Sistemas Dinâmicos II — Paulo Akira (2018.2)

I) Revisão:

Sinais: em engenharia, sinal é qualquer evento que carregue informação.

→ A maioria dos sinais físicos são contínuos (posição e velocidade de um corpo, fala, música captada por um microfone). Só os sinais discretos podem ser armazenados e processados em computadores digitais.

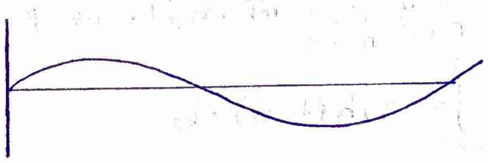
→ Discretizamos os sinais contínuos!

→ Sinais periódicos:
- Contínuo: $x(t+T) = x(T)$
- Discreto: $x[k+N] = x(N)$

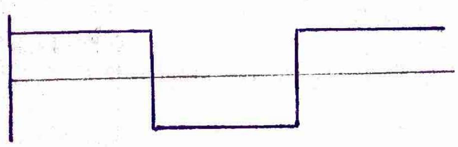
T, N são períodos

→ Sinais não periódicos:
- Determinísticos → Sinal Pulso
- Aleatório → Ruído Branco

→ Sinal analógico: caracterizado por variações suavizadas entre máximo e mínimo de sua amplitude



→ Sinal digital: caracterizados por variações bruscas

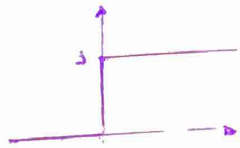


→ Dimensões:
- 1D: depende do tempo: $f(t)$
- 2D: depende do espaço: $f(x,y)$
- 3D: depende do tempo e espaço: $f(x,y,t)$.

→ Sinais Importantes:

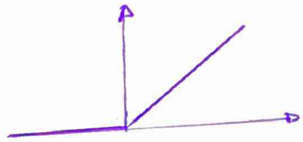
• Degrau unitário:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



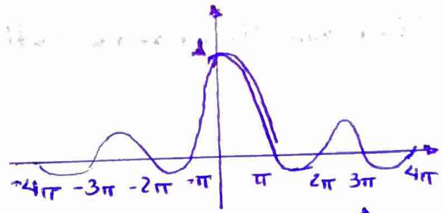
• Rampa unitária:

$$r(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$



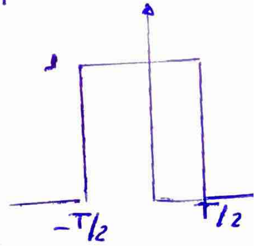
• Sinc

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$$



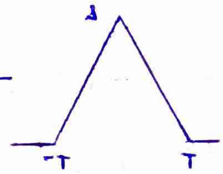
• Retangular

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



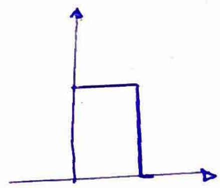
• Triangular:

$$\text{triang}(t/T) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$



• Pulso:

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/T, & 0 < t < T \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$



• Impulso

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t) \Rightarrow \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

→ Propriedade Amostragem ou sifting da função impulso

Representando qualquer sinal com impulso!

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt}_{\text{filtragem}} = f(a) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,dt}_{=1} = f(a)$$

$\delta(t-a)$: $\neq 0$, se $t = a$; $= 0$, se $t \neq a$

$f(a)$: pega 1 ponto do sinal

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-na)\,dt}_{\text{trem de impulso}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na)$$

$\sum f(na)$: pega vários pontos do sinal

→ Sistema Causal e Não-Causal

Causal: output do sistema não dependente de valores futuros do input.

↳ saída depende somente do presente e do passado.

Exemplo: $y(t) = x(t)$

$y(t) = x(t) + x(t-1)$

Sistemas fisicamente factíveis são causais!

Não-causal: output do sistema depende de valores futuros do input a qualquer instante de tempo

↳ se só depender de valores futuros chamamos de anti-causal

Exemplo: $y(t) = x(t+2)$ — anti-causal

$y(t) = x(t) + x(t-1) + x(t+1)$

→ SLIT - Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

- Sistemas contínuos são lineares se satisfazem a duas propriedades:

↳ homogeneidade: $x(t) \to y(t) \to kx(t) \to ky(t)$

↳ aditividade (superposição):

$x_1 \to y_1$

$x_2 \to y_2 \to x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

- Um sistema é dito invariante no tempo se um deslocamento no tempo do sinal de entrada implicar em um deslocamento idêntico no sinal de saída.

$x(t) \to y(t) \Rightarrow x(t \pm \tau) \to y(t \pm \tau)$

↳ é aquele cujo os parâmetros não mudam no tempo (coeficientes são ctes).

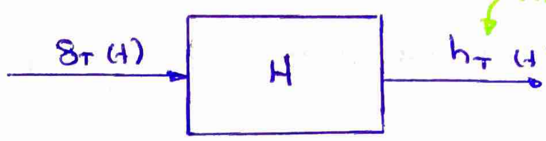
Podemos caracterizar a resposta do SLIT a qualquer entrada sabendo a resposta do sistema ao impulso.

↳ Realizar a convolução com o sinal de entrada qualquer.
↳ só para SLIT!

Entrada: $x(t) = \lim_{T \to 0} \tilde{x}(t)$ — $\tilde{x}(t) = x(nT)$

Trem de impulso: $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \underbrace{\overbrace{\delta_T(t-nT)}^{\text{pulso}}\, T}_{\text{garante a filtragem. Logo só teremos valores no intervalo}}$

para cada $nT \leq t < (n+1)T$



Logo, a saída referente ao trem de impulso será: $\tilde{y}_T = H\{\tilde{x}(t)\} \Rightarrow$ É válido, pois o sistema é linear

$\Rightarrow \tilde{y}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \underbrace{h_T(t-nT)}_{\text{invariante no tempo}} \cdot T$,

para cada $nT \leq t < (n+1)T$

Agora, tomemos o limite para obter um trem de impulsos.

$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t)$ e $h(t) = \lim_{T \to 0} h_T(t)$

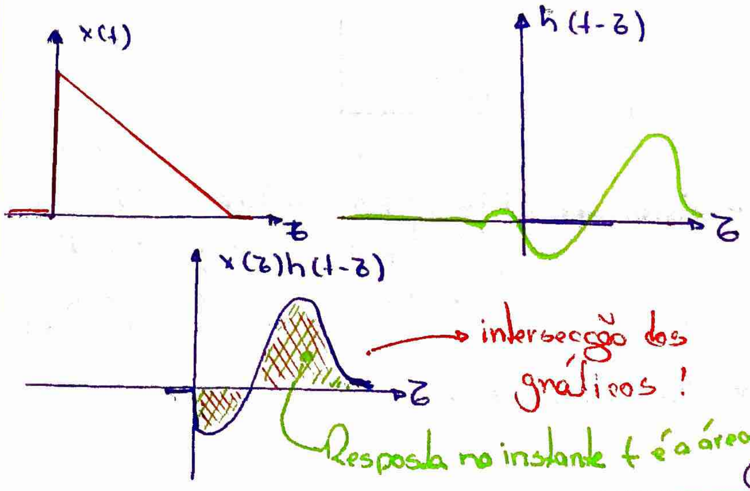
$T \to 0 \Rightarrow \begin{cases} nT \to \tau \\ T \to d\tau \end{cases}$

$\therefore y(t) = \lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{N} x(nT) h_T(t-nT) T =$

$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

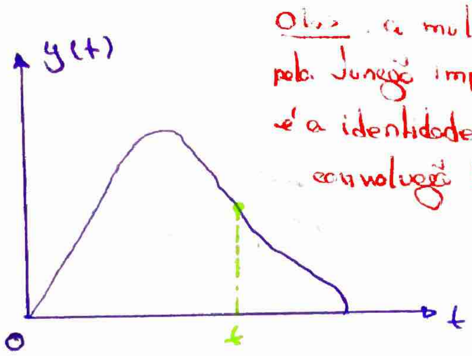
Logo,

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$



→ intersecção dos gráficos!

Resposta no instante t é a área!



Obs: a multiplicação pela função impulso é a identidade na convolução!

Exemplo:

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$$

Este tempo de ação de 0,001s só serve para mostrar que é tão pequeno que podemos considerar como um impulso!

$h(t) = e^{-3t}$ e $x(t) = F(t) = t$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \Rightarrow$$

C → sistema causal

$$\Rightarrow v(t) = \int_{0} \tau e^{-3(t-\tau)} d\tau \Rightarrow v(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot e^{-3t}$$

→ não há instantes de tempo negativos (enunciado).

Obs: linearidade

1) linearidade do sistema independe do "escalonamento" do tempo.

2) linearidade do sistema independe do "coeficiente" utilizado na relação dos sistemas

II) Transformada de Fourier:

$x[n]$ → informação no domínio do tempo

$x[0] = x[0] + x[1]$ → baixa frequência

$x[1] = x[0] - x[1]$ → alta frequência

Na transição do domínio do tempo (temporal) para o domínio da frequência (espectral) e vice-versa, não há perda de informação!

→ Série de Fourier: → extensão finita do intervalo

Como passar do domínio do tempo para o domínio da frequência?

"Qualquer função periódica pode ser reescrita como uma soma ponderada de senos e cossenos de diferentes frequências"

Uma função periódica $x(t)$ que satisfaça as condições de Dirichlet pode ser expressa como uma série de Fourier, com termos de senos e cossenos harmonicamente relacionados:

$$\boxed{x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))}$$

→ equação de síntese → discretizamos espectralmente o sinal x

onde, $a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt$;

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \ ;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \ ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Para demonstrar como achar os coeficientes devemos lembrar das Propriedades de Ortogonalidade:

$$\int_T \sin(m\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \ \forall n$$

$$\int_T \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = 0, \text{ se } m \neq n$$

$$\int_T \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = 0, \text{ se } m \neq n$$

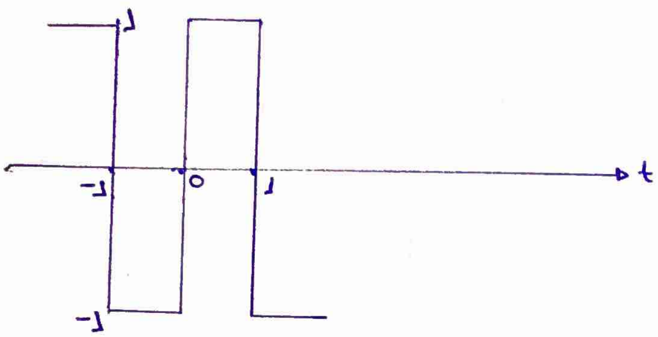
Condições de Dirichlet:

- O sinal deve ser absolutamente integrável: $\int_{0}^{t_0+T} |x(t)| dt$ não tende a infinito
- $x(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades
- $x(t)$ deve ter um número finito de máximos e mínimos.

Exemplo: onda quadrada

$$x(t) = \begin{cases} -1, \text{ se } -1 < t < 0 \\ 1, \text{ se } 0 < t < 1 \end{cases}, \quad x(t + nT) = x(t)$$

Período: $T = 2s$ ∴ $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{rad}{s}$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt = 0$$ → é 0, pois, a média das amplitudes é zero.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt = 0$$ → função par x função ímpar

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cdot \text{sen}(n\omega_0 t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-1}^0 (-1)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{T}\int_0^1 1\cdot\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_{-1}^0 -\text{sen}(n\pi t)\,dt + \int_0^1 \text{sen}(n\pi t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi t)\Big|_{-1}^{0} - \cos(n\pi t)\Big|_{0}^{1}\right) =$$

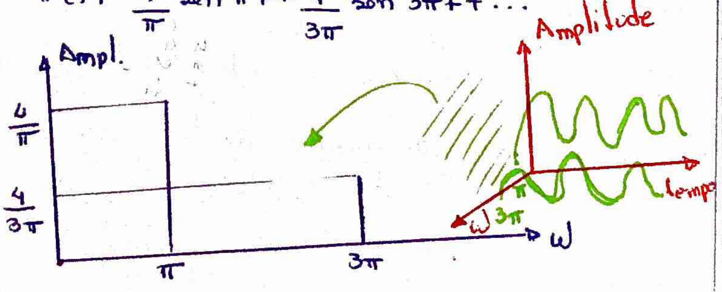
$$= \frac{1}{n\pi}\left[1 - \cos n\pi - (\cos n\pi - 1)\right] = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\therefore x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\text{sen}(n\pi t)$$

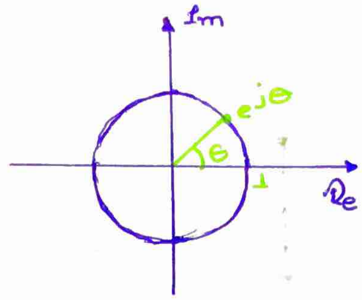
Composição de Ondas

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\,\text{sen}\,\pi t + \frac{4}{3\pi}\,\text{sen}\,3\pi t + \dots$$



Obs: Fenômeno de Gibbs ocorre sempre que você tentar reconstruir uma função com saltos de descontinuidade usando a FS

Lembrando: complexos



Relações de Euler:

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$

$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\text{sen}\,\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$\frac{1}{j} = -j$ → Importante Lembrar!

Na série de Fourier:

$$a_n\left(\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}\right) =$$

$$= e^{jn\omega_0 t}\underbrace{\left(\frac{a_n - b_n\cdot j}{2}\right)}_{x[n]} + e^{-jn\omega_0 t}\underbrace{\left(\frac{a_n + b_n j}{2}\right)}_{x^*[n] = x[-n]} =$$

$$= e^{jn\omega_0 t}\,x[n] + e^{-jn\omega_0 t}\,x[-n]$$ → harmônicos!

$$\therefore \boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{jn\omega_0 t}}$$ → Síntese

→ Harmônicos $x[n]$ distanciados $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$

Como $x[n] = \frac{a_n - b_n\cdot j}{2}$

$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$; $b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)\,dt$

→ número de vezes que multiplico a freq. fund.

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt}$$ → Análise

Exemplo: encontrar os coef. da série de Fourier do sinal $x(t) = \cos(4\pi t)$

$$\underbrace{\frac{1}{2}e^{j4\pi t}}_{x[n=1]} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-j4\pi t}}_{x[n=-1]}$$

$\omega_0 = 4\pi$; $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

$x[n] = \frac{a_n}{2}$

média de amplitude é zero!

$x[0] = \frac{a_0}{2} = 0 \left(= \int_T x(t)\,dt = 0\right)$

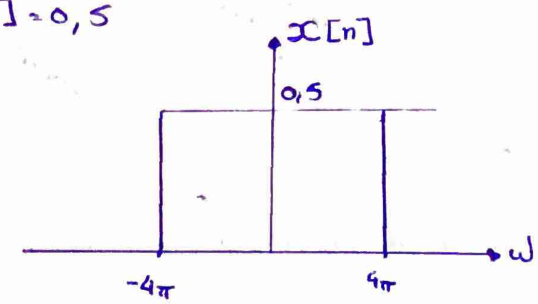
$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos n\omega_0 t\, dt = 4\int_T \cos 4\pi t \cdot \cos n4\pi t\, dt =$$

$$\underset{n=1}{=} 4\int_T \cos^2 4\pi t\, dt = 1 \qquad \left(\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}\right)$$

$n = \pm 1$

$$\int_T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t\, dt \neq 0 \to \text{se } m = n$$

$$\mathcal{X}[\pm 1] = 0,5$$



Propriedades das Séries de Fourier:

1) Linearidade:

$$x_1(t) \xrightarrow{FS} \mathcal{X}_1[n]$$

$$x_2(t) \xrightarrow{FS} \mathcal{X}_2[n]$$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{FS} \alpha \mathcal{X}_1[n] + \beta \mathcal{X}_2[n]$$

2) Translação:

$$x_1(t-\tau) \xrightarrow{FS} e^{-jn\omega_0\tau}\mathcal{X}_1[n]$$

3) Translação na frequência

$$Y[n] = \mathcal{X}[n-k] = \mathcal{X}[n]\, e^{-jn\omega_0 k}$$

$$g(t) = e^{jk\omega_0 t} x(t)$$

→ Transformada de Fourier — Utilizado para sinais não periódicos!

$$\mathcal{X}[n] = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad \Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}[n]\, e^{jn\omega_0 t}$$

$T \to \infty$: $\Delta\omega \to d\omega$, $n\omega_0 \to \omega$, $\sum \to \int$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int x(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt\; e^{jn\omega_0 t}$$

contínuo! (não temos mais ⎍⎍ e sim ⎍)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt\right] e^{j\omega t} d\omega$$

↳ freq. é contínua

Ideia: um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico de período

$$\boxed{\mathcal{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt}$$

Análise

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega}$$

Síntese

Magnitude e fase:

$$\mathcal{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \therefore \mathcal{X}(\omega) = |\mathcal{X}(\omega)|\, e^{\angle \mathcal{X}(\omega)}$$

par — Amplitude (magnitude) do espectro.

ímpar — Fase do espectro

Magnitude: informa a intensidade relativa dos componentes na frequência (i.e., energia em cada freq.)

Fase: informa como os componentes de frequência se alinham no tempo. ("alinhamento das diferentes funções que compõe o sinal").

$$\mathcal{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\omega t\, dt}_{A(\omega)} + j\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot \operatorname{sen}\omega t\, dt}_{B(\omega)}$$

$$\boxed{|\mathcal{X}(\omega)| = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}}$$

$$\boxed{\theta = \operatorname{arctg}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}}$$

Exemplo: calcular a transformada da função $x(t) = e^{-at}\cdot u(t)$, $a > 0$.

Solução:

$$\mathcal{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} u(t)\, dt =$$

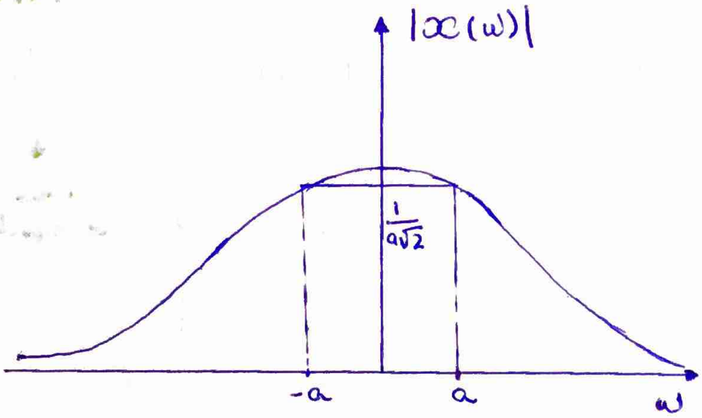
$$= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{-1}{a+j\omega}\, e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} =$$

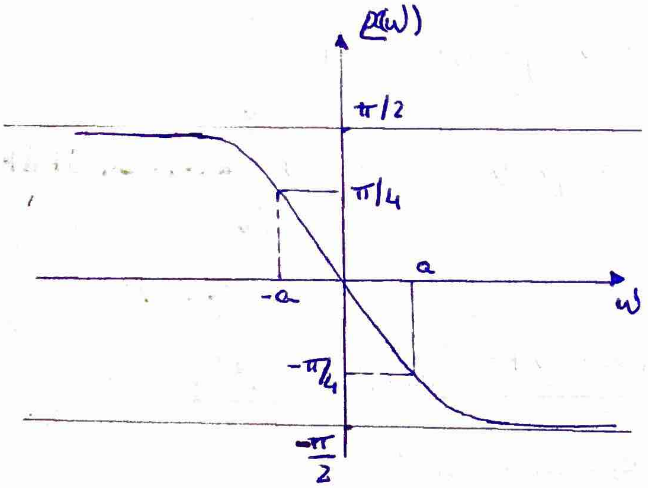
$$= \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\mathcal{X}(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}\cdot\frac{(a-j\omega)}{(a-j\omega)} = \frac{a^2}{a^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$|\mathcal{X}(\omega)| = \sqrt{\frac{a^2+\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

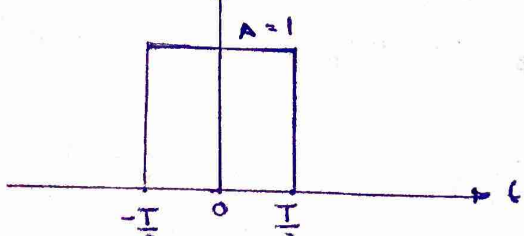
$\angle X(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{-\omega}{a}\right) = -\text{arctg}(\omega/a)$





<u>Exemplo</u>: calcular a transformada da função pulso retangular.

$$x(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } -T/2 < t < T/2 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$



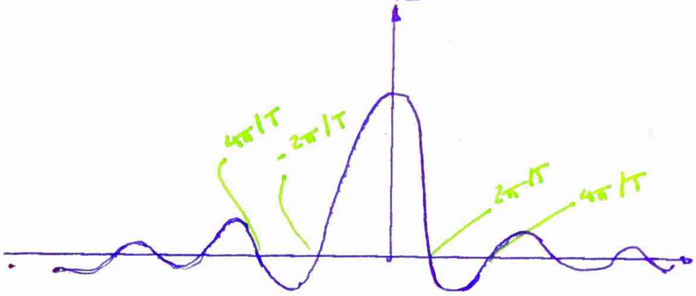
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} 1\, e^{-j\omega t}\, dt = \left(-\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\right)\Bigg|_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left(-e^{-j\omega T/2} + e^{j\omega T/2}\right) =$$

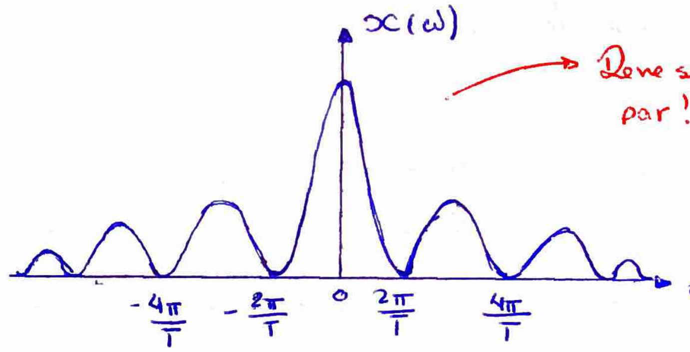
$\text{sen}\, \omega T/2 = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j}$

$$= \frac{2\, T/2}{\omega T/2} \cdot \text{sen}(\omega T/2) = T \frac{\text{sen}\, \omega T/2}{\omega T/2} = T\, \text{sinc}(\omega T/2)$$



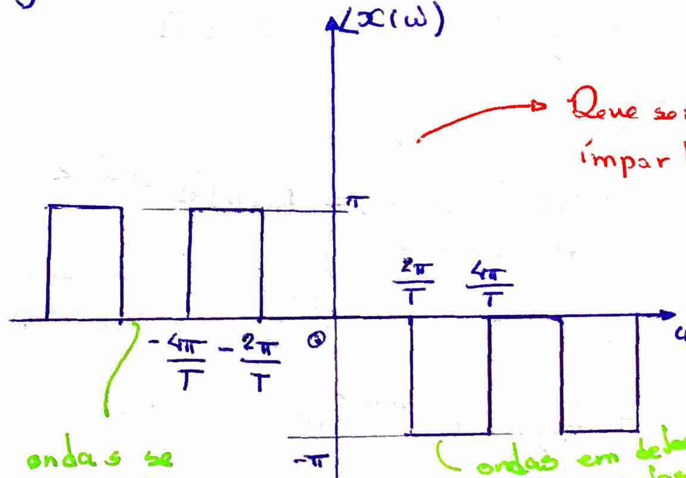
<u>Obs</u>: a TF de um impulso é uma constante!

Diagrama de Módulo:



Deve ser par!

Diagrama de Fase:



Deve ser ímpar!

ondas se sobrepondo completamente (fase 0 → máximo)

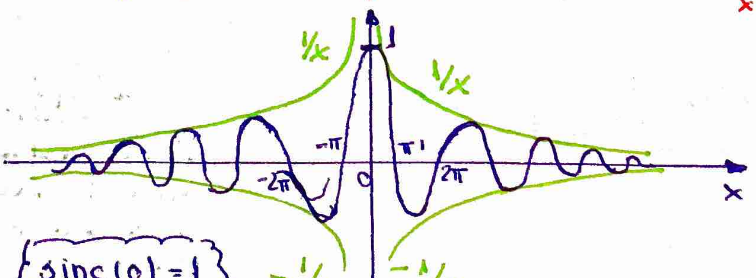
(ondas em defasagem (mínimo → fase π))

<u>Obs</u>: Função Sinc:

Amortece a oscilação

$\text{sinc}(x) = \text{sen}(x) \cdot \frac{1}{x}$ $\begin{cases} \text{período } 2\pi \\ \text{amplitude decrescente } \frac{1}{x} \end{cases}$

↳ é par!



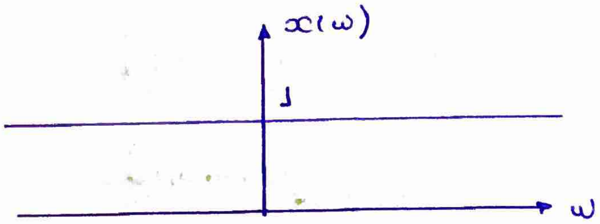
$\{\text{sinc}(0) = 1\}$

FT para impulso unitário:

$T \approx 0$ filtro

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

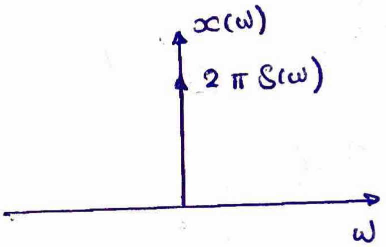
Impulso contém componentes em todas as frequências!

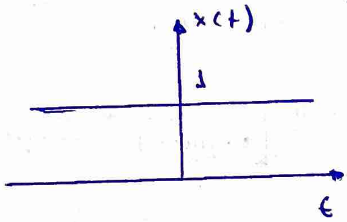


Inversa da FT para $\delta(\omega)$:

$$X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = 1$$





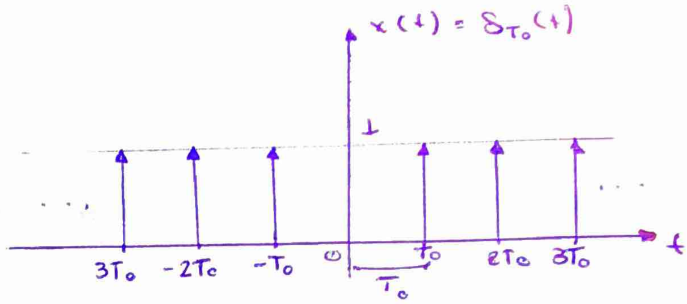
$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$
$\text{rect}(t/2a)$	$2a\,\text{sinc}(\omega a)$

FT para qualquer sinal periódico

$$\boxed{X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, \delta(\omega - \omega_0 n)}$$ ⇒ FT para sinais periódicos

Coeficientes da Série de Fourier exponencial

Exemplo: FT para um trem de impulsos



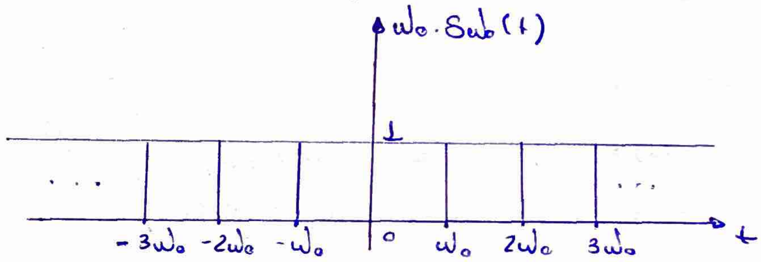
$$x(t) = \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{T} \delta(t)\cdot e^{j\omega_0 \cdot n t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T_0}$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\, \delta(\omega - n\omega_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$



A série de Fourier será:

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0}\left[\frac{e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}}{2}\right] + \frac{2}{T_0}\left[\frac{e^{-j2\omega_0 t} + e^{j2\omega_0 t}}{2}\right] + \dots = \frac{1}{T_0}\left[1 + 2\cos\omega_0 t + 2\cos 2\omega_0 t + \dots\right]$$

Se tivermos um sinal não periódico que se torna periódico, a transformada fica discreta!

Propriedades:

- **Linearidade**:

$$a\,x(t) + b\,y(t) \longrightarrow a\,X(\omega) + b\,Y(\omega)$$

- **Translação no tempo**:

$$x(t - t_0) \longrightarrow e^{-j\omega t_0}\, X(\omega)$$

(em t_0) Retardar um sinal não altera o espectro da amplitude, só o espectro da fase (alterado por $-\omega t_0$)

- **Escalonamento no tempo**:

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|}\, X(\omega/a)$$

A compressão de um sinal no domínio do tempo resulta numa expansão no domínio da frequência, e vice-versa.

• Dualidade: para qualquer relação entre $x(t)$ e $X(\omega)$, existe uma relação dual, obtida trocando $x(t)$ e $X(\omega)$ (com pequenas modificações).

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$
$$X(t) \longrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

• Translação na frequência

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \longrightarrow 2\pi X(\omega-\omega_0)$$

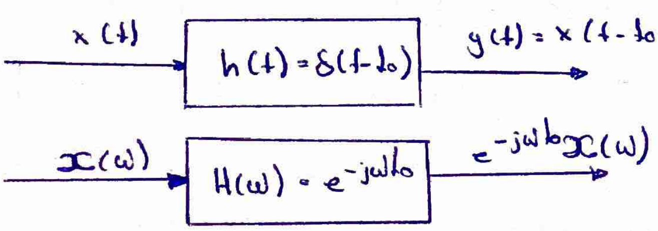
• Diferenciação e Integração

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow j\omega X(\omega)$$
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

• Convolução

$$h(t) * x(t) \longrightarrow H(\omega)\cdot X(\omega)$$
$$h(t)\cdot x(t) \longrightarrow H(\omega) * X(\omega)$$

Time Delay System



Exemplo: calcule a TF de $w(t) = x(t)y(t)$, onde $x(t) = e^{-at}\cdot u(t)$, $a>0$, $y(t) = \cos\omega_0 t$.

Solução: $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{a^2+\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$y(t) = \cos\omega_0 t$

$$\boxed{Y(\omega) = \pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]}$$

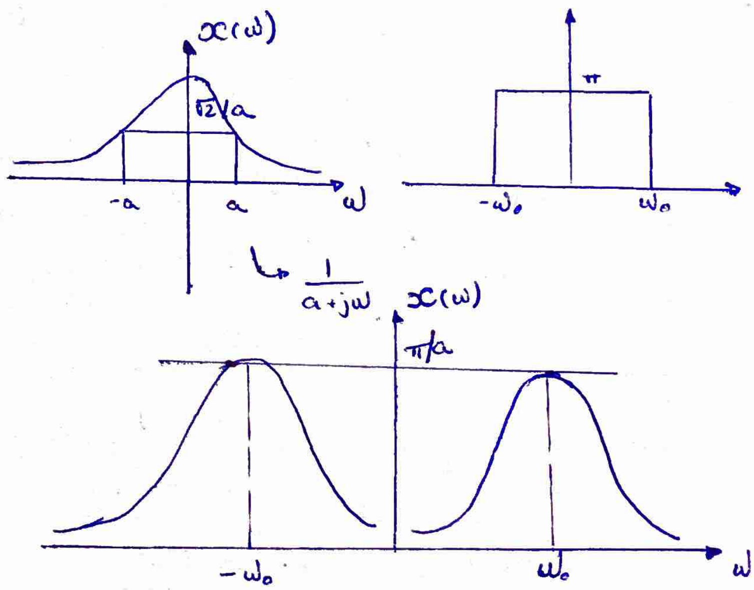
$$w(t) = x(t)\cdot y(t)$$
$$W(\omega) = X(\omega) * Y(\omega)$$
Convolução

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{a+j\omega'}\left[\delta(\omega-\omega'+\omega_0) + \delta(\omega-\omega'-\omega_0)\right]d\omega' =$$

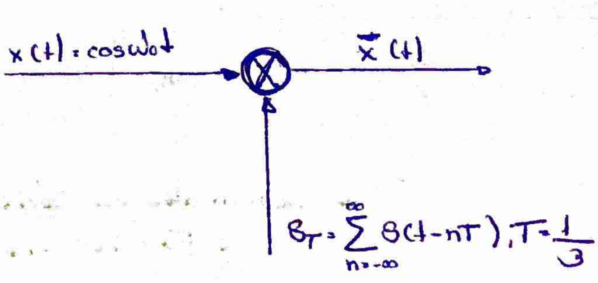
$$= \pi\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a+j\omega'}\,\underbrace{\delta(\omega-\omega'+\omega_0)}_{\omega'=\omega+\omega_0}\,d\omega' + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+j\omega'}\,\underbrace{\delta(\omega-\omega'-\omega_0)}_{\omega'=\omega-\omega_0}\,d\omega' =$$

$$= \frac{\pi}{a+j(\omega+\omega_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0-\omega')\,d\omega' + \frac{\pi}{a+j(\omega-\omega_0)} =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{a+j(\omega+\omega_0)} + \frac{1}{a+j(\omega-\omega_0)}\right]$$



Exemplo:



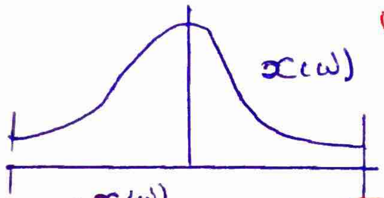
Compare a transformada do sinal $x(t)$ com o sinal $\bar{x}(t)$

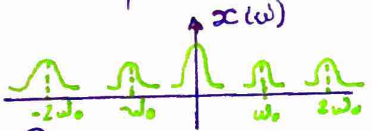
Solução:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T}\left(x(t) + 2x(t)\cos\omega_0 t + 2x(t)\cos 2\omega_0 t + \dots\right)$$

$$\bar{x}(\omega) = \frac{1}{T}\left[x(\omega) + 2x(\omega)\cdot(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)) + \right.$$
$$\left. + 2x(\omega)(\delta(\omega-2\omega_0) + \delta(\omega+2\omega_0))\right] + \dots$$

↳ Errado!



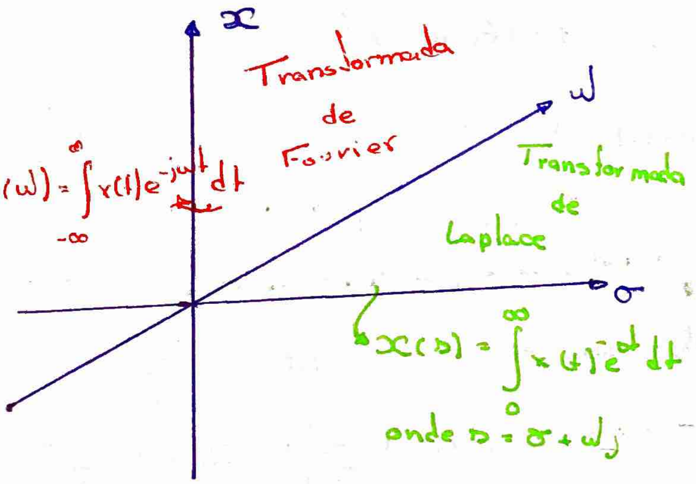


(B) → frequência máxima

III) Diagrama de Bode

A Transformada de Fourier é a Transformada de Laplace em regime permanente!

↳ Utilizamos TL para analisar estabilidade, controle e análise de impacto. Já a TF usamos por estudo de sinais.



$$x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

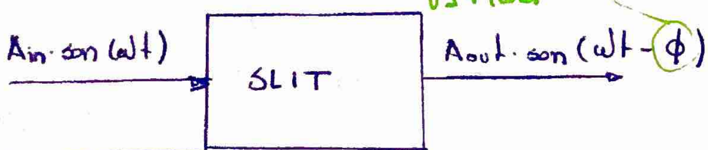
$$x(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

onde $s = \sigma + \omega j$

Onda senoidal: embora sinais senoidais sejam raros na natureza, podemos decompor outros sinais em sinais senoidais → Só para 1ª Ordem!

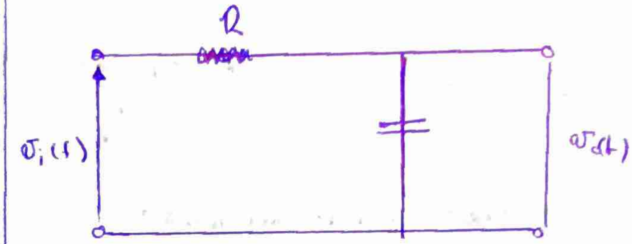
Razão de Amplitude:
$$M_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$-tg^{-1}(\omega\tau)$



Frequência não muda, só a amplitude e a fase.

Exemplo: circuito RC.



$v_i = v_R + v_C \Rightarrow v_i = Ri + v_C \Rightarrow$

$\Rightarrow v_i = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$, com $R = 100\,\Omega$ e $C = 1\,mF$

Resolvendo a EDO: $G(\omega) = \dfrac{1}{1+0{,}1j\omega} = \dfrac{1}{1+RCj\omega}$ (*)

Sistema de 1ª ordem (filtro passa baixa)

Cte de tempo!

1) $G(30) = \dfrac{1}{1+3j}\cdot\dfrac{(1-3j)}{(1-3j)} = \dfrac{1-3j}{1+9} = 0{,}1 - 0{,}3j$

$\|G(30)\| = \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}3^2} = 0{,}316$; $\angle G(30) = -tg^{-1}\left(\frac{0{,}3}{0{,}1}\right) = -71{,}5°$

(*) TF em $v_i = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$: $V_i = RC\,j\omega V_C(\omega) + V_C(\omega)$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{V_i} = \frac{1}{1+RC\omega j}$$

ou: $M_p = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 0{,}316$, $\phi = -tg^{-1}(30\cdot 0{,}1) = -71{,}56°$

$\tau \to 0{,}1$

multiplica

$v_i = 3\angle 0° \Rightarrow v_C = v_i \cdot g \Rightarrow 3\angle 0° \cdot 0{,}316\angle -71{,}56° =$

soma

$= 0{,}95\angle -71{,}56° = 0{,}95\,sen(30t - 71{,}56°)$

↳ não muda!

2) $\underbrace{v_i(t) = 3\,sen(30t + 40°)}$

↳ somar 40° na saída: $v_i = 0{,}95\,sen(30t - 31{,}56°)$

3) $v_i(t) = 3\,sen(10t + 40°) \Rightarrow G(10) = 0{,}5 - j0{,}5$

$\|G(10)\| = 0{,}707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\phi = -45°$

4) $v_i(t) = 3\cos(10t)$ → $\cos(x) = sen(x + 90°)$

	$\lvert G(\omega)\rvert$	ϕ
ω = 10	0,707	−45°
ω = 30	0,316	−71,5°
ω = 70	0,141	−81,9°
ω = 500	~0	~ −90°

○ Diagrama de Bode me dá a resposta em freq. de um sistema!!!

db × ω

Diagrama de Bode: gráficos de Ampl. × Freq. e fase × Freq. em relação a função de transferência para ondas senoidais. quero achar a relação entre a entrada e a saída.

φ × ω

E se o sistema for de 2ª ordem?

$$\boxed{G(\omega) = \frac{K\cdot\omega_n^2}{-\omega^2+2\xi\omega_n j\omega+\omega_n^2}}$$

→ freq. natural: $\frac{k}{m}$

→ fator de amortecimento: $\frac{b}{m} = 2\xi\omega_n$

Obs: antes (em II) fazíamos apenas uma análise de sinais. Agora, queremos entender o que ocorre na saída do sistema quando damos uma entrada senoidal. Utilizamos entradas senoidais para ter um entendimento completo das amplitudes, fases e frequência. Dessa forma, o diagrama nos auxilia a projetar filtros. → Vamos caracterizar o sist.

Exemplo: escreva a função de transferência abaixo inteiramente em termos de fatores básicos.

$$G(s) = \frac{2(s+30)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

fator de 1º ordem de zero real $\{\tau = 1/30\}$

Solução:

$$\frac{2\cdot 30(s/30+1)}{s\cdot 2(s/2+1)\cdot 2\left(\frac{s^2}{2}+s+1\right)} = \frac{15(s/30+1)}{s(s/2+1)(s^2/2+s+1)}$$

ganho

→ fator básico integrativo

→ fator quadrático de polo complexo $\{\omega_n = \sqrt{2},\ \xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

→ fator de 1º ordem do polo real $\{\tau = 1/2\}$

Obs: decibéis → proporção em relação a um nível de referência da intensidade

→ os termos em decibéis podem ser somados!

$20\log_{10}\sqrt{2} = 3dB$
$20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$
} Valores menores que 1 apresentam valores negativos em dB.

$20\log_{10} 10 = 20dB$
$20\log_{10} 100 = 40dB$
} 20dB para cada fator de 10 na intensidade

Fatores Básicos

- O ganho de Bode: K
- Os fatores integrativos (polo na origem) $\left(\frac{1}{s}\right)^n$
- Os fatores derivativos (zero na origem): s^n
- Os fatores de 1º Ordem tipo polos reais: $\left(\frac{1}{\tau s+1}\right)^n$
- Os fatores de 1º Ordem tipo zeros reais: $(\tau s+1)^n$
- Os fatores de 2º Ordem tipo polos complexos: $\left(\frac{1}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}\right)^n$
- Os fatores de 2º Ordem tipo zeros complexos: $\left(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^n$

Logo,

$$G(s) = \frac{K(\tau_2 s+1)\left(1+\frac{2\xi_2}{\omega_{n2}}s+\frac{s^2}{\omega_{n2}^2}\right)}{s(\tau_1 s+1)\left(1+\frac{2\xi_1}{\omega_{n1}}s+\frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right)}$$

→ Função de Transferência

$$G(j\omega) = \frac{K(\tau_2 j\omega+1)\left(1+\frac{2\xi_2}{\omega_{n2}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n2}^2}\right)}{j\omega(\tau_1 j\omega+1)\left(1+\frac{2\xi_1}{\omega_{n1}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n1}^2}\right)}$$

→ Função de Resposta em Frequência (FRF)

$$|G(j\omega)| = \frac{|K|\cdot|\tau_2 j\omega+1|\cdot\left|1+\frac{2\xi_2}{\omega_{n2}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n2}^2}\right|}{|j\omega|\cdot|\tau_1 j\omega+1|\cdot\left|1+\frac{2\xi_1}{\omega_{n1}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n1}^2}\right|}$$

em dB, para que vire uma soma

$$|G(j\omega)|_{dB} = |K|_{dB} + |\tau_2 j\omega+1|_{dB} + \left|1+\frac{2\xi_2}{\omega_{n2}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n2}^2}\right|_{dB} - \left(|j\omega|_{dB} + |\tau_1 j\omega+1|_{dB} + \left|1+\frac{2\xi_1}{\omega_{n1}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n1}^2}\right|_{dB}\right)$$

Vantagem os dB é que podemos somar a contribuição de cada parcela da FT.

$$\arg(G(j\omega)) = \arg K + \arg(\tau_2 j\omega+1) + \arg\left(1+\frac{2\xi_2}{\omega_{n2}}j\omega+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n2}^2}\right) - \left(\arg(j\omega) + \arg(\tau_1 j\omega+1) + \arg\left(1+\frac{2\xi_1}{\omega_{n1}}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_{n1}^2}\right)\right)$$

Para desenhar o Diagrama de Bode de um sistema precisaremos passar para os FATORES BÁSICOS!!!

O Diagrama de Bode pode ser obtido experimentalmente.

Lembrar: $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|G(j\omega)|$

→ Influência dos componentes:

• **Ganho K**:

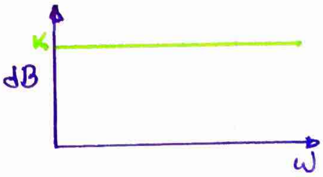
$G(j\omega) = K$ é uma cte (não depende da frequência)

$|K|_{dB} = 20\log|K|$

$\angle G(j\omega) = 0°$, se $K > 0$

$\angle G(j\omega) = 180°$, se $K < 0$

↳ Pois, K é um número real!



• **Fator Integral** $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$:

$\left|\frac{1}{j\omega}\right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega}$

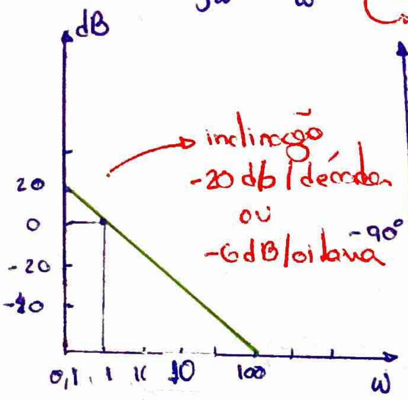
→ (0,1) é sempre um ponto!

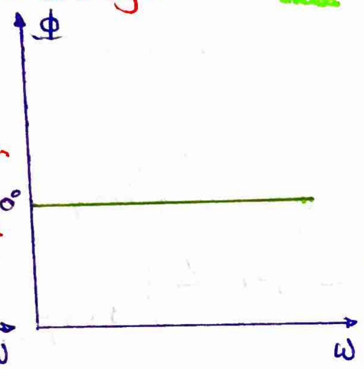
$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = -20\log\omega$ dB

↻ Inclinação de -20dB! / década

$\angle G(j\omega) = \angle\frac{1}{j\omega} = -\angle\frac{j}{\omega} = -90°$

↳ só imaginário!





Obs:

◦ uma oitava é um intervalo compreendido entre ω e 2ω

◦ uma década é um intervalo compreendido entre ω e 10ω

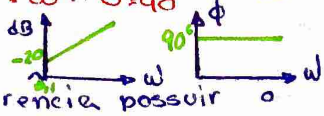
• **Fator derivativo**: $G(j\omega) = j\omega$

Inclinação de 20dB / década

$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|j\omega| = 20\log\omega$ dB

$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90°$ ← $tg\,\theta = \frac{\omega}{0} = \infty \therefore \theta = 90°$

20dB/déc.



Obs: se a função de transferência possuir o fator $(1/j\omega)^n$ ou $(j\omega)^n$, as grandezas logarítmicas se tornarão respectivamente:

→ Inclinação de $-20n$ dB / década

$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n\right| = n\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| =$

$= -20n\log\omega$ dB

$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|(j\omega)^n| = n\log|j\omega| =$

$= 20n\log\omega$ dB

↳ Inclinação de 20ndB / década

Respectivamente, os ângulos de fase são $-90n°$ e $90n°$.

• **Fator polo de primeira ordem**: $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$

$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$ dB

⇝ Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$:

$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} \cong -20\log 1 = 0$ dB

⇝ Para $\omega = 1/\tau$: ⇝ frequência de canto ou corte

$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{2} \cong -3$ dB

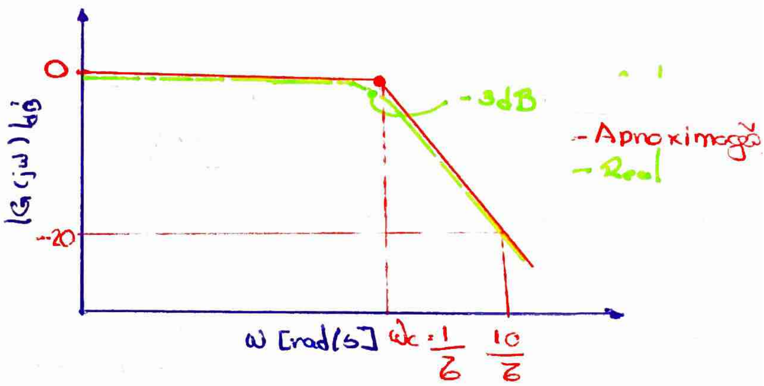
⇝ Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$:

decresce em 20dB p/ cada déc. de ω

$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2} = -20\log\omega\tau$ dB

$\omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0$ dB

$\omega = \frac{10}{\tau} \rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20$ dB



$\angle G(j\omega) = \angle\left(\frac{1}{1+j\omega\tau}\right) = -\angle(1+j\omega\tau) = -arctg\,\omega\tau$

⇝ Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$:

$\angle G(j\omega) = -arctg\,0 = 0°$

⇝ Para $\omega = 1/\tau$:

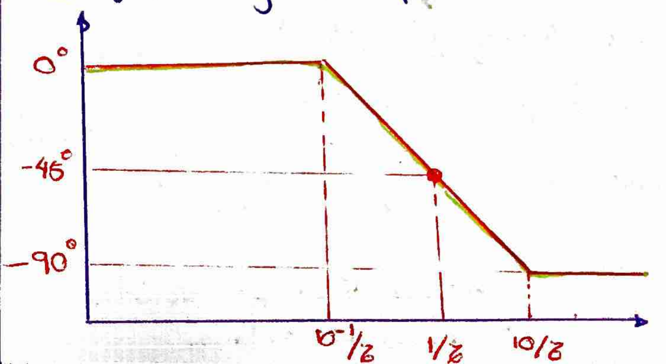
$\angle G(j\omega) = -arctg\,1 = -45°$

↳ Aprox: $10^{-1}/\tau < \omega < 10/\tau$

$\angle G(j\omega) = -arctg\,\omega\tau$ (≈ reta)

⇝ Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$:

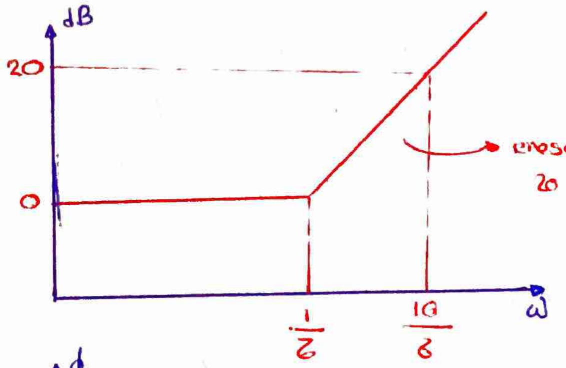
$\angle G(j\omega) = -arctg\,\infty = -90°$

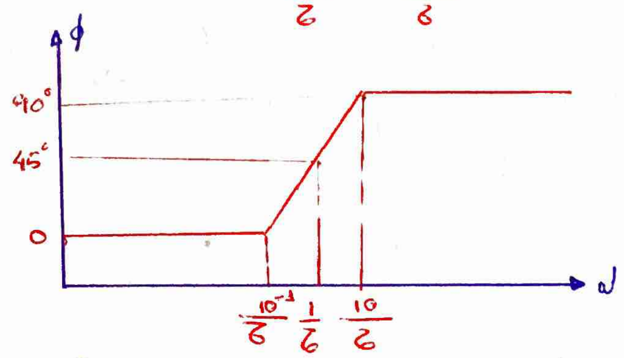


• Fator zeros de 1ª ordem: $G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|1+j\omega\tau| = 20\log\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\ dB$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j\omega\tau) = \operatorname{atg}\omega\tau$$





• Fatores Pólos Quadráticos: $G(j\omega) = \dfrac{1}{\left[1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$

Pólos complexos: $0 \leq \xi < 1$

Pólos duplos: $\xi = 1$

Pólos reais distintos: $\xi > 1$ → produto de dois fatores de 1ª ordem

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{1}{\left[1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^n}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20n\log\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

frequência natural

→ Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$:

$$|G(j\omega)|_{dB} \cong -20n\log\sqrt{1+0} \cong -20n\log 1 = 0\ dB$$

→ Para $\omega = \omega_n$:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -40\log 2\xi = 0\ dB$$

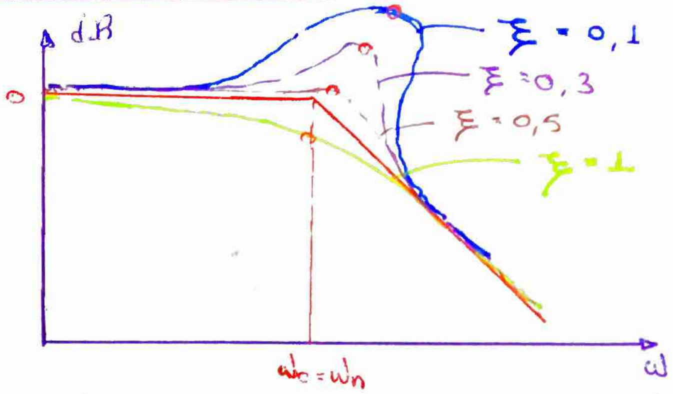
ocorrerá um pico de ressonância

→ Para altas frequências, $\omega \gg \omega_n$:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4} \cong -40\log\frac{\omega}{\omega_n}\ dB$$

A assíntota de baixa freq. cruza a assíntota de alta freq. em $\omega = \omega_n$

Decresce 40 dB por década ou 12 dB por oitava.



Amplitudes dos erros em relação a assíntota dependerá do valor de ξ. Pequenos valores de ξ levam a erros maiores.

A medida que o valor de ξ diminui, as curvas de $|G(j\omega)|_{dB}$ vão ficando mais altas. E, para $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$, surgem picos, que vão se tornando cada vez mais altos a medida que $\xi \to 0$. Esses picos ocorrem na chamada frequência de ressonância $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

→ A frequência de ressonância é muito próxima da frequência natural

$$\angle G(j\omega) = \angle\left(\frac{1}{1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)^n =$$

$$= -\angle\left(1+2\xi\frac{j\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^n =$$

$$= -n\operatorname{arctg}\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right]$$

→ Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$:

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{arctg} 0 = 0$$

→ Para $\omega = \omega_n$:

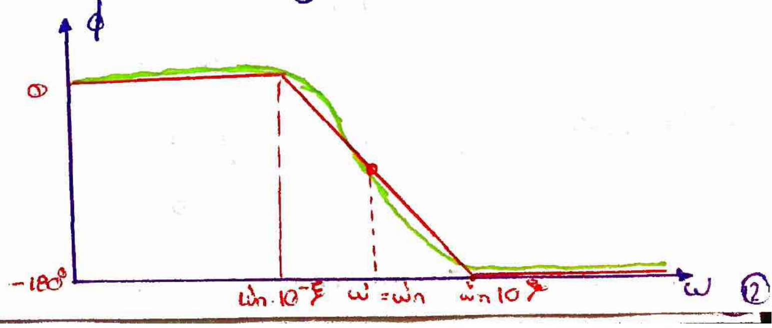
$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{arctg}\infty = -90°$$

O diagrama de fase fica com um declive mais acentuado a medida que $\xi \to 0$.

Aprox: $\omega_n \cdot 10^{-\xi} < \omega < \omega_n 10^{\xi}$

→ Para $\omega \gg \omega_n$:

$$\angle G(j\omega) = -\operatorname{arctg}(-0°) = -180°$$



As aproximações assintóticas para as curvas de resposta em frequência não são precisas para um fator com baixos valores de ξ.

Frequência e Pico de ressonância:

Quando ocorrer a ressonância teremos a máxima dissipação de energia, ou seja, a maior intensidade.

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}} = g(\omega)$$

↳ teremos ressonância quando tivermos o maior $|G(j\omega)|$, ou seja, a maior intensidade. ($g(\omega)$ for mínimo)

$$\frac{dg(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}, \text{ para } 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$$

O módulo e a fase do pico serão:

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \therefore |M_r|_{dB} = |G(j\omega_r)|_{dB} = -20\log 2\xi\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\angle G(j\omega_r) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\xi}\right) = -90° + \operatorname{sen}^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

- Fator zeros quadráticos:

Curvas de módulo e fase para zeros quadráticos podem ser obtidos invertendo-se o sinal das curvas de módulo e fase dos fatores de polos quadráticos. As principais diferenças são que os picos de ressonância são para baixo e as curvas de fase vão de 0° a 180°