I) Polinomios Ortogonais (MMQ)

Podemos aproximar uma função $f \in C[a,b]$ por polinômios, utilizando o MMQ na forma contínua como estamos acostumados. Lembrando que o problema consiste em minimizar o erro $E = \int_a^b [f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{P(x)}]^2 dx$. Para isso, fazemos $\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial E}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial E}{\partial a_m} = 0$, ou seja, estamos projetando a função real no subespaço gerado pelos polinômios. No entanto, muito provavelmente, se apenas aplicarmos o MMQ no caso contínuo cairemos num sistema $(n+1)\times(n+1)$ com coeficientes da matriz normal iguais a $\langle x^j, x^k \rangle = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}$. Esses coeficientes compõe a matriz de Hilbert que é conhecidamente mal condicionada (erros de aproximação serão muito grandes).

Definição: diz-se que o conjunto de funções $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ é linearmente independente em $[a,b]$, se para todo $x \in [a,b]$, temos

$c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi = 0$ se, e somente se, $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. Caso contrário, diz-se que o conjunto de funções é linearmente dependente.

Teorema 1: se $\phi_j(x)$ for um polinômio de grau j, para cada $j = 0, \dots, n$, então $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ é L.I. em qualquer intervalo $[a,b]$.

O teorema a seguir é uma forma geral do teorema 1

Teorema 2: seja Π_n o conjunto de todos os polinômios de grau no máximo n. Se $\{\phi_0(x), \dots, \phi_n(x)\}$ for um conjunto de polinômios LI em Π_n, então qualquer polinômio em Π_n pode ser escrito de forma única como combinação linear de $\phi_0, \dots, \phi_n$.

A definição a seguir é da função peso. Esta função é ~~basicamente~~ importante, pois, atribui graus variados de importância a aproximações em certas partes do intervalo.

Exemplo. $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ atribui maior peso quando $|x|$ estiver próximo de 1 do que quando $|x|$ está próximo ao centro.

Definição: uma função integrável w é chamada função peso em um intervalo I se $w(x) \geq 0$, $\forall x \in I$ e não existe subintervalo em $\cup C I$ tq. $w(x) = 0$, $\forall x \in$ ~~I~~.

Assim, todos estes conceitos, para não cair na matriz de Hilbert, devemos encontrar polinômios ortogonais: → produto escalar no espaço todo é igual a zero, para valores distintos.

$$\int_a^b w(x)\,\phi_k(x)\,\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ \alpha, & \text{se } j = k \end{cases}$$

↳ se $\alpha = 1$ os polinômios são ortonormais.

Isto significa que teremos um sistema normal do tipo:

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \phi_n \rangle \end{bmatrix}$$

O teorema seguinte mostra como chegar nos polinômios ortogonais e se baseia no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Teorema 3: o conjunto de funções polinomiais $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ definido da seguinte forma é ortogonal no intervalo $[a,b]$ em relação a função peso w:

$\phi_0 = 1$, $\phi_1 = x - \beta_1$, para cada $x \in [a,b]$

em que $\beta_1 = \dfrac{\int_a^b x\, w(x)\,[\phi_0(x)]^2\,dx}{\int_a^b w(x)\,[\phi_0(x)]^2\,dx}$

e, quando $k \geq 2$,

$\phi_k(x) = (x - \beta_k)\,\phi_{k-1}(x) - \alpha_k \phi_{k-2}(x)$, para cada $x \in [a,b]$, em que

$$\beta_k = \frac{\int_a^b x\, w(x)\,[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx}{\int_a^b w(x)\,[\phi_{k-1}(x)]^2\,dx}$$

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b x\, w(x)\,\phi_{k-1}(x)\,\phi_{k-2}(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,[\phi_{k-2}(x)]^2\,dx}$$

Polinômios construídos desta forma são l.i. em $[a,b]$!

Polinômios especiais:

- Polinômio de Legendre: $w(x) = 1$, $I = [-1, 1]$
- Polinômio de Laguerre: $w(x) = e^x$, $I = [0, \infty)$

Exemplo (polinômio de Legendre):

$P_0(x) = 1$

$\beta_1 = \dfrac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1 \cdot 1^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1^2\,dx} = 0 \Rightarrow P_1(x) = x - 0 = x$

$\beta_2 = \dfrac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0$ e $\alpha_2 = \dfrac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_2(x) = (x - \beta_2)\,P_1(x) - \alpha_2 P_0(x) =$

$= (x-0)\,x - \dfrac{1}{3} \cdot 1 = x^2 - \dfrac{1}{3}$ $\quad \forall x \in I$

$P_3 = x^3 - \dfrac{3}{5}x$ e $P_4(x) = x^4 - \dfrac{6}{7}x^2 + \dfrac{3}{35}$

Exemplo: $w(x) = 1$ e $I = [0,1]$

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x - \beta_1$, em que $\beta_1 = \dfrac{\int_0^1 x\, w(x)\,P_0(x)\,dx}{\int_0^1 w(x)\,P_0(x)\,dx} =$

$= \dfrac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx} = \dfrac{1}{2} \therefore P_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$

$P_2(x) = (x - \beta_2)\,P_1(x) - \alpha_2 P_0(x)$

$\beta_2 = \dfrac{\int_0^1 x\, w(x)\,P_1^2(x)\,dx}{\int_0^1 w(x)\,P_1^2(x)\,dx} = \dfrac{\int_0^1 x\,(x - \frac{1}{2})^2\,dx}{\int_0^1 (x - 1/2)^2\,dx}$

$\alpha_2 = \dfrac{\int_0^1 x\, w(x)\,P_1(x)\,P_0(x)\,dx}{\int_0^1 w(x)\,P_0(x)^2\,dx} = \dfrac{\int_0^1 x\,(x - 1/2)\,dx}{\int_0^1 1^2\,dx}$

$\Rightarrow P_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$

Cada intervalo I e cada peso $w(x)$ fará uma nova família de polinômios ortogonais.

Agora que já temos o polinômio ortogonal, podemos utilizá-lo para aproximar uma função qualquer.

Teorema 4: se $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ for um conjunto de funções ortogonais em um intervalo $[a,b]$ com relação à função peso w, então a aproximação por mínimos quadrados para f em $[a,b]$ com relação a w é

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x),$$

em que, para cada $j = 0, \dots, n$,

Vem do sistema normal!

$$a_j = \frac{\langle f(x), \phi_j \rangle}{\langle \phi_j, \phi_j \rangle} = \frac{\int_a^b w(x)\,\phi_j(x)\,f(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,[\phi_j(x)]^2\,dx}$$

→ Mudança de Variável

Como, a princípio, ao mudarmos de intervalo também temos que mudar de polinômios ortogonais, seria interessante que não precisaremos realizar os calculos novamente para achar outro polinômio ortogonal. Para isso utilizamos a mudança de variável de forma a "adaptar" o polinômio ao novo intervalo.

Obs: pesos têm que ser iguais!

Basicamente a ideia é:

$$\begin{array}{c|c} b & d \\ x & g \\ a & c \end{array} \qquad \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c}$$

$$\frac{\langle g(x), h(x)\rangle}{b-a} = \frac{\langle G(y), H(y)\rangle}{d-c}$$

$$\int_a^b \underbrace{h(x)\,g(x)}_{\text{polinomios em } x} \frac{dx}{b-a} = \int_c^d \underbrace{G(y)\,H(y)}_{\text{polinomios em } y} \frac{dy}{d-c}$$

Exemplo: utilizar um polinômio p/ aproximar a função $f(t) = \text{sen}(t)$ em $[0,\pi]$, com peso $w(t) = 1$

Solução: vamos utilizar os polinomios de Legendre normalizados.

$$\begin{array}{c|c} \pi & 1 \\ t & x \\ 0 & -1 \end{array} \qquad \frac{t}{\pi} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}(x+1)$$

Polinomio de Legendre normalizado (não é necessário decorar!)

$P_0 = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$

tq. $x \in [-1,1]$

$F(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)$ em $[-1,1]$

$$a_0^* = \frac{\langle F, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1^* = \frac{\langle F, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} x\,\text{sen}\left(\pi/2\,(x+1)\right)dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0$$

$$a_2^* = \frac{\langle F, P_2\rangle}{\langle P_2, P_2\rangle} = \frac{10}{\pi}\left[1 - \frac{12}{\pi^2}\right].$$

Logo, $\phi(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + a_2^* P_2(x)$

$$\phi(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left[1 - \frac{12}{\pi^2}\right]\frac{3x^2-1}{2}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

Voltando para t:

$$t = \frac{\pi}{2}(x+1) \Rightarrow \frac{2t}{\pi} = x+1 \Rightarrow \frac{2t}{\pi} - 1 = x$$

$$\phi(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi}\left[1 - \frac{12}{\pi^2}\right]\frac{1}{2}\left[3\left(\frac{2t}{\pi} - 1\right)^2 - 1\right].$$

II) Análise Harmônica

A idéia é utilizar funções ortogonais e periódicas para aproximar funções ~~quaisquer~~ periódicas ou não. No caso vamos utilizar $\{\text{sen}\,kx\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$.

→ Caso contínuo.

Suponhamos uma função f qualquer bem definida em $[-\pi,\pi]$ e uma função g também bem definida em $[-\pi,\pi]$, sendo g um polinômio trigonométrico. Queremos aproximar f através de g no intervalo dado $[-\pi,\pi]$. Para tanto utilizaremos o MMQ na forma contínua.

A "cara" de g é conhecida e dada por:

$$\boxed{g_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k\,\text{sen}(kx)}$$

Como de costume em problemas de MMQ, devemos encontrar os coeficientes que determinam o polinômio.

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx} = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx} = \frac{\langle f, \cos kx\rangle}{\langle \cos kx, \cos kx\rangle}$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(kx)\,dx} = \frac{\langle f, \text{sen}\,kx\rangle}{\langle \text{sen}\,kx, \text{sen}\,kx\rangle}$$

d Note que esta construção nos remete a polinômios ortogonais. Logo, a_0, a_k e b_k são soluções do sistema normal, sendo $k = 1, \dots, n$.
↳ em relação a $w(x) = 1$

Caso f não estivesse no intervalo $[-\pi, \pi]$ deveríamos realizar uma mudança de variável (ver exemplo abaixo).

Lembrando:

função ímpar: $f(x) \neq f(-x) = -f(x)$

função par: $f(x) = f(x)$

Logo, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é ímpar; $f(x) = \cos x$ é par. } "Ímpar com par ímpar prevalece o ímpar!"

Se $f(x)$ for ímpar $\longrightarrow a_k = 0$

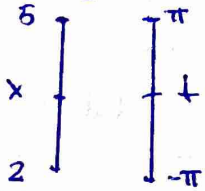
Se $f(x)$ for par $\longrightarrow b_k = 0$

Exemplo: suponha $f: [2,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ tq. $f(x) = x - \frac{7}{2}$.

Aproxime f por um polinomio trigonométrico definido em $[-\pi, \pi]$.

Solução:

Mudança de variável:



$$\frac{x-2}{3} = \frac{t+\pi}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2\pi}(t+\pi) + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3t}{2\pi} + \frac{3}{2} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3t}{2\pi} + \frac{7}{2}$$

Logo, $F(t) = f(x(t)) = \frac{3t}{2\pi}$.

é uma função ímpar!

$F(-t) = -F(t)$

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,dt = 0$$

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cdot \cos(kt) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3t}{2\pi} \cdot \operatorname{sen}(kt)\,dt = \frac{2 \cdot 1}{\pi} \cdot \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} kt\,dt =$$

(par)

$$\int t \operatorname{sen} kt\,dt = \quad \leftarrow \text{Integração por partes!}$$

$$\alpha(t) = t \therefore \alpha'(t) = 1$$

$$\beta'(t) = \operatorname{sen} kt \therefore \beta(t) = -\frac{\cos kt}{k}$$

$$= -\frac{t \cos kt}{k} + \int \frac{\cos kt}{k}\,dt =$$

$$= -\frac{t \cos kt}{k} + \frac{\operatorname{sen} kt}{k^2}$$

$$= \frac{3}{\pi 2} \left[-\frac{t \cos kt}{k} + \frac{\operatorname{sen} kt}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{3}{\pi 2} \cdot \left[-\frac{\pi \cos k\pi}{k} \right] =$$

(o)

$$= -\frac{3 \cos k\pi}{\pi k} + \frac{3 \cdot (-1)^{k+1}}{\pi k}$$

Assim,

$$G_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{3(-1)^{k+1}}{\pi k} \cdot \cos(kt)$$

$$G_n(t) = \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \cos(kt)$$

Se tomarmos o limite $\lim_{n \to \infty} G_n = G$ temos a Série de Fourier da função F.

Voltando para a variável inicial: $t = \frac{2\pi}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$

$$g_n(x) = \frac{3}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)\right)$$

Logo,

$$f(x) \overset{n}{=} \lim_{n \to \infty} g_n = \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2} \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)\right)$$

Caso Discreto:

Quando temos um conjunto de dados pontuais devemos utilizar o MMQ no caso discreto. Dessa forma, analogamente ao que fizemos no caso contínuo, podemos utilizar polinômios trigonométricos.

Teorema 5: as constantes no somatório

$$g_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

que minimizam a soma dos mínimos qua- ④

dados

$E(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - g_n(x_j))^2$

são

- $a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos(kx_j)$, p/ cada $k = 0, \dots, n$
- $b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \operatorname{sen}(kx_j)$, p/ cada $k = 1, \dots, n-1$

onde $m = \frac{\text{número de dados}}{2}$.

O Teorema 5 só funciona para dados igualmente espaçados no intervalo $[-\pi, \pi]$. Portanto, em geral, escolhemos:

$$x_j = -\pi + \frac{j}{m}\pi, \text{ com } j = 0, \dots, 2m-1$$

Exemplo: encontrar o polinômio trigonométrico por MMQ discreto de grau 2 para $f(x) = 2x^2 - 9$ quando $x \in [-\pi, \pi]$ e para um conjunto de 6 dados.

Solução: $m = \frac{6}{2} = 3$ e $n = 2$

$$g_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos 2x + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x$$

$$a_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{5} f(x_j) = \frac{1}{3}\left[f(-\pi) + \dots + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= -4,10944566$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{5} f(x_j)\cos(x_j) = \frac{1}{3}\left[f(-\pi)\cos(-\pi) + \dots + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -8,77298169$$

$$a_2 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{5} f(x_j)\cos(2x_j) = \frac{1}{3}\left[f(-\pi)\cos(-2\pi) + \dots + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2,92432723$$

$$b_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{5} f(x_j)\operatorname{sen}(x_j) = \frac{1}{3}\left[f(-\pi)\operatorname{sen}(-\pi) + \dots + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 0$$

Logo,

$$g_2(x) = \frac{-4,10944562}{2} - 8,77298169\cos x + 2,92432723\cos 2x.$$

III) Interpolação polinomial

Agora, estamos interessados em achar uma função que ajuste nossos dados de forma a passar por todos os pontos dado que temos. No MMQ, obtínhamos uma função que aproximava o comportamento dos pontos que tínhamos.

Dados (x_i, y_i) com $i = 0, \dots, n-1$ queremos encontrar $f(x_i) = y_i$ para todo i. Se f for um polinômio então temos uma interpolação polinomial e f é o polinômio interpolador.

"A interpolação pode ser vista como uma maneira de se reconstruir uma função $\tilde{f}(x)$ para todo x, obtendo uma função $f(x)$. O MMQ nomale a aproximar $\tilde{f}$ & por uma f, $\forall x$."

~~→ Interpolação de Lagrange~~

Na interpolação polinomial resolvemos o seguinte sistema linear p/ obter o polinômio interpolador

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Note que não é o sistema normal do MMQ.

→ Interpolação de Lagrange:

Definamos o seguinte polinômio:

$$P_n(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + f(x_2)L_2 + \dots + f(x_n)L_n$$

onde,

$$L_i = \frac{\prod_{i \neq j}^{n} (x - x_j)}{\prod_{i \neq j}^{n} (x_i - x_j)} = \frac{(x-x_0)}{(x_i-x_0)} \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)} \cdots \frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)}$$

são os polinômios de Lagrange.

Proposição 1: dados $(n+1)$ pontos (x_i, g_i), $i = 0, \dots, n$, distintos. Existe um único polinômio p de grau $\leq n$ que passa por esses pontos (interpola), ou seja, $P(x_i) = g_i$ para $i = 0, \dots, n$.

Dessa forma, os polinômios de Lagrange são um método para encontrar este único polinômio a partir do nosso conjunto de dados.

Exemplo:

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	1	-1	2

$$P(x) = 1 \cdot L_0 - 1 \cdot L_1 + 2L_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{+x^2-1}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$P(x) = \frac{x(x-1)}{2} - \left(\frac{1-x^2}{1}\right) + 2\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + x^2 - 1 + x^2 + x \rightarrow$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{5x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1.$$

Note que

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

O polinomio definido a partir dos polinômios de Lagrange passa por todos os pontos dados!

No exemplo:

$$P(x_0) = 1\underbrace{L_0(x_0)}_{1} = 1 \qquad P(x_2) = +2\underbrace{L_2(x_2)}_{1} = 2$$

$$P(x_1) = -1\underbrace{L_1(x_1)}_{1} = -1$$

→ Interpolação de Newton (Diferenças Divididas)

Para interpolar uma função f utilizaremos o seguinte polinômio:

$P_n(x_0) = f(x_0) = a_0$

$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0)$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Assim, podemos definir as diferenças divididas:

$f[x_i] = f(x_i)$ → ordem zero

$f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$ → ordem um

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Processo termina aqui

Então, obtemos:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

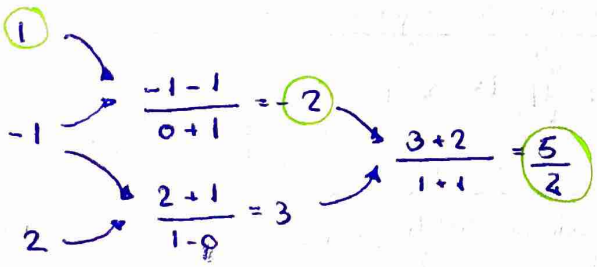
Montamos a seguinte tabela (supondo $n = 4$)

x	$f(x)$	Primeiras Diferenças Divididas	Segundas Diferenças Divididas	Terceiras Diferenças Divididas
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f[x_4]$			

A última diferença dividida é $f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}$

Exemplo:

x_i	x_0	x_1	x_2
x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	1	-1	2



$P(x) = 1 + (-2)(x-x_0) + \frac{5}{2}(x-x_1)(x-x_0)$

$P(x) = 1 - 2x - 2 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$

$P(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{x}{2} - 1$

↳ O resultado é o mesmo do exemplo anterior! Logo, a Proposição 1 é válida!

Exemplo:

x_i	1	1,3	1,6	1,9	2,2
$f(x_i)$	0,7652	0,6201	0,4554	0,2818	0,1104

x_i				
1,0	0,7552			
		-0,4837		
1,3	0,6201		-0,1087	
		-0,5489		0,0659
1,6	0,4554		-0,0494	
		-0,5386		0,0681
1,9	0,2818		-0,0118	
		-0,5715		
2,2	0,1104			

→ Interpola todos os pontos.

$P^4(x) = 0,7552 + (-0,4837)(x-1) + (-0,1087)(x-1)(x-1,3) + (0,0659)(x-1)(x-1,3)(x-1,6) + (0,0018)(x-1)(x-1,3)(x-1,6)(x-1,9)$

$P_2(x) = 0,6201 + (-0,5587)(x-1,3) +$

$+ (-0,0494)(x-1,3)(x-1,6) +$

$+ (0,0681)(x-1,3)(x-1,6)(x-1,9)$

Este polinômio interpola os pontos tirando $x_0 = 1$!

Vamos analisar um caso particular em que os pontos x_k são equidistantes, ou seja,

$x_{k+1} = x_k + h$, com $k \in [0, n]$ e $h > 0$.

Utilizaremos a notação Δ para representar diferenças. Tal notação fora introduzida por Newton.

No caso de pontos equidistantes não vamos utilizar as diferenças divididas mas sim as diferenças simples:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{(Ordem 1)}$$

$$\Delta^j f(x) = \Delta^{j-1} f(x+h) - \Delta^{j-1} f(x) \quad \text{(Ordem } j\text{)}$$

Proposição 2: sejam $\{x_k\}_{k=0}^n$ pontos distintos. Se $x_{j+1} = x_j + h$ e $f(x_k) = y_k$, com $0 \le j \le n+1$ e $0 \le k \le n$, então

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_j] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k!\, h^k}, \text{ onde } k = j - i$$

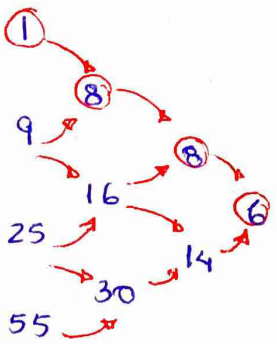
Montamos a seguinte tabela (supondo $n = 3$):

x	$f(x)$	1ª Diferença Simples	2ª Diferença Simples
x_0	$f[x_0]$	$\Delta f(x_0) = f[x_1] - f[x_0]$	$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$
x_1	$f[x_1]$	$\Delta f(x_1) = f[x_2] - f[x_1]$	
x_2	$f[x_2]$		

Exemplo:

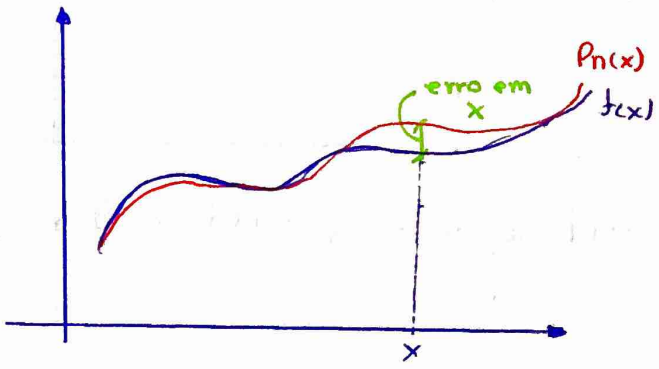
x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	9	25	55

Os pontos x_i são equidistantes com $h = 1$



$$P_3(x) = 1 + \frac{8}{1!}(x-1) + \frac{8}{2!}(x-1)(x-2) + \frac{6}{3!}(x-1)(x-2)(x-3)$$

→ Erro na interpolação polinomial



O erro será dado por:

$$E(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

em geral não conhecemos ξ!

Logo, faremos a seguinte estimativa:

$$E(x) \le \frac{\prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)!} \cdot \max_{\xi \in I} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

→ podemos utilizar p/ estimar o erro em cada ponto do intervalo ou para todo o intervalo.

Exemplo:

$f(x) = e^x$ $\quad n = 2$ e $I = [1,0 ; 1,2]$

x_i	1,0	1,1	1,2
e^x	2,718	3,004	3,320

Os x_k são equidistantes com $h = 0,1$

2,718

0,286

3,004

0,03

0,316

3,320

$P_2(x) = 2,718 + \frac{0,286}{0,1}(x-1) + \frac{0,03}{2!(0,1)^2}(x-1)(x-1,1)$

Logo, $P_2(1,05) = 2,287$.

Calculemos uma estimativa p/ o erro neste ponto:

Sabemos que $f'''(x) = e^x$ o que f''' é estritamente crescente. Então $\max_{y \in I} |f'''(y)| = e^{1,2} = 3,32$.

$$|E(1,5)| \leq |(1,5-1)(1,5-1,1)(1,5-1,2)| \cdot \frac{3,32}{3!}$$

$$\Rightarrow |E(1,5)| \leq 0,0002075$$

Calculemos uma estimativa para o erro no intervalo

$$\left.\begin{array}{l} |x-x_0| \leq |x_0 - x_2| = 0,2 \\ |x-x_1| \leq |x_0 - x_1| = 0,1 \\ |x-x_2| \leq |x_0 - x_2| \leq 0,2 \end{array}\right\} \; |E(x)| \leq \frac{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,1}{6} 3,32 \quad \forall x \in I.$$

Interpolação por Splines

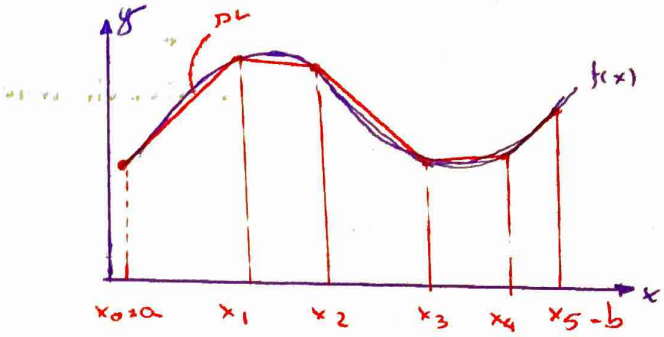
Para polinómios de alto grau, não temos uma interpolação muito precisa, já que estes tendem a oscilar. Ou seja, uma pequena flutuação em uma pequena parte do intervalo, pode causar um grande flutuação sobre todo intervalo. Uma alternativa é dividir o intervalo em pequenos intervalos (splinos) e construir um polinómio interpolador em cada intervalo. ⇒ Aproximação polinomial por partes (splines).

a. Splines Lineares

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Vamos dividir o intervalo $[a,b]$, utilizando $\{x_k\}_{k=0}^m$ t.q. $\{x_k\}_{k=0}^m \subset [a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

Para cada intervalo vamos aproximar f por um polinómio de 1º grau (spline):



Definimos S_L:

$$S_L^j(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$j = 0, \ldots, m$.

Exemplo:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	1	2	5	7
$y_i = f(x)$	1	2	3	2,5

$$S_L^0(x) = f(x_0)\cdot\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1)\cdot\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= 1 \cdot \frac{2-x}{2-1} + 2 \cdot \frac{x-1}{2-1} = 2 - x + 2x - 2 = x, \quad x \in [1,2] \; (x_0\, x_1)$$

$$S_L^1(x) = f(x_1)\cdot\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\cdot\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}(x+4), \quad x \in [2,5] \; (x_1\, x_2)$$

$$S_L^2(x) = f(x_2)\cdot\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + f(x_3)\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{1}{2}(-0,5x + 8,5),$$

$x \in [5,7]$ $(x_2\, x_3)$

$$S_L(x) = \begin{cases} S_L^0(x), & \text{se } x \in [1,2] \\ S_L^1(x), & \text{se } x \in [2,5] \\ S_L^2(x), & \text{se } x \in [5,7] \end{cases}$$

Definamos: $h = \max_i \{x_i - x_{i-1}\}$ → maior espaçamento.

Podemos estimar o erro cometido por:

$$E(x) \leq \frac{h^2}{8} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

b. Spline Cúbico

Agora, utilizaremos polinômios cúbicos para aproximar a função em cada sub-intervalo.

Seja $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$. Dividindo o intervalo, obtemos $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$. Dessa forma, um spline interpolador cubico S para f satisfaz as seguintes condições para cada $j=0,\dots,n-2$:

(n = nº de elementos)

a) $S_j(x_j)=f(x_j)$ e $S_j(x_{j+1})=f(x_{j+1})$

b) $S'_{j+1}(x_{j+1})=S'_j(x_{j+1})$

c) $S''_{j+1}(x_{j+1})=S''_j(x_{j+1})$

Ainda temos duas opções de condição de contorno,

- Spline natural: $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (1ª equação; última equação)
- Spline fixado: $S'(x_0)=f'(x_0)$ e $S'(x_n)=f'(x_n)$ (1ª equação; última equação)

Lembrando que um polinômio cúbico tem 4 coeficientes. Logo, para $m=n-1$ intervalos teremos $4m$ ~~incógnitas~~ equações com 4 incognitas cada ($=4m$)

Exemplo: construir um spline cúbico natural que passe pelos pontos: (x_0: (1,2); x_1: (2,3); x_2: (3,5))

x	1	2	3
y	2	3	5

Solução: 2 intervalos ⇒ 2 equações, 8 incognitas

$$S_0(x)=a_0+b_0(x-1)+c_0(x-1)^2+d_0(x-1)^3$$

$$S_1(x)=a_1+b_1(x-2)+c_1(x-2)^2+d_1(x-2)^3$$

(início do intervalo)

a) $S_0(1)=f(1)=a_0=2$

$S_0(2)=f(2)=a_0+b_0+c_0+d_0=3$

$S_1(2)=f(2)=a_1=3$

$S_1(3)=f(3)=a_1+b_1+c_1+d_1=5$

b) $S'_1(2)=S'_0(2)\Rightarrow b_0+2c_0+3d_0=b_1$

c) $S''_1(2)=S''_0(2)\Rightarrow 2c_0+6d_0=2c_1$

Aplicando as condições de contorno p/ o spline natural:

$S''_0(1)=0\Rightarrow 2c_0=0\Rightarrow c_0=0$

$S''_1(3)=0\Rightarrow 2c_1+6d_1=0$

Temos então 8 icógnitas e 8 equações:

$$S(x)=\begin{cases}2+\frac{3}{4}(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^3, & \text{se } x\in[1,2]\\ 3+\frac{3}{2}(x-2)+\frac{3}{4}(x-2)^2-\frac{1}{4}(x-2)^3, & \text{se } x\in[2,3]\end{cases}$$

Para não precisar sistemas tão grandes, podemos utilizar as seguintes fórmulas:

$$h_{j-1}c_{j-1}+2(h_{j-1}+h_j)c_j+h_jc_{j+1}=\frac{3}{h_j}(a_{j+1}-a_j)-\frac{3}{h_{j-1}}(a_j-a_{j-1})$$

$$b_j=\frac{1}{h_j}(a_{j+1}-a_j)-\frac{h_j}{3}(2c_j+c_{j+1})$$

$$d_j=\frac{c_{j+1}-c_j}{3h_j}\qquad j=1,\dots,n-1$$

Os coeficientes a_j recebem os valores dos y_j, e h_j é o espaçamento de cada intervalo. As equações extremas são dadas pelas condições de contorno

A estimativa do erro pode ser dada por:

$$E(x)\leq\frac{h^4}{384}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|,\text{ onde } h=\max\{x_i-x_{i-1}\}$$

→ Mais rápido que o spline linear!

IV) Integração Numérica

Muitas vezes integrais do tipo $\int_a^b f(x)\,dx$ não possuem primitivas fáceis de serem encontradas, impossibilitando a resolução da integral de forma explícita. Dessa maneira, uma solução é aproximar f por um polinômio e integra-lo. Podemos (e vamos) encontrar estes polinômios por meio da interpolação. Note que ao fazer este tipo de aproximação estaremos cometendo erros que deverão ser avaliados. ($\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx$)

Vamos apresentar a fórmula fechada de Newton-Cotes, pois, as fórmulas do Trapézio e de Simpson derivam desta.

→ Fórmula de Newton-Cotes: (Ruim para intervalos grandes!)

Devemos ~~sub~~ dividir o intervalo $[a,b]$ em sub-intervalos de mesmo tamanho, para isso:

$$\boxed{x_k = a + kh}, \text{ onde } h = \frac{b-a}{n} \text{ e } k = 0, \dots, n$$

Agora, utilizaremos os polinômios de Lagrange:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k), \text{ onde } w_k = \int_a^b l_k(x)\,dx =$$

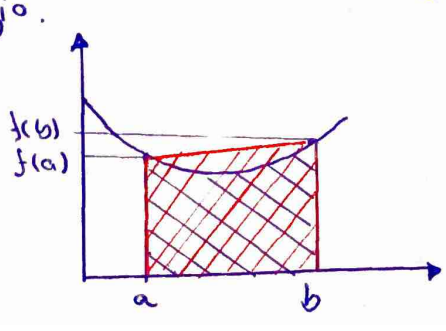
$$= \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}\,dx$$

→ Fórmula de Newton-Cotes de ordem n

→ Método dos Trapézios:

Vamos utilizar o primeiro polinômio de Lagrange ou Newton-Cotes para $n=1$.

A ideia é aproximar a área de $\int_a^b f(x)\,dx$ por um trapézio.



$$w_0 = \int_a^b \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\,dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{b-a}{2}$$

$$w_1 = \int_a^b \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\,dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{2}.$$

Logo,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)}$$

→ Note que $\frac{b-a}{1} = h$

$$\therefore \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

Podemos estimar o erro como:

$$\boxed{E \leq \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{c \in [a,b]} \{|f''(c)|\}}$$

Exemplo: $f(x) = \sqrt{6x-5}$ em $I = [1, 9]$

$f(1) = 1$, $f(9) = 7$

$$\int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx \approx \frac{9-1}{2} \cdot (1+7) = 32$$

$$E \leq \frac{(9-1)^3}{12} \cdot \left|9(6 \cdot 1 - 5)^{-3/2}\right| = \frac{128}{3} \cdot 9 = 384$$

→ o erro é grande, pois, a fórmula de Newton-Cotes é pouco eficiente para intervalos longos. Uma solução seria dividir o intervalo em intervalos menores!

→ Método dos Trapézios Composto:

A ideia é dividir o intervalo em partes iguais e para cada subintervalo aplicar o método do trapézio visto acima. Logo, dado $I = [a,b]$, temos $x_i = a + ih = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $i = 0, \dots, n$ (→ $x_0 = a$!)

Para cada x_i:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) + E_k, \quad k = 1, \dots, n$$

Assim, $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)\right]}$

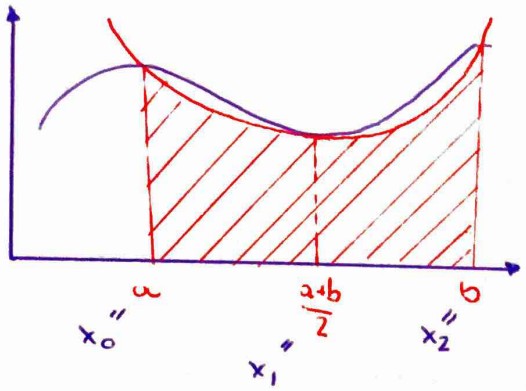
O erro pode ser estimado por:

$$|E| = \sum_{k=0}^{n} |E_k| \leq \frac{h^3}{12} \max_{c\in[a,b]} |f''(c)| \cdot (b-a)$$

↳ Dada uma precisão ε, podemos achar n e h!

→ Método de Simpson

A ideia do Método de Simpson é utilizar a Fórmula de Newton-Cotes para $n=2$, ou seja, vamos utilizar o segundo polinômio de Lagrange.



$$w_0 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx = \frac{b-a}{2}$$

Analogamente,

$$w_1 = \frac{4(b-a)}{6} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{2\cdot 3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]}$$

O erro poderá ser estimado por:

$$\boxed{|E_2(x)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{c\in[a,b]} |f^{(4)}(c)|}$$

Exemplo: $I = [6,10]$, $n=1$

$$h = \frac{10-6}{2\cdot 1} = 2$$

$$\int_6^{10} \log x\,dx \approx \frac{2}{3}\left[\log 6 + 4\log\left(\frac{16}{2}\right) + \log(10)\right] =$$

$$= 3,5936742$$

$$|E_2| \leq \frac{4^5}{2880} \cdot \max_{x\in[6,10]} \left|-\frac{6}{x^4}\log_{10} e\right| = 7,14888783\cdot 10^{-4}$$

→ Fórmula Método de Simpson Composto

A ideia é análoga ao Método do Trapézio Composto, só que agora vamos dividir o intervalo em $2n$ subintervalos.

O Método de Simpson necessita de 3 pontos!

$$x_i = a + ih\,;\ i = 1,\dots,2n$$

e $h = \frac{b-a}{2n}$

Para cada x_{2i}:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right]$$

Assim,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(2n-1) + f(x_{2n})\right]$$

(ímpares: $4f(x_1)$; pares: $2f(x_2)$)

A estimativa do erro pode ser dada por:

$$\boxed{|E_2(x)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|}$$

Exemplo: calcular $\int_6^{10} \log x\,dx$ usando Simpson repetido 4 vezes (8 intervalos).

$$h = \frac{10-6}{2\cdot 4} = 0,5$$

$x_0 = 6$; $x_1 = 6+0,5\cdot 1 = 6,5$, $x_2 = 7$; $x_3 = 7,5$; $x_4 = 8$; $x_5 = 8,5$; $x_6 = 9$; $x_7 = 9,5$; $x_8 = 10$.

$$\int_6^{10} \log x\,dx = \frac{0,5}{3}\left[\log 6 + 4\log 6,5 + 2\log 7 + 4\log 7,5 + 2\log 8 + 4\log 8,5 + 2\log 9 + 4\log 9,5 + \log 10\right] = 3,5939136$$

$$|E_2(x)| \leq \frac{4^5}{2880\cdot 4^4} \cdot \max\left|\frac{\log(e)}{6^5}\right| = 2,792528\cdot 10^{-6}$$

O Método de Simpson é mais eficiente que o Método dos Trapézios!

→ Quadratura de Gauss:

A limitação dos métodos vistos anteriormente está no fato de que eles necessitam de um intervalo igualmente espaçado, podendo conter imprecisões significativas. Já a quadratura de Gauss vai escolher os pontos de forma ótima. Dessa forma, os extremos dos intervalos e os coeficientes serão escolhidos de forma a minimizar o erro de aproximação.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)\,dx + \int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,dx$$

→ Erro a ser minimizado com a escolha de $\{x_i\}_{i=0}^n$ de forma adequada.

A ideia será escolher $\{x_i\}_{i=0}^n$ como sendo raízes de polinômios ortogonais $\{P_k\}_{k=0}^{n+1}$. Dessa forma, obteremos: $\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$, onde $w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$

→ Fórmula de Gauss

→ polinômios de Lagrange.

Se optarmos por um polinômio ortogonal em um intervalo diferente do intervalo de integração então faremos uma mudança de variável.

↳ integrar os L_i no novo intervalo, na nova variável e calcular o valor de f na nova variável.

Exemplo:

$n=1$, $I=[a,b]=[-1,1]$

Polinômio ortogonal definido em $[-1,1]$:

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = x^2 - 1/3$

} Polinômio de Legendre!

Vamos encontrar x_0 e x_1 (para usar na fórmula de Lagrange) através das raízes do polinômio de ordem $n+1$

$$P_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$w_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx = 1$$

$$w_1 = \int_{-1}^{1} \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,dx = 1$$

Pela fórmula de Gauss:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = 1\cdot f(-1/\sqrt{3}) + 1\cdot f(1/\sqrt{3}).$$

→ Integração de Romberg:

Trata-se da extrapolação de Richardson aplicada ao método do trapézio.

Seja $T(m) = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]$, com h definido como no Método do Trapézio.

Tabela de Romberg:

m	T(m)	$T_1(m)$	$T_2(m)$	$T_3(m)$	$T_4(m)$
4	T(4)	$T_1(4)$	$T_2(4)$	$T_3(4)$	$T_4(4)$
8	T(8)	$T_1(8)$	$T_2(8)$	$T_3(8)$	
16	T(16)	$T_1(16)$	$T_2(16)$		
32	T(32)	$T_1(32)$			
64	T(64)				

onde $T_k(m) = \frac{4^k \cdot T_{k-1}(2m) - T_{k-1}(m)}{4^k - 1}$

Na prática o que fazemos é usar os valores obtidos na regra do trapézio composto para $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Estes valores serão $R_{1,1}; R_{1,2}; R_{1,3}, \ldots$. Logo as aproximações de Romberg (seguindo a notação do livro) serão $R_{n,2}$:

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{1}{3}(R_{k,1} - R_{k-1,1}), \quad k = 2,3,\dots$$

$$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{1}{15}(R_{k,2} - R_{k-1,2}), \quad K = 3,4,\dots$$

$$\vdots$$

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1}-1}(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}), \quad k = j, j+1, \dots$$

$$\vdots$$

Exemplo: integrar numericamente por Romberg $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ com $n = 1, 2, 4, 8, 16$.

→ R. do Trapézio!

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}[\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen}\pi] = 0$$

$$R_{2,1} = \frac{\pi}{4}[\operatorname{sen} 0 + 2\operatorname{sen}\pi/2 + \operatorname{sen}\pi] = 1{,}570\,71633$$

$$R_{3,1} = \frac{\pi}{8}[\operatorname{sen} 0 + 2(\dots) + \operatorname{sen}\pi] = 1{,}896\,11890$$

$$R_{4,1} = \frac{\pi}{16}[\operatorname{sen} 0 + 2(\dots) + \operatorname{sen}\pi] = 1{,}974\,23160$$

$$R_{5,1} = \frac{\pi}{32}[\operatorname{sen} 0 + 2(\dots) + \operatorname{sen}\pi] = 1{,}993\,57034$$

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}(R_{2,1} - R_{1,1}) = 2{,}094\,39511$$

$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}(R_{3,1} - R_{2,1}) = 2{,}004\,55976$$

$$R_{4,2} = R_{4,1} + \frac{1}{3}(R_{4,1} - R_{3,1}) = 2{,}000\,26917$$

$$R_{5,2} = R_{5,1} + \frac{1}{3}(R_{5,1} - R_{4,1}) = 2{,}000\,01659$$

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15}(R_{3,2} - R_{2,2}) = 1{,}998\,57073$$

$$R_{4,3} = R_{4,2} + \frac{1}{15}(R_{4,2} - R_{3,2}) = 1{,}999\,98313$$

$$R_{5,3} = R_{5,2} + \frac{1}{15}(R_{5,2} - R_{4,2}) = 1{,}999\,99975$$

$$R_{4,4} = R_{4,3} + \frac{1}{63}(R_{4,3} - R_{3,3}) = 2{,}000\,00055$$

$$R_{5,4} = R_{5,3} + \frac{1}{63}(R_{5,3} - R_{4,3}) = 2{,}000\,00001$$

$$R_{5,5} = R_{5,4} + \frac{1}{255}(R_{5,4} - R_{4,4}) = 1{,}999\,99999$$

V) Métodos Numéricos para EDOs

A ideia aqui é encontrar aproximações para as soluções das EDOs a partir do problema do valor inicial (PVI). Os métodos a seguir não produzem soluções contínuas para as EDOs, mas sim pontos específicos.

→ Método de Euler

Consideremos a eq:

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t,y), \quad a \le t \le b, \quad \underbrace{y(a) = \alpha}_{CI}$$

O método de Euler fornecerá uma aproximação discreta da EDO acima. Para tanto, devemos nos assegurar que tenhamos um intervalo igualmente espaçado. Basta tomar $N \in \mathbb{N}$ e fazer $h = \frac{(b-a)}{N}$ tal que $t_i = a + ih$ para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

$y \in C^2([a,b])$ descarte termos maiores ou iguais a 2.

Aplicando a expansão de Taylor, concluímos que

$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= \alpha \quad (CI) \\ w_{i+1} &= w_i + h\underbrace{f(t_i, w_i)}_{\text{derivada}} = w_i + h \cdot y'(t_i, y) \end{aligned}}$$

para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Exemplo: $N = 10$

Aproxime a solução de:

$$y' = y - t^2 + 1, \text{ com } 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0{,}5$$

Solução: $h = \frac{2-0}{10} = 0{,}2$, $t_i = 0{,}2 \cdot i$

$w(0) = 0{,}5$

$w_{i+1}(t) = w_i + 0{,}2(w_i - t^2 + 1)$

$w_1(0) = 0{,}5 + 0{,}2(0{,}5 - 0^2 + 1) = 0{,}8$

$w_2(0{,}2) = 0{,}8 + 0{,}2(0{,}8 - 0{,}2^2 + 1) = 1{,}152$

$\vdots$

$w_{10}(2) = \dots = 4{,}8657845$

O Método de Euler só funciona para EDOs de grau 1!

Cabe darmos uma definição e enunciarmos um teorema para que possamos avaliar o erro em cada ponto.

Definição: uma função é Lipschitz na variável y em um conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ se existir uma de $L > 0$ tal que: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, com $(t,y_1), (t,y_2) \in U$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,x)\right| \leq L$

Teorema 5: suponha f contínua e Lipschitz em y com cte de Lipschitz L em $U = \{(t,y) : t \in [a;b]$ e $y \in (-\infty, \infty)\}$. Seja $y(t)$ a única solução do PVI $\begin{cases} y' = f, t \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$ e w_i a aproximação de $y(t_i)$ usando o Método de Euler para $i = 0, \ldots, N$. Supondo que $\exists M > 0$ tal que $|y''(t)| \leq M, \forall t \in [a,b]$. Então $\forall i = 0, \ldots, N$. temos:

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L}\left(e^{L(t_i - a)} - 1\right)$$

→ Métodos de Runge-Kutta de 2ª Ordem

Temos que a partir da fórmula geral de Runge-Kutta que será apresentada a seguir, poderemos extrair métodos particulares para resolver EDOs de ~~primeira~~ ~~segunda ordem~~.

Forma geral: $\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h\,\phi(t_i, w_i, h) \end{cases}$ ← Vem da expansão de Taylor!

onde $\phi(t_i, w_i, h) = \sum_{p=1}^{R} c_p K_p(t_i, w_i)$ ← R → ordem da EDO! ← somatório de c_p é sempre 1!

depende da função f!

$k_1(t,w) = f(t,w)$

$k_2(t,w) = f\left(t + a_2 h, w + h b_{21} k_1\right)$ → ctes!

$k_3(t,w) = f(t + ha_3, w + h b_{31} K_1 + h b_{32} K_2)$

$\vdots \qquad \vdots$

$k_p(t,w) = f\left(t + ha_p, w + h \sum_{q=1}^{p} b_{pq} \cdot K_q\right)$.

Obs: o método de Euler é um caso particular quando $R = 1$ e $c_1 = 1$:

$w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)$

a. Método do Ponto Médio (Euler Modificado)

$R = 2;\ c_1 = 0;\ c_2 = 1,\ a_2 = b_{21} = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right), \\ \quad \text{para } i = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

Obs: o método de Euler e o método do Ponto Médio não são exatamente iguais embora seus resultados sejam próximos. O método de Euler é:

$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right]$

para $i = 0, \ldots, N-1$.

b. Método de Heun

$R = 2;\ c_1 = \frac{1}{4};\ c_2 = \frac{3}{4},\ a_2 = \frac{2}{3},\ b_{21} = \frac{2}{3}$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}\left(f(t_i, w_i) + 3\left(f\left(t_i + 2h/3,\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. w_i + 2h/3\, f(t_i + h/3, w_i + h/3\, f(t_i, w_i))\right)\right)\right) \\ \quad \text{para } i = 0, \ldots, N-1. \end{cases}$$

c. Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$w_0 = \alpha$

$k_1 = hf(t_i, w_i);\ k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right)$

$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),\ k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3)$

$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

→ EDOs de ordem superior (PVI) e sistemas de EDOs

Teremos que resolver EDOs de ordem maior ou igual a 2 também. No entanto, as técnicas apresentadas até agora só servem para EDOs de primeira ordem. A solução será transformar essas EDOs de ordem superior em EDOs de ordem 1 com o auxílio de sistemas. Note que abordaremos apenas ~~este~~ EDOs com PVI (como vínhamos fazendo até agora).

Um sistema de ordem m de problemas de valor inicial de 1ª ordem é dado por:

$$\begin{cases} u_1'(t) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ u_2'(t) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ u_m'(t) = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{cases}, \text{ com } t \in [a,b]$$

CUIDADO com os parâmetros!

Condições Iniciais!

CIs: $\begin{cases} u_1(a) = \alpha_1 \\ u_2(a) = \alpha_2 \\ \vdots \\ u_m(a) = \alpha_m \end{cases}$

A transformação será feita da seguinte maneira:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$$

EDO de ordem m.

CIs: $\begin{cases} y(a) = \alpha_1 \\ y'(a) = \alpha_2 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \end{cases}$

Basta utilizar as técnicas vistas p/ cada uma das eqs.

$$\begin{cases} u_1(t) = y(t) \\ u_2(t) = y'(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}(t) = y^{(m-2)}(t) \\ u_m(t) = y^{(m-1)}(t) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u_1'(t) = y'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = y''(t) = u_3(t) \\ \vdots \\ u_{m-1}'(t) = y^{(m-1)}(t) = u_m(t) \\ u_m'(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) = \\ = f(u_1, u_2, \dots, u_m, t) \end{cases}$$

Exemplo: $x''(t) - 4x(t) = 0$, $x(0) = 2$ e $x'(0) = 0$ com $t \in [0, 0,5]$ e $h = 0,25$. $x(0,5) = ?$

Solução: Método de Euler!

$u_{k+1} = u_k + h f(t_k, u_k)$

$h = \frac{1}{4} = \frac{0,5 - 0}{n} \Rightarrow n = 2$

$t_i = 0 + ih$, com $i = 0, 1, 2$

$t_0 = 0$; $t_1 = 0,25$; $t_2 = 0,5$

$$\begin{cases} u_1(t) = x \\ u_2(t) = x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(t) = x' = u_2(t) = f(t, u_1, u_2) \\ u_2'(t) = x'' = 4x = 4u_1(t) = \\ = g(t, u_1, u_2) \end{cases}$$

$u_{10} = u_1(t_0 = 0) = 2$

$u_{20} = u_2(t_0 = 0) = 0$

$u_1'(t_0 = 0) = u_2(t_0 = 0)$

$u_{11} = u_{10} + 0,25 \cdot u_{20} = 2$ (com $u_{10} \to 2$)

$u_{21} = u_{20} + 0,25 (4 \cdot u_{10}) = 2$

$u_{12} = u_{11} + 0,25 \cdot u_{21} = 5/2 \rightsquigarrow x(0,5) = 2,5$

$u_{22} = u_{21} + 0,25 (4 \cdot u_{11}) = 4 \rightsquigarrow x'(0,5) = 4$

Exemplo:

Vamos refazer o exemplo anterior utilizando o Método de Euler Modificado. e para $h = 0,5$.

$$\begin{cases} u_{10} = 2 \\ u_{20} = 0 \end{cases} \qquad h = \frac{0,5 - 0}{n} = 0,5 \Rightarrow n = 1$$

$t_0 = 0$; $t_1 = 0,5$

$$u_{1,k+1} = u_{1k} + \frac{h}{2}\left[f(t_k, u_{1k}, u_{2k}) + f(t_{k+1}, u_{1k} + hf(t_k, u_{1k}, u_{2k}), u_{2k} + hg(t_k, u_{1k}, u_{2k}))\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{1,k+1} = u_{1k} + \frac{h}{2}\left[u_{2k} + u_{2k} + hg(t_k, u_{1k}, u_{2k})\right] =$$

$$= u_{1k} + \frac{h}{2}\left[2u_{2k} + h4u_{1k}\right] = u_{1k} + hu_{2k} + 2h^2 u_{1k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{1,k+1} = (1 + 2h^2) u_{1k} + h u_{2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{1,k+1} = \frac{3}{2} u_{1k} + \frac{1}{2} u_{2k}}, \text{ para } k = 0, 1$$

$u_{11} = \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 3 \rightsquigarrow x(0,5) = 3,0$

Analogamente, podemos achar o valor de x' em $0,5 = t_1$:

$$u_{2,k+1} = u_{2k} + \frac{h}{2}\left[g(t_k, u_{1k}, u_{2k}) + \right.$$

$$\left. + g(t_{k+1}, u_{1k} + hf(t_k, u_{1k}, u_{2k}), u_{2k} + hg(t_k, u_{1k}, u_{2k}))\right]$$

$$\Rightarrow u_{2,k+1} = u_{2k} + \frac{h}{2}\left[4u_{1k} + 4u_{1k} + 4hf(t_k, u_{1k}, u_{2k})\right]$$

$$= u_{2k} + \frac{h}{2}\left[8u_{1k} + 4hu_{2k}\right] = (1+4h)u_{2k} + 4hu_{1k}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{2,k+1} = 3u_{2k} + 2u_{1k}}$$

$u_{21} = 3u_{20} + 2u_{10} = (4) \rightsquigarrow \times(0,5) = 4$