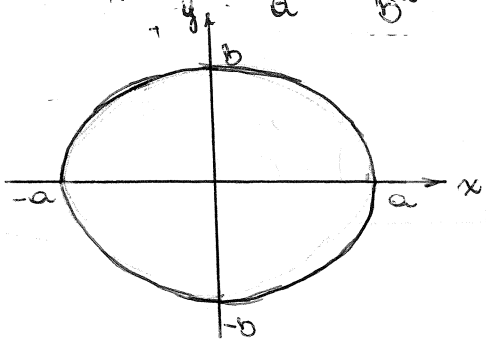
$$\begin{cases} x = ar\cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = ar\,\text{sen}\,\theta & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Jac}\,\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = a^2 r$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos\theta & a\,\text{sen}\,\theta \\ -ar\,\text{sen}\,\theta & ar\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r,\theta)\,a^2 r\,dr\,d\theta$$

Exemplo 3: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$



$x = ar\cos\theta$

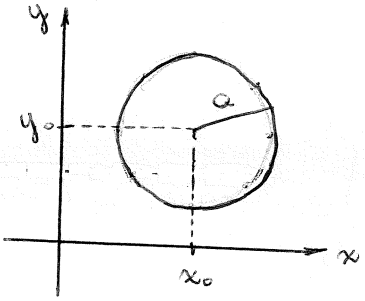
$y = br\,\text{sen}\,\theta$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq 1$

$\text{Jac}\,\varphi = abr$

Exemplo 4:



$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq a^2$

$x = x_0 + r\cos\theta$

$y = y_0 + r\,\text{sen}\,\theta$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq r \leq a$

$\text{Jac}\,\varphi = r$

Aula 16

Exemplo 5: $x^2+y^2-2ay \leq 0$

Completar quadrados:

$x^2+y^2-2ay+a^2 \leq a^2$

$x^2+(y-a)^2 \leq a^2$

i) $x = r\cos\theta$

$y = a + r\,\text{sen}\,\theta$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq a$

$\text{Jac}\,\varphi = r$

ii) $x = r\cos\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq \pi$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad 0 \leq r \leq 2a\,\text{sen}\,\theta$

$\cos\alpha = \frac{r(\theta)}{2a}$ $\quad x^2+y^2-2ay \leq 0$

$r(\theta) = 2a\cos\alpha$ $\quad r^2 - 2ar\,\text{sen}\,\theta \leq 0$

$r(\theta) = 2a\,\text{sen}\,\theta$ $\quad r \leq 2a\,\text{sen}\,\theta$

$\text{Jac}\,\varphi = r$

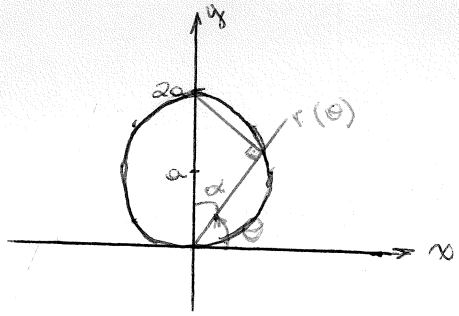
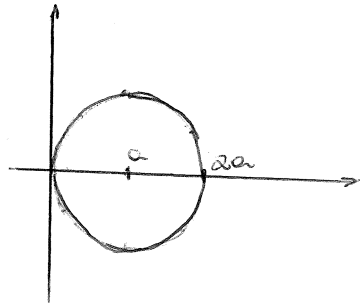


gráfico referente a essa parametrização

Exemplo 6: $x^2+y^2-2ax \leq 0$



i) $x = a + r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq r \leq a$

$\text{Jac} = r$

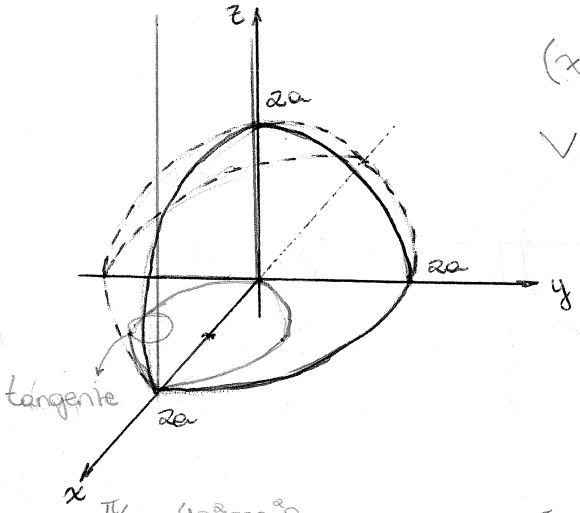
ii) $x = r\cos\theta$ $\quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $\quad 0 \leq r \leq 2a\cos\theta$

$\text{Jac}\,\varphi = r$

Aula 17

Ex: Volume do sólido no interior de $x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2$ e no interior de $x^2-2ax+y^2 \leq 0$



$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

$$V = 2\iint_{D_{xy}} \sqrt{4a^2-x^2-y^2} = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

Mudança 1:

$x = r\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad 0 \leq r \leq 2a\cos\theta$

$\text{Jac}\,\varphi = r$

Mudança 2:

$4a^2-r^2 = u \rightarrow -2r\,dr = du$

$r=0 \rightarrow u = 4a^2$

$r = 2a\cos\theta$

$\hookrightarrow u = 4a^2\,\text{sen}^2\theta$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{4a^2}^{4a^2\text{sen}^2\theta} -\frac{1}{2}u^{1/2}\,du\,d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u^{2/3}\cdot\frac{2}{3}\Big|_{4a^2}^{4a^2\text{sen}^2\theta} d\theta = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(8a^3|\text{sen}^3\theta| - 8a^3\right)\frac{2}{3}\,d\theta$$

$$= -\frac{16a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\text{sen}^3\theta| - 1\,d\theta \overset{*}{=} -\frac{32a^3}{3}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\theta - 1\,d\theta = \frac{-32a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta\cos^2\theta - 1\right)d\theta$$

$$= -\frac{32a^3}{3}\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} - \theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{32a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

Aula 18

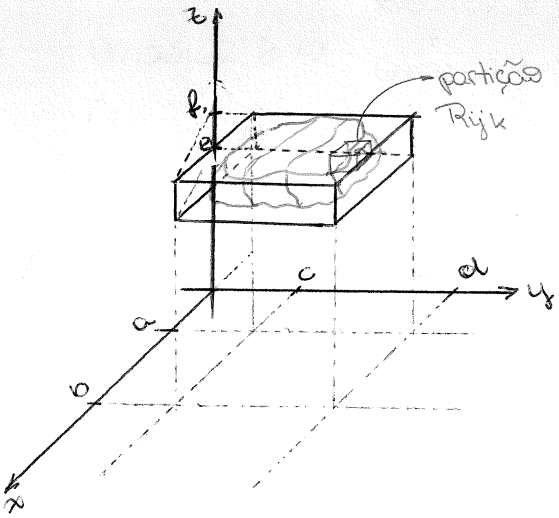
Integrais Triplas

$f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$D \subset [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$: ...

$\mathcal{P}$ = partição

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k)\cdot \text{volume}(R_{ijk})$$



Se a soma acima possuir limite finito, então a f é integrável em D.

$$\underbrace{\iiint_D f(x,y,z)\,dV \quad \text{ou} \quad \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{\text{notação}}$$

Se existe $\iiint_D 1\,dv$, então D tem volume e

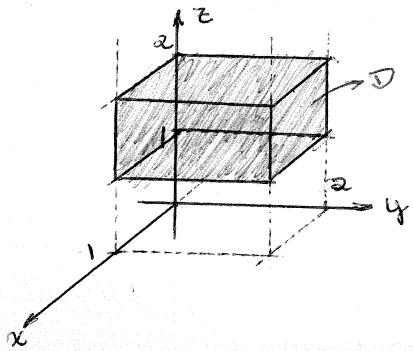
$$\text{volume}(D) = \iiint_D 1\,dv$$

Teorema de Fubini para paralelepípedos

$f: D=[a,b]\times[c,d]\times[e,f] \to \mathbb{R}$ integrável

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_c^d\int_e^f\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

Ex: Calcule $\iiint xyz\,dV$ sobre $[0,1]\times[0,2]\times[1,2]$



$$\int_1^2\int_0^2\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz = \int_1^2\int_0^2 \frac{x^2}{2}yz\Big|_0^1 = \int_1^2\int_0^2 \frac{yz}{2}\,dy\,dz$$

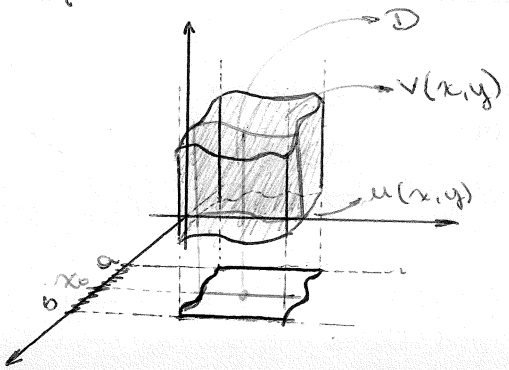
$$= \int_1^2 \frac{y^2z}{4}\Big|_0^2 dz = \int_1^2 z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$

Aula 19

Teorema de Fubini (caso geral)

$f: D\subset\mathbb{R}^3$, D limitado, f integrável

$$D=\{(x,y,z)\mid a\le x\le b;\ g(x)\le y\le h(x);\ u(x,y)\le z\le v(x,y)\}$$

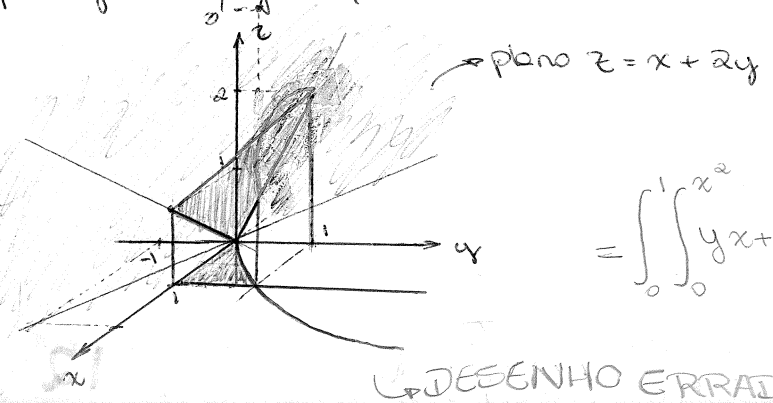


1. Hipótese: $\forall x_0\in[a,b]$ existe

$$\iint_{D_{y,z}} f(x_0,y,z)\,dy\,dz$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Ex: $\iiint_D y\,dx\,dy\,dz$, onde D está abaixo de $\underbrace{z=x+2y}_{\text{ver a interseção com os planos do sistema cartesiano}}$ (plano superior); acima de x,y; limitado por $y=x^2$; $y=0$; $x=1$



↳ DESENHO ERRADO

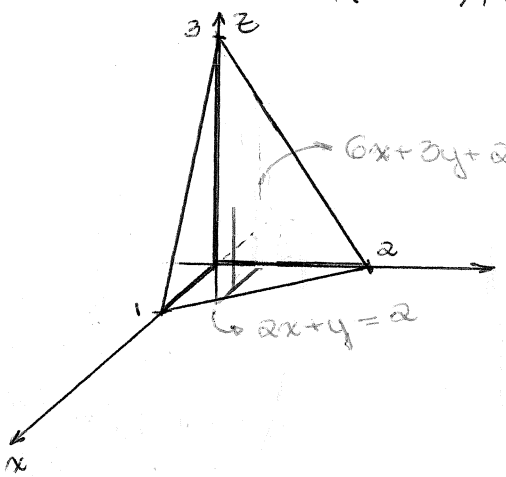
Aula 20

$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{x+2y} y\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{x^2} y\cdot z\Big|_0^{x+2y} dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{x^2} yx+2y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{xy^2}{2}+\frac{2y^3}{3}\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^5}{2}+\frac{2x^6}{3}\,dx$$

$$= \frac{x^6}{12}+\frac{2x^7}{21}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}+\frac{2}{21} = \frac{15}{84} = \frac{5}{28}$$

Ex 2: Escreva a integral iterada de $\iiint_V f(x,y,z)\,dV$, sendo V a pirâmide de vértices $(0,0,0)$; $(1,0,0)$; $(0,2,0)$; $(0,0,3)$



$$\int_0^2\int_0^{\frac{2-y}{2}}\int_0^{\frac{6-6x-3y}{2}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

* Como achar a equação do plano

$ax+by+cz+d=0$

p/ $y=0$ e $z=0$: $a+d=0$

p/ $x=0$ e $y=0$: $3c+d=0$

p/ $x=0$ e $z=0$: $2b+d=0$

(a,b,c,d)

$\left(-d, \frac{-d}{2}, \frac{-d}{3}, d\right)$

Se $d=-6$: $(6,3,2,-6)$

Aula 21

Mudança de variáveis em Integral tripla

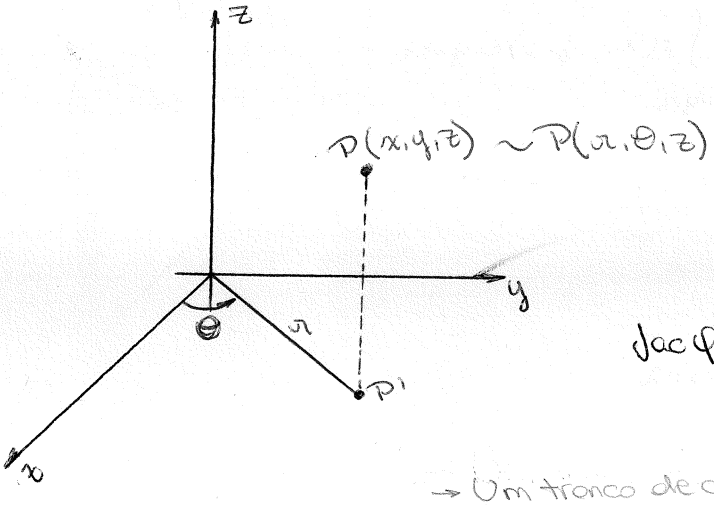
$$\varphi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

$$\text{Jac}\,\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$\iiint_{D_{x,y,z}} f(x,y,z)\,dV_{x,y,z} = \iiint_{D_{u,v,w}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |\text{Jac}\,\varphi|\,dV_{u,v,w}$$

Exemplos: 1. Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ r \ge 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

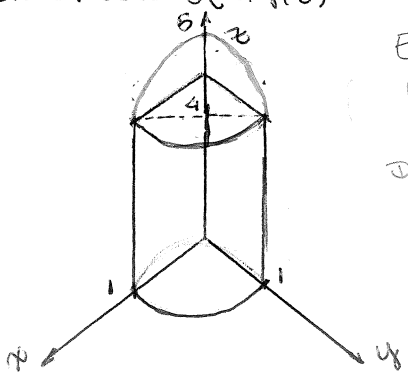


→ Nas coordenadas cilíndricas, aplica-se coordenadas polares e mantém-se a altura.

$$\text{Jac}\,\varphi = \begin{vmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

→ Um tronco de cilindro em coordenadas cartesianas é um paralelepípedo em coordenadas cilíndricas

Ex: Calcular massa de $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le 5-x^2-y^2$ — parabolóide de revolução com densidade $\delta(x,y,z) = x^2+y^2$



Em cartesianas:

$$\iiint_{D_{x,y,z}} x^2+y^2\,dV$$

Em cilíndricas:

$0 \le \theta \le 2\pi$

$0 \le r \le 1$

$0 \le z \le 5-r^2$

$\text{Jac}\,\varphi = r$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{5-r^2} r^2 \cdot r\,dz\,dr\,d\theta =$$

Em θ é tudo constante ∴

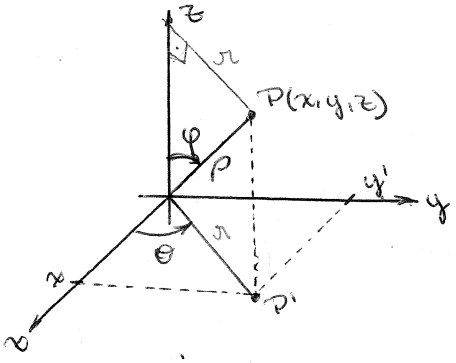
$$2\pi\int_0^1 r^3 z\Big|_0^{5-r^2} dr =$$

$$2\pi\int_0^1 (5r^3 - r^5)\,dr =$$

$$2\pi\left(\frac{5r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{113\pi}{6}$$

Aula 22

2. Coordenadas Esféricas



$\rho = d(P,O) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\rho \geq 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$; $0 \leq \varphi \leq \pi$ → o valor de φ vai até o z negativo.

$x = r\cos\theta$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$
$r = \rho\,\text{sen}\,\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\text{Jac}\,\varphi_* = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi_*} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\varphi\cos\theta & \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta & \cos\varphi \\ -\rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta & \rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta & 0 \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta & -\rho\,\text{sen}\,\varphi \end{vmatrix}$$

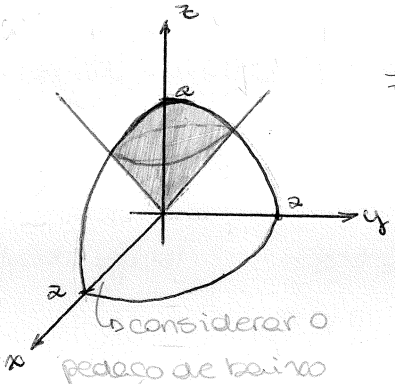
$$= -\rho^2\text{sen}^3\varphi\cos^2\theta - \rho^2\text{sen}\,\varphi\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\theta - \rho^2\text{sen}\,\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta - \rho^2\text{sen}^3\varphi\,\text{sen}^2\theta$$

$$= -\rho^2\text{sen}^3\varphi - \rho^2\text{sen}\,\varphi\cos^2\varphi = -\rho^2\text{sen}\,\varphi \rightarrow |\text{Jac}\,\varphi| = \rho^2\text{sen}\,\varphi$$

* NÃO É O MESMO φ, um é função o outro é ângulo.

Aula 23

Ex: massa de $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $\underbrace{z^2-x^2-y^2 \geq 0}_{\text{cone}}$, com densidade $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



→ considerar o pedaço de baixo também.

$z^2 = x^2+y^2$ → checar como intercepta os planos coordenados.

p/ $x=0 \rightarrow z = \pm y$
p/ $y=0 \rightarrow z = \pm x$
} bissetrizes dos quadrantes

p/ $z = c$ → curvas de nível: circunferencias

$$\text{Massa} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} \rho \cdot \rho^2\,\text{sen}\,\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^4\,\text{sen}\,\varphi}{4}\Big|_0^2 d\varphi = 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\,\varphi\, d\varphi = 16\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= 16\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Em coordenadas esféricas

$x = \rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta$ $\quad 0 \leq \rho \leq 2$
$y = \rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
$z = \rho\cos\varphi$

Substituir por: $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ e $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$

multiplicar a integral por 2

Aula 24

* OBS:

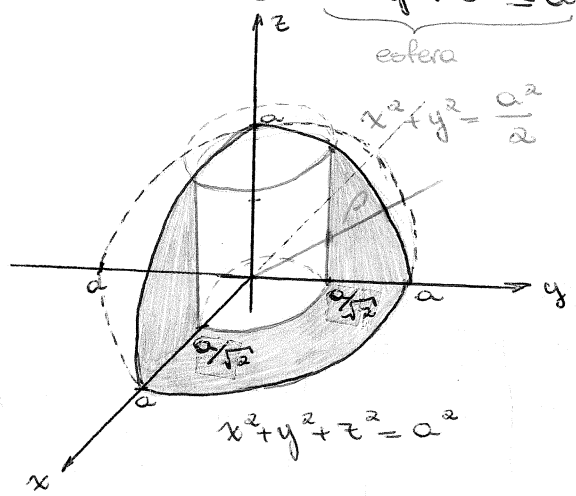
→ Cartesianas:

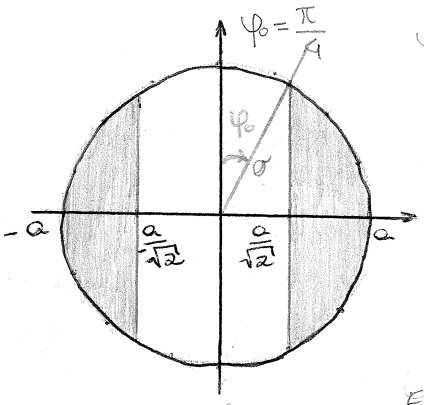
$$2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

→ Cilíndricas:

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

Ex 2: Volume de $\underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq a^2}_{\text{esfera}}$; $\underbrace{x^2+y^2 \geq \frac{a^2}{2}}_{\text{cilindro}}$





$$\cos\varphi_0 = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi = \frac{a^2}{2}$$

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi}$$

Cilíndricas: $Jac = r$

$x = r\cos\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$y = r\operatorname{sen}\theta$ $\quad \frac{a}{\sqrt{2}} \leq r \leq a$

$z = z$ $\quad -\sqrt{a^2-r^2} \leq z \leq \sqrt{a^2-r^2}$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} 1 . r . dz\, dr\, d\theta$$

Esféricas: $Jac = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

$x = \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$y = \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$ $\quad \pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$

$z = \rho\cos\varphi$ $\quad \frac{a}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi} \leq \rho \leq a$

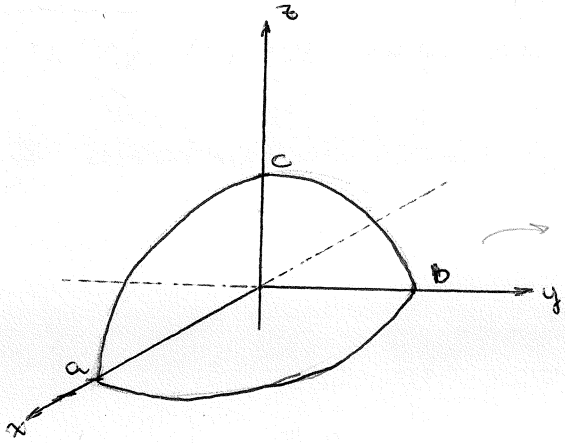
$$V = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{\frac{a}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi}}^{a} 1 . \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Aula 25

(parte do ex 2 e ex 3)

Ex 3: Volume do elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1$

*Só é elipsoide de revolução aquele em que uma elipse é girada em torno de um eixo e, portanto, a projeção em um dos planos é uma circunferencia. Quando nenhuma das projeções é, não é de revolução.



As coordenadas esféricas usuais não se aplicam, precisa de uma modificação:

$x = a\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ $\quad Jac\varphi = abc\rho^2\operatorname{sen}\varphi$

$y = b\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$ $\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$z = c\rho\cos\varphi$ $\quad 0 \leq \rho \leq 1$

$$V = \iiint_D 1\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} abc\rho^2\operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 2\pi abc\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1 d\varphi = \frac{2\pi abc}{3}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi abc}{3}\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi abc}{3}$$