

... independentemente pelo outro.

→ pode ser usado para aproximar soluções de problemas em RT com sólidos finitos onde $h \rightarrow \infty$ ou seja, evitamos a utilização da solução exata!

Feita esta aproximação, podemos encontrar soluções analíticas para o problema a partir de 3 casos:

• Caso 1: Temperatura na superfície constante

$$T(0,t) = T_s + \bar{T}(x,0) = T_i$$

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$q_s'' = k \frac{(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

→ Fluxo na superfície!

• Caso 2: Fluxo térmico na superfície de

$$T(x,0) = T_i$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0'' = q_s''$$

$$T(x,t) - T_i = \frac{2q_0'' (\alpha t / \pi)^{1/2}}{k} e^{-x^2/4\alpha t} - \frac{q_0'' x}{k} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

→ Função erro complementar: $1 - \text{erf}(x/y)$

• Caso 3: Convecção na superfície:

$$T(x,0) = T_i$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h [T_{\infty} - T(0,t)]$$

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_{\infty} - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[e^{\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}} \right] \left[\text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} \right]$$

Como verificar se posso usar a aproximação por um sólido semi-infinito?

$$\delta_p = 2,3 \cdot \sqrt{\alpha t^2}$$

Espessura de penetração térmica

Profundidade até a qual efeitos significativos na temperatura se propagam no meio.

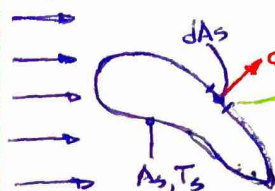
Basta comparar com as dimensões do sólido para validar a aproximação!

Caso tenhamos comb entre dois sólidos semi-infinitos $A \leftarrow B$:

$$T_0 = \frac{(k\rho c)_A^{1/2} T_{A,i} + (k\rho c)_B^{1/2} T_{B,i}}{(k\rho c)_A^{1/2} + (k\rho c)_B^{1/2}}$$

VIII) Introdução à Convecção - Eq. de Navier-Stokes.

V_i, T_{∞}



Fluxo local de calor (W/m^2):

$$q_s'' = h(T_s - T_{\infty})$$

Taxa total de transferência de calor (W):

$$q = \int_{A_s} q'' dA_s$$

Podemos escrever:

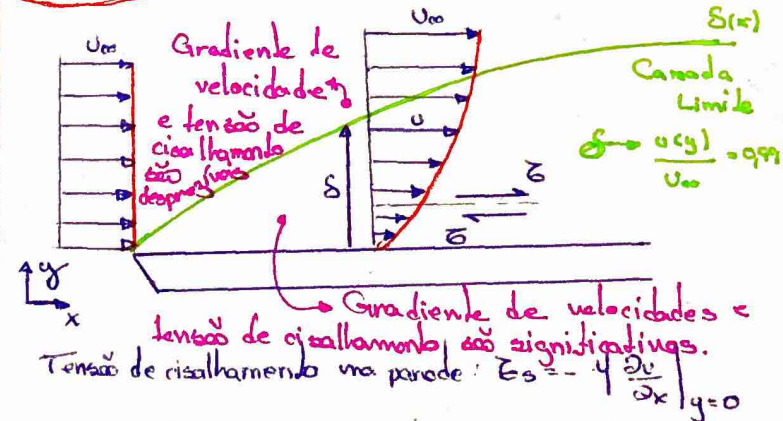
$$q = h A_s (T_s - T_{\infty})$$

→ é o h médio: $\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int h dA_s$

O h não é uma propriedade, logo não está tabelado!

O único jeito de se obter é resolvendo a equação!

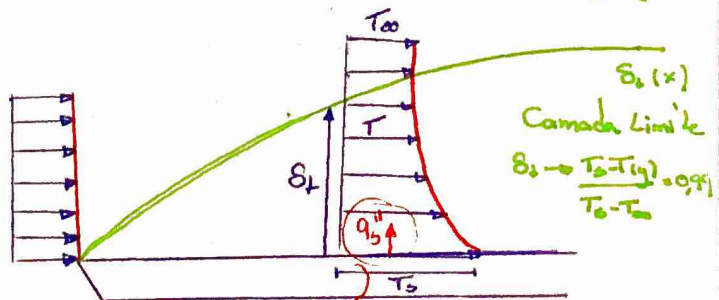
Camada limite de velocidade: Região do fluido que foi influenciada pela parede.



Gradiente de velocidades e tensão de cisalhamento são significativos. Tensão de cisalhamento na parede: $\tau_s = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}$

Coefficiente de atrito local: $c_f = \frac{\tau_s}{\rho U_{\infty}^2 / 2}$

Camada limite térmica:

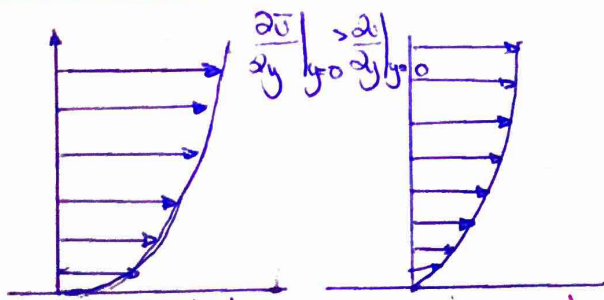


Como não há velocidade na parede a transferência de calor pode ser dada somente pela Lei de Fourier: $q'' = -k_s \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$

Coefficiente local de transferência de calor por convecção:

$$h = \frac{-q_s}{T_0 - T_{\infty}}$$

Escoamento laminar x turbulento:



Turbulento

Laminar

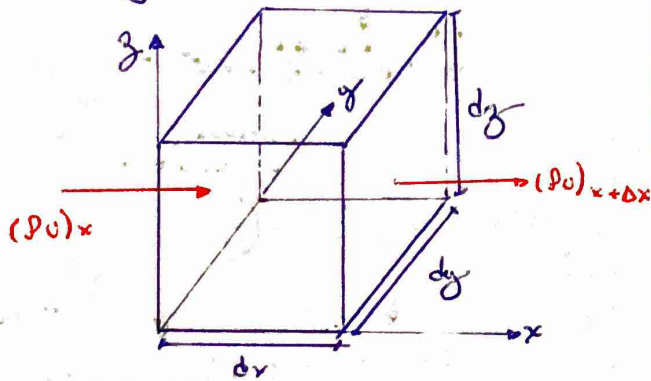
Equação de Continuidade

Com o aumento de x , o gradiente de velocidade em $y=0$, tende a diminuir devido ao aumento da aceleração

Balanco de massa:

TAXA DE VARIAÇÃO da MASSA = TAXA DE ENTRADA DE MASSA - TAXA DE SAÍDA DE MASSA

IC para o balanço de massa:



$$dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t} = dy dz [(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}] + dx dz [(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy}] + dx dy [(\rho w)_z - (\rho w)_{z+dz}]$$

Eq. da Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right)$$

Taxa de acúmulo de massa por unidade de volume

Taxa de adição de massa por unidade de volume por convecção

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - (\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}) \text{ ou } \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div}(\rho \vec{v})$$

Casos particulares:

• Massa específica constante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

• Escoamento incompressível em 2D:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

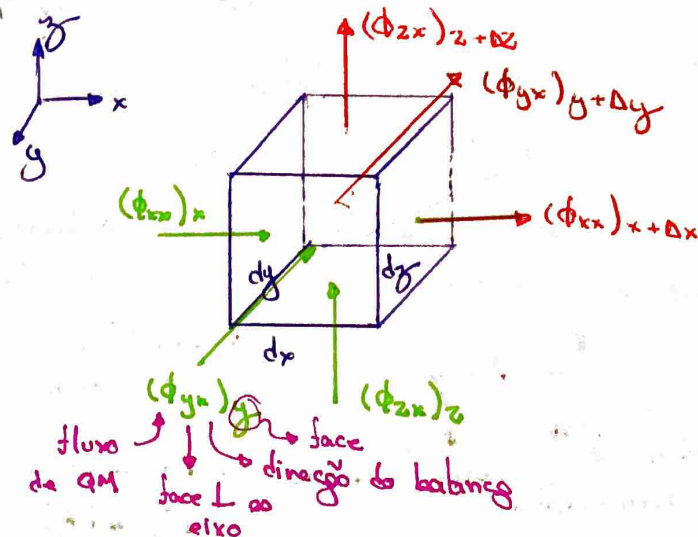
2ª Lei de Newton do movimento

Balanco de Quantidade de Movimento:

Adição!

TAXA DE ACUMULO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO = TAXA DE ENTRADA DE QM por TRASP. CONVECTIVO - TAXA DE SAÍDA DE QM por TRASP. CONVECTIVO + TAXA DE ENTRADA DE QM por TRASP. MOLECULAR - TAXA DE SAÍDA DE QM por TRASP. MOLECULAR + FORÇA DE GRAVIDADE ATUANTE NO SISTEMA

Considere o balanço de QM na direção x :



$$dx dy dz \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} = dy dz (\rho u^2|_{x+dx} - \rho u^2|_x) + dx dz (\rho v^2|_y - \rho v^2|_{y+dy}) + dx dy (\rho w^2|_z - \rho w^2|_{z+dz}) + dx dy dz \rho g_x$$

expandir em Taylor!

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

Fazendo a mesma coisa para as outras direções:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) + \rho g_y$$

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

Elas são as Equações de Movimento

na notação tensorial e vetorial:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\phi} + \rho \vec{g}$$

Tensor de Fluxo de QM

Vamos tratar as forças de pressão e tensão viscosa como fluxo da quantidade de movimento.

As tensões viscosas serão dadas por:

$$\vec{\tau}_x = \tau_{xx} \vec{e}_x + \tau_{xy} \vec{e}_y + \tau_{xz} \vec{e}_z$$

$$\vec{\tau}_y = \tau_{yx} \vec{e}_x + \tau_{yy} \vec{e}_y + \tau_{yz} \vec{e}_z$$

$$\vec{\tau}_z = \tau_{zx} \vec{e}_x + \tau_{zy} \vec{e}_y + \tau_{zz} \vec{e}_z$$

Tensões Normais!

Na forma tensorial: $\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$

Interpretação: força na direção j por unidade de área perpendicular à direção i.

Considerando a pressão termodinâmica, definiremos as tensões moleculares:

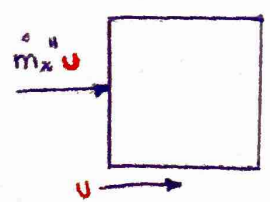
$$\tau_{ij} = p \delta_{ij} + \zeta_{ij}$$

Tensões Viscosas

Pressão Termodinâmica δ_{ij} delta de Kronecker. $\begin{cases} 1, & \text{se } i=j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Na notação tensorial: $\vec{\tau} = \begin{bmatrix} p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p + \tau_{zz} \end{bmatrix}$

Agora, consideramos o transporte convectivo de quantidade de movimento:



$m_x u \equiv$ fluxo de quantidade de movimento $\rho \cdot u$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

Para as demais direções se utilizando o produto diádico:

$$\rho \vec{v} \vec{v} = \begin{Bmatrix} \rho u u & \rho u v & \rho u w \\ \rho v u & \rho v v & \rho v w \\ \rho w u & \rho w v & \rho w w \end{Bmatrix}$$

Tensor Fluxo convectivo de quantidade de movimento.

Escrevendo o tensor combinado de fluxo de quantidade de movimento: $\vec{\phi} = \vec{\tau} + \rho \vec{v} \vec{v}$

$$\vec{\phi} = \begin{Bmatrix} p + \tau_{xx} + \rho u u & \tau_{xy} + \rho u v & \tau_{xz} + \rho u w \\ \tau_{yx} + \rho v u & p + \tau_{yy} + \rho v v & \tau_{yz} + \rho v w \\ \tau_{zx} + \rho w u & \tau_{zy} + \rho w v & p + \tau_{zz} + \rho w w \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\phi} + \rho \vec{g}$$

$$\vec{\phi} = p \vec{\delta} + \vec{\tau} + \rho \vec{v} \vec{v}$$

Força externa no fluido por unidade de volume.

Logo,

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) - \nabla p - \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{g}$$

Taxa de acúmulo de Q.M. por unidade de volume $\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t}$
 Taxa de adição de QM por convecção por unidade de volume $-\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})$
 Taxa de adição de QM por transporte molecular por unidade de volume $-\nabla \cdot \vec{\tau}$

Para um escoamento incompressível em 2D e RP:

$$\vec{\tau} = -\mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^t)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \quad \text{e} \quad (\nabla \vec{v})^t = \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \right\}$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \rho u u & \rho u v \\ \rho v u & \rho v v \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v u u)}{\partial y} \quad \frac{\partial (\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v v v)}{\partial y} \right] =$$

Regra do Produto

$$= \rho \left[2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial x} + 2v \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$= \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$= \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$\rho \vec{g} = \rho [g_x \hat{i} + g_y \hat{j}]$$

Logo,

$$\rho \left[\begin{matrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right] = - \left[\begin{matrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{matrix} \right] + \mu \left[\begin{matrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{matrix} \right] + \rho \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$$

1ª Lei da Termodinâmica

Balanco de energia:

TAXA DE ACÚMULO DE ENERGIA TÉRMICA = TAXA DE ENTRADA DE ENERGIA POR TRANSP. CONVECTIVO - TAXA DE SAÍDA DE ENERGIA POR TRANSP. CONVEC + TAXA DE ENTRADA POR TRANSP. MOLECULAR

- TAXA DE SAÍDA POR TRANSP. MOLECULAR + TAXA DE GERAÇÃO DE ENERGIA TÉRMICA

Tomando um VC diferencial obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho \hat{U} \right) = - \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho \hat{U} \right) \vec{v} + - (\nabla \cdot p \vec{v}) - (\nabla \cdot [\vec{c} \cdot \vec{v}]) - \nabla q^* + \rho \vec{v} \cdot \vec{g}$$

→ Não estamos considerando a energia potencial

O que nos interessa é a energia interna e como todo trabalho contribui para o aumento da energia interna:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{U}) = - (\nabla \cdot \rho \hat{U} \vec{v}) - (\nabla \cdot \vec{q}^*) + - p (\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{c} \cdot \nabla \vec{v})$$

Taxa da adição de energia por convecção

$\rho (\vec{v} \cdot \vec{v}) \equiv$ taxa reversível de aumento de energia interna por volume e através de compressão. (é uma parcela com volume no trabalho e faz referência a dilatação térmica)

Quando o VC é comprimido este termo contribui com o aumento da energia interna, ou seja, o sinal do termo é \ominus (aumenta a temperatura). $\rightarrow \ominus$, se o fluido é incompressível

$\vec{c} : \nabla \vec{v} \equiv$ taxa irreversível de aumento de energia interna por volume por causa da dissipação viscosa.

Sempre coloca energia! (termo sempre negativo)

fluidos newtonianos

Se o termo fosse \oplus , o fluido poderia estar resfriando e acelerando \Rightarrow 2ª Lei não é respeitada.

Considerando um escoamento incompressível, em 2D, 2P, fluido com propriedades constantes e com geração interna:

$$\rho \left[\frac{\partial (\hat{U}_u)}{\partial x} + \frac{\partial (\hat{U}_v)}{\partial y} \right] = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \Rightarrow$$

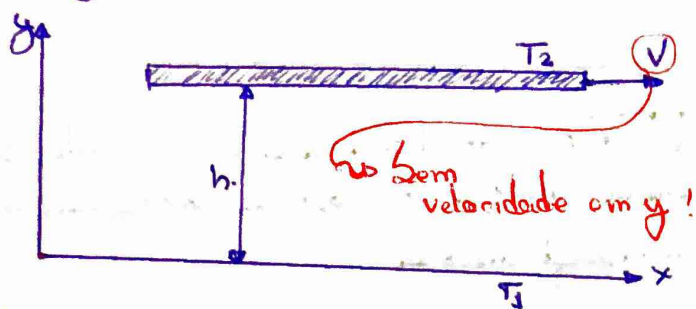
→ Regra de produto e Eq. da Continuidade

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \mu \phi + \dot{q}, \text{ onde}$$

$$\mu \phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

A partir das eqs. encontradas (continuidade, movimento e energia) conseguimos resolver a camada limite, obtendo a distribuição de temperatura e velocidade.

Exemplo: escoamento de Couette (canal de deslizamento)



- Hipóteses:
- Regime Permanente
 - Escoamento 2D
 - Escoamento Laminar
 - Propriedades Constantes.

Eq. da Continuidade: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (sem veloc em y)

Eq. de Movimento:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho [g_x]$$

$$\Rightarrow \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Integrando: $u = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2$

cc: $u(y=0) = 0$

$u(y=h) = V$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) + \frac{V y}{h}$$

distribuição de velocidades

Eq. da Energia:

$$\rho \left[\frac{\partial(\hat{u}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{u}v)}{\partial y} \right] = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$\Rightarrow k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Se $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = V \frac{y}{h} \therefore \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{V}{h} \right)^2$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \mu \left(\frac{V}{h} \right)^2$$

Integrando: $T = - \frac{\mu}{2k} \left(\frac{V}{h} \right)^2 y^2 + C_3 y + C_4$

cc: $T(y=0) = T_1$

$T(y=h) = T_2$

$$\Rightarrow T = - \frac{\mu V^2}{2k} \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) + (T_2 - T_1) \frac{y}{h} + T_1$$

distribuição de temperatura

Note que a espessura das camadas limites em geral são muito pequenas, em relação ao corpo sobre o qual elas se formam. E a velocidade na direção x e a temperatura devem mudar seus valores da superfície para a corrente livre. Dessa forma, os gradientes ao longo da superfície são muito menores que os gradientes normais a esta.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Como a camada limite é fina, o gradiente de pressão em x no interior da camada limite pode ser aproximado pelo gradiente de pressão na corrente livre:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_{00}}{dx} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial p}{\partial x}} \right\} \text{fluido se move na direção } x!$$

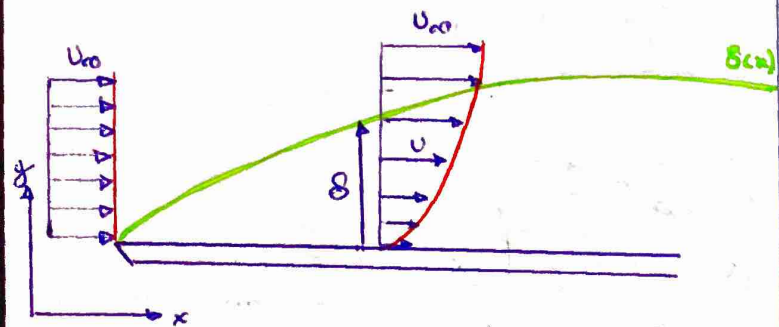
ix) Camada Limite:

→ Análise de ordem de grandeza

Serve para ver quais termos são desprezíveis!
 ("Normalização dos comentários feitos anteriormente")

Considerações:

- forças de campo desprezíveis ($g_x = g_y = 0$)
- sem geração interna ($\dot{q} = 0$)



$$x \approx L; y \approx \delta; u \approx U_{\infty}; \delta \ll L$$

Eq. da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{U_{\infty}}{L} + \frac{v}{\delta} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow v \approx \frac{U_{\infty} \delta}{L} \rightarrow v \ll U_{\infty}$$

veloc. na direção y é muito pequena, sendo muitas vezes desprezível.

Eq. da Qtd. de Movimento em x:

$$\rho \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rightarrow \rho \left(\frac{U_{\infty} \cdot U_{\infty}}{L} + \frac{U_{\infty} \delta}{L} \cdot \frac{U_{\infty}}{\delta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{U_{\infty}^2}{L^2} + \frac{U_{\infty}^2}{\delta^2} \right)$$

mesma ordem de grandeza $\frac{U_{\infty}^2}{L^2} \ll \frac{U_{\infty}^2}{\delta^2}$

$$\Rightarrow \rho \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Eq. da Qtd. de Movimento em y:

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\rightarrow \rho \left(\frac{U_{\infty} \cdot U_{\infty} \delta}{L} \cdot \frac{1}{L} + \frac{U_{\infty} \delta}{L} \cdot \frac{U_{\infty} \delta}{L} \cdot \frac{1}{\delta} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{U_{\infty}^2 \delta^2}{L^2} \cdot \frac{1}{L^2} + \frac{U_{\infty}^2 \delta^2}{L^2} \cdot \frac{1}{\delta^2} \right)$$

$\frac{U_{\infty}^2 \delta^2}{L^2 S^2} \gg \frac{U_{\infty}^2 \delta^2}{L^2 L^2}$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Comparando as equações em x e y:

$$\rho \left(\frac{U_{\infty}^2}{L} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{U_{\infty}}{\delta^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{U_{\infty}^2 \delta}{L^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{U_{\infty}}{\delta^2} \cdot \frac{\delta}{L} \right)$$

$$\frac{U_{\infty}^2}{L} \gg \frac{U_{\infty}^2 \delta}{L^2}$$

$$\frac{U_{\infty}}{\delta^2} \gg \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \cdot \frac{\delta}{L}$$

Equação de mov. em y!
 $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$

Lembrando que:

$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{d p_{00}}{dx}$ } O gradiente de pressão em x é igual dentro e fora da camada limite.

Assim:

$$u \gg v$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Aplicando estas aproximações nas eqs de

Camada Limite:

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\bullet u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ } Viscosidade Cinemática: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

$$\bullet u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

α } Difusividade térmica: $\alpha = \frac{k}{\rho c}$

Vamos adimensionalizar as eqs. acima, para que possamos utilizar analogias, de forma a facilitar a resolução das EDPs em ques-
 ão.

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{V}, v^* = \frac{v}{V}$$

$$T^* = \frac{T - T_b}{T_\infty - T_b}; p^* = \frac{p}{\rho V^2}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^*(x^*, 0) = 0, v^*(x^*, 0) = 0,$$

$$u^*(x^*, \infty) = \frac{U_\infty}{V}$$

cc

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Sem dissipação viscosa

$$T^*(x^*, 0) = 0; T^*(x^*, \infty) = 1$$

cc

→ Números adimensionais

• Reynolds: $Re_L = \frac{VL}{\nu}$ } tipo de escoamento: laminar ou turbulento

• Prandtl: $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$ } viscosidade, associada a qtd. de movimento
 } difusividade, associada a transf. de energia

Pr muito alto significa que a transf. de qtd. de movimento é muito maior que a transf. de energia ⇒ fluido é freado rápido.

$Pr = 1$ significa que as camadas limite de temperatura e de velocidade são coincidentes

• Nusselt: $Nu_L = \frac{hL}{k} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$
 do fluido!

É o gradiente adimensional da temp. em $y=0$.

Utilizaremos o Nusselt para encontrar o valor do coeficiente de transferência de calor h .

• Stanton: $St = \frac{Nu}{Re Pr}$

• Coef. de Atrito: $C_f = \frac{\tau_s}{\rho V^2/2} = \frac{2}{Re_L} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}$

Obs: Prandtl é uma propriedade do escoamento (laminar). Já Reynolds é uma característica de um escoamento (particular de cada escoamento).

→ Analogia de Reynolds:

Se $Pr = 1$ e $\frac{dp^*}{dx^*} = 0$ então:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Adimensionalizar equações semelhantes!

cc: $u^*(x^*, 0) = 0, v^*(x^*, 0) = 0, u^*(x^*, \infty) = 1$
 $T^*(x^*, 0) = 0, T^*(x^*, \infty) = 1$

$$\frac{Re_L C_f}{2} = Nu_L$$

Obs: Analogia de Chilton-Collburn

$$0,6 < Pr < 60$$

$$\frac{C_f}{2} = St \cdot Pr^{1/3} \Rightarrow \text{É o valor } j \text{ de Collburn.}$$

Para uma parede plana em 2D temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Nem sempre conseguimos resolver a camada limite de forma simples como fizemos no escoamento de Couette e nem sempre conseguimos utilizar a analogia de Reynolds ou Collburn. Nessa forma, será interessante encontrar, não mais os gradientes de temperatura e velocidade, mas sim parâmetros que caracterizam locais do

escoamento dentro do camada limite. Para tanto, utilizamos a solução de Blasius e a Solução Integral.

→ Solução de Blasius.

- Pressupõe placa plana isotérmica!
- A ideia da Solução de Blasius é transformar as EDPs em EDOs!

$$\delta = \frac{5,0}{\sqrt{U_\infty/\sqrt{x}}} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

Quanto maior a velocidade na corrente livre menor será a altura da camada limite.

O coeficiente de atrito local será dado por:

$$C_{f,x} = \frac{\tau_{s,x}}{\rho U_\infty^2 / 2} = 0,664 Re_x^{-1/2}$$

Para $Pr \geq 0,6$:

$$Nu_x = 0,332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

$$\frac{\delta}{\delta_t} = Pr^{1/3}$$

Camada Limite Térmica

→ Solução Integral Aproximada

É uma alternativa para a solução de Blasius. Embora mais simples, é menos precisa que a solução de Blasius.

$$\delta = \frac{4,64}{\sqrt{U_\infty/\sqrt{x}}} = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x}}$$

Coeficiente de Atrito Local:

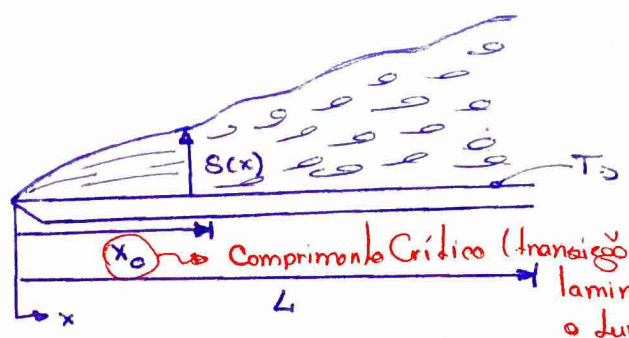
$$C_{f,x} = \frac{\tau_{s,x}}{\rho U_\infty^2 / 2} = 0,646 Re_x^{-1/2}$$

Para $Pr \geq 1$:

$$\frac{\delta}{\delta_t} = 1,026 \cdot Pr^{1/3}$$

$$Nu = 0,332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

X) Escoamento Externo



- Se $Re_x < Re_{x,c} \rightarrow$ escoamento laminar
- Se $Re_x > Re_{x,c} \rightarrow$ escoamento turbulento

$$\frac{x_c}{L} = \frac{Re_{x,c}}{Re_L}$$

Usaremos como Reynolds crítico:

$$Re_{x,c} = 5 \cdot 10^5$$

→ Placa plana isotérmica (correlações)

→ Escoamento laminar

$$\delta = \frac{5}{\sqrt{U_\infty/\sqrt{x}}} = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

↗ Avaliaremos as propriedades utilizando a temperatura de filme:

$$T_f = T_s + T_\infty$$

$$\delta / \delta_t = Pr^{1/3}$$

$$C_{f,x} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow \overline{C_{f,x}} = 1,328 Re_x^{-1/2}$$

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}, Pr \geq 0,6$$

$$\rightarrow Nu_x = 0,664 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

Resultados obtidos da solução de Blasius

• Metais líquidos:

$$Nu_x = 0,564 Re_x^{1/2}, Pr \leq 0,05 \text{ e } Re_x \geq 100$$

→ Número de Peclet:

$$Pe_x = Re_x \cdot Pr$$

Para metais líquidos Pr é muito pequena (transf. de calor é muito maior que a transf. de quantidade de movimento).

Dentro da camada limite térmica, podemos admitir que a velocidade é cte: $U = U_\infty$

Equação geral \rightarrow serve para qualquer Pr

$$Nu_x = \frac{0,3387 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,0468/Pr)^{2/3}]^{1/4}}, Re_x \geq 100$$

$$\overline{Nu_x} = 2Nu_x$$

Escoamento turbulento

espessura da camada limite:

$$\frac{\delta}{x} = 0,37 Re_x^{-1/5}$$

espessura da camada limite térmica:

$$\delta = \delta_t$$

Em regime turbulento, o Pr não é decisivo para caracterizar o escoamento.

parâmetros locais:

$$C_{f,x} = 0,0592 Re_x^{-1/5} \leftarrow Re_{x,c} \leq Re_x \leq 10^8$$

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \leftarrow 0,6 \leq Pr \leq 60$$

parâmetros médios:

$$\overline{h}_L = \frac{1}{L} \left(\int_0^{\xi} h_{lam} dx + \int_{\xi}^L h_{turb} dx \right)$$

Para $Re_{x,c} = 5 \cdot 10^5$:

$$\overline{C}_{f,L} = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1742}{Re_L}$$

$$\overline{Nu}_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3}$$

Para $Re_{x,c} = 0$:

$$\overline{C}_{f,L} = 0,074 Re_L^{-1/5}$$

$$\overline{Nu}_L = 0,037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}$$

Placa plana com fluxo de calor constante (correlações)

Escoamento laminar:

$$Nu_x = 0,453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}, Pr \geq 0,6$$

Escoamento turbulento:

$$Nu_x = 0,308 Re_x^{4/5} Pr^{1/3}, 0,6 \leq Pr \leq 60$$

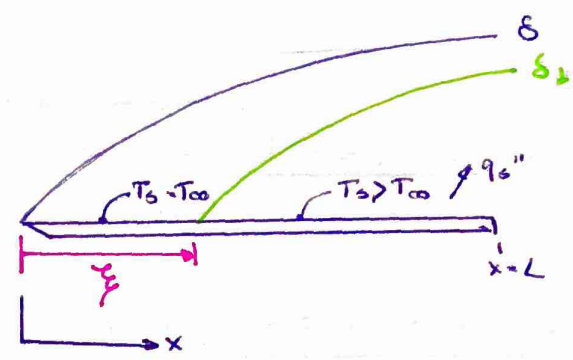
$T_D(x) = T_{\infty} + \frac{q''_s}{h_x}$ $\left. \begin{array}{l} \text{Se o fluxo térmico} \\ \text{for conhecido, podemos} \end{array} \right\}$

Usar o coeficiente convectivo calculado para encontrar o valor da temperatura superficial local.

$$\overline{Nu}_L = 0,680 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

Comprimento inicial não aquecido.

Existência de um comprimento inicial não aquecido ($T_s = T_{\infty}$) e restante da seção aquecida ($T_s \neq T_{\infty}$).



Serve tanto para o caso em que a placa plana é isotérmica quanto para o caso em que o fluxo de calor é etc.

Para $x \in [0, \xi]$:

Laminar: $Nu_{i,x} = \frac{Nu_{i,x}|_{\xi=0}}{[1 - (\xi/x)^{3/4}]^{1/3}}$

onde $Nu_{i,x}|_{\xi=0} = C Re_x^m Pr^{1/3}$

$C = 0,332$ (isotérmica) ou

$C = 0,453$ (fluxo constante)

$m = 1/2$

Turbulento:

$$Nu_{i,x} = \frac{Nu_{i,x}|_{\xi=0}}{[1 - (\xi/x)^{9/10}]^{1/9}}$$

$C = 0,0296$ (isotérmica) ou

$C = 0,0308$ (fluxo constante)

$m = 4/5$

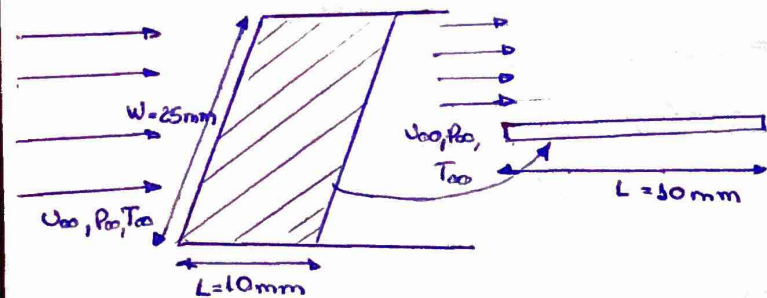
Exemplo: (anemômetro do filme quente)

Anemômetro serve para medir a velocidade do ar. A placa é aquecida por um aquecedor elétrico. Como a trans. de calor depende da velocidade do ar, é possível relacionar a velocidade com a potência dissipada.

Queremos determinar U_{∞} .

Dados: $P_{\text{dis}} = 1 \text{ atm}$; $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$, $q_e = 200 \text{ mW}$
Potência Elétrica

- A temperatura da placa é sempre mantida a 4K acima da temperatura da corrente livre.
- Há convecção nas duas faces da placa
- Sem dissipação por radiação



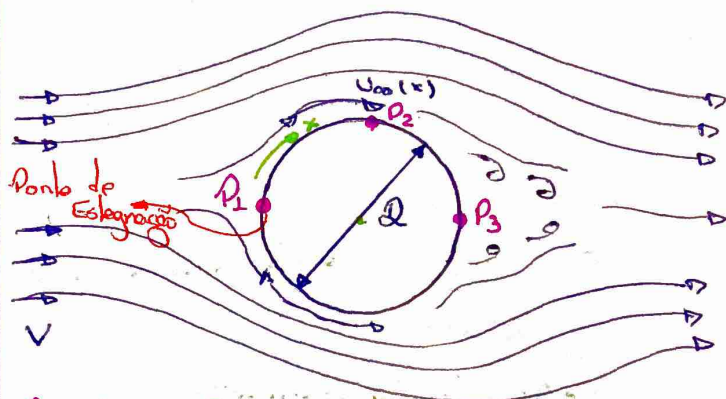
i	U(m/s)	Re_x	Nu_x	h (W/m²K)	q (W)
1	10	6293	46,9	123	0,246
2	15	9440	57,5	151	0,302
3	5	3146	33,2	87,3	0,175
4	6	3776	36,3	95,6	0,191
5	6,6	4154	38,2	100	0,200

$U_{\infty} = 6,6 \text{ m/s}$

o erro é de 4,6%, portanto, é aceitável! Até 20% é aceitável!

Obs: todas estas correlações são ajustadas de curva e podem conter erro até 20%!

→ Cilindro em escoamento encurvado



$P_1 > P_2$ → Pressão é favorável ao escoamento
 $P_2 > P_3$ → Pressão é desfavorável ao escoamento (há o descolamento da camada-limite).

Note que agora $U_{\infty} \neq V$ e U_{∞} depende de x (devido ao ponto de estagnação)

→ A partir do ponto de estagnação ($U_{\infty} = 0$), o fluido acelera devido ao gradiente favorável de pressão. ($dp/dx > 0$)

→ O fluido desacelera no gradiente de pressão desfavorável ($dp/dx < 0$)

↳ Em $\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$ temos o ponto de

separação (fluido não tem momento o suficiente para vencer o gradiente de pressão). No ponto há a separação da camada limite, formando-se uma região irregular.

Solução: $T_{\text{filme}} = T_f = \frac{25 + 29}{2} = 27^{\circ}\text{C} (300\text{K})$

Da tabela A4: $\nu = 15,89 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (Alongo o eixo da tabela!!!)
 $\rho = 1,1614$, $k = 26,3 \cdot 10^{-3}$, $C_p = 1,007$

Consideramos: $U_{\infty} = 10 \text{ m/s}$ (valor arbitrário!)

$$Re_L = \frac{U_{\infty} \cdot L}{\nu} = \frac{10 \cdot 0,01}{15,89 \cdot 10^{-6}} = 6293$$

$Re_L < Re_{x,c} = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow$ Regime Laminar

$q = 2 h L W (T_s - T_{\infty})$ ← calor dissipado

Nusselt: $Nu_x = 0,664 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$, $Pr \geq 0,6$

Utilizaremos o valor médio

pois, o enunciado só dá o valor da dissipação na placa toda.

Da tabela A4: $Pr = 0,707$.

$$\therefore Nu_x = 0,664 \cdot 6293^{1/2} \cdot 0,707^{1/3} = 46,9$$

$$\Rightarrow \bar{h}_x = \frac{Nu_x \cdot k}{L} = \frac{46,9 \cdot 0,0263}{0,01} = 123 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

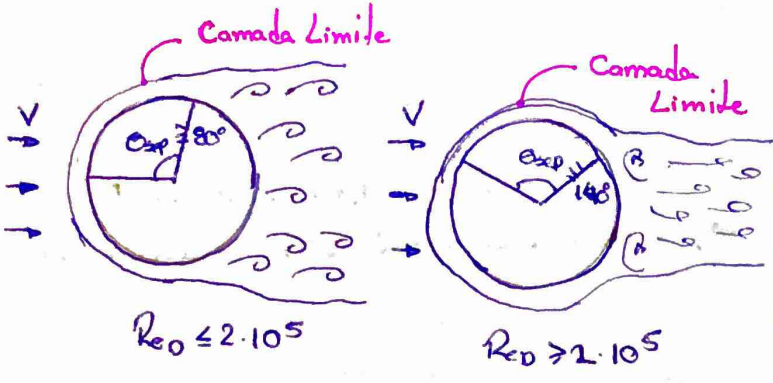
$$\text{Logo, } q = 2 \cdot 123 \cdot 0,01 \cdot 0,025 \cdot 4 = 0,246 \text{ W}$$

≠
0,2 do enunciado

Logo, devemos usar um processo iterativo.

Para o cilindro circular, o comprimento característico é o diâmetro:

$$Re_D = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$



Não há transição, há logo a separação

Há transição do laminar para o turbulento e depois a separação.

Coefficiente de arrasto:

$$C_D = \frac{F_D}{A_f (\rho V^2 / 2)}$$

Força de arrasto
Área frontal do cilindro (área projetada no plano perpendicular à velocidade a montante)

F_D contribuiço devido a tensão de cisalhamento
F_D contribuiço devido ao gradiente de pressão

Correlações:

Hilpert: $Nu_D = \frac{hD}{k} = C Re_D^m Pr^{1/3}, Pr \geq 0,7$ **tabelados!**

Propriedades avaliadas na temperatura de filme.

Churchill e Bernstein

$$Nu_D = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{[1 + (0,4/Pr)^{1/4}]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000} \right)^{4/5} \right]^{1/4}$$

$$Re_D \cdot Pr \geq 0,2$$

Zukauskas **tabelados!**

$$Nu_D = C Re_D^m Pr^n \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{1/4}$$

com $0,7 \leq Pr \leq 500$ e $1 \leq Re_D \leq 10^6$

Propriedades avaliadas em T_{oo}, exceto Pr_s que é avaliada em T_s

se $Pr \leq 10$ então $n = 0,37$

se $Pr \geq 10$ então $n = 0,36$

Esfera em escoamento cruzado

$$C_D = \frac{24}{Re_D}, Re_D \leq 0,5$$

Lei de Stokes

Correlação de Whitaker

$$Nu_D = 2 + (0,4 Re_D^{1/2} + 0,06 Re_D^{2/3}) Pr^{0,4} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{1/4}$$

$0,71 \leq Pr \leq 380$

$3,5 \leq Re_D \leq 7,6 \cdot 10^4$

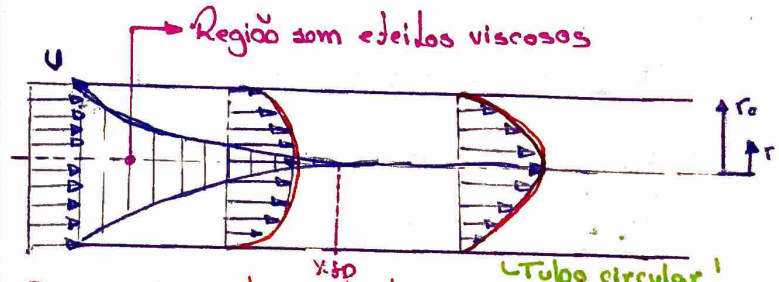
$1,0 \leq \mu/\mu_s \leq 3,2$

Todas as propriedades avaliadas em T_{oo}, exceto μ_s que é avaliada na temperatura da superfície.

XI) Escoamento Interno

Em escoamentos externos era suficiente verificar se o escoamento é laminar ou turbulento.

Em escoamentos internos é necessário também verificar se o escoamento é plenamente desenvolvido.



Com o desenvolvimento do escoamento em x, a região sem eixos viscosos diminui, até que as duas camadas limites se fundem. Quando esta fusão ocorre, os eixos viscosos se propagam por toda a seção transversal e o perfil de velocidade não mais se altera com aumento de x. Dessa forma,

Supomos que o escoamento está plenamente desenvolvido.

O comprimento de entrada (tanto x onde o escoamento seja plenamente desenvolvido) é:

• Laminar: $\frac{x_{fd}}{D} \approx 0,05 Re_D$

• Turbulento: $10 \leq \frac{x_{fd}}{D} \leq 60$

Note que o número de Reynolds para um tubo circular é calculado por: $Re_D = \frac{\rho U_m D}{\mu} = \frac{U_m D}{\nu}$

Diametro
veloc. média do tubo

Como a veloc. varia ao longo da ST_e na ST , não há corrente livre bem definida, devemos trabalhar com a velocidade média U_m . Esta velocidade é definida de forma que quando a multiplicamos pela área da seção transversal e pela massa específica, obtemos a vazão mássica:

$$\dot{m} = \rho U_m A_{ST}$$

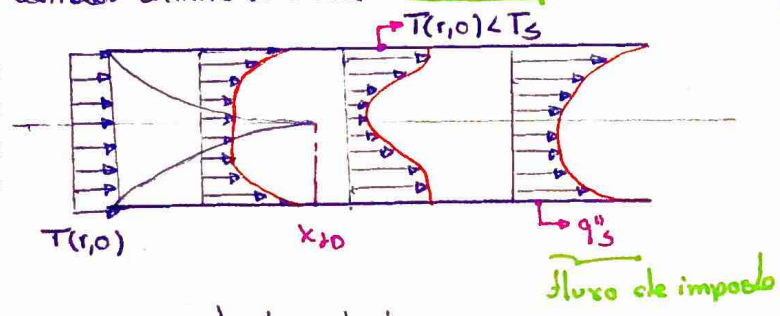
A vazão mássica pode ser representada pela integral do fluxo:

$$\dot{m} = \int_{A_{ST}} \rho U(x,r) dA_{ST} \rightarrow U_m = \frac{\int_{A_{ST}} \rho U(x,r) dA_{ST}}{\rho A_{ST}}$$

Se o escoamento é incompressível e o tubo é circular:

$$U_m = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} U(r,x) r dr$$

Todas estas considerações podem ser aplicadas a camada limite térmica: T_s é imposta



O comprimento de entrada é:

• Laminar: $\frac{x_{fd}}{D} = 0,05 Re_D Pr$

• Turbulento: $10 < \frac{x_{fd}}{D} < 60$

Agora, tratando-se de um escoamento dentro de um tubo, temos:

$$q = \dot{m} C_p (T_{sai} - T_{entra})$$

Energia térmica para um líquido ou entalpia para um gás ideal que é carregada para dentro do volume de controle!

$$\dot{m} C_p T_m = \int_{A_{ST}} \rho U C_p T dA_{ST} \rightarrow T_m = \frac{\int_{A_{ST}} \rho U C_p T dA_{ST}}{\dot{m} C_p}$$

Taxa pela qual energia térmica é carregada pelo fluido. Para um fluido incompressível com C_p constante em um tubo circular, temos:

$$T_m = \frac{2}{U_m r_0^2} \int_0^{r_0} U T r dr$$

→ Semelhante ao T_o para escoamentos externos. Mas T_m varia quando há transf. de calor

Obs: $Re_D \approx 2300$ (Reynolds Crítico: começa a haver turbulência)

$Re_D \leq 2300 \rightarrow$ Laminar

$Re_D \approx 10^4 \rightarrow$ Turbulento

→ Revisão de Mecânica dos Fluidos

• Fator de atrito: $f \equiv - \frac{(dp/dx) D}{\rho U_m^2 / 2}$

↳ Escoamento laminar em tubo de seção circular: $f = \frac{64}{Re_D}$ $3000 \leq Re_D \leq 5 \cdot 10^6$

↳ Escoamento turbulento em tubo liso: $f = (0,790 \ln Re_D - 1,64)^{-2}$

↳ Equação de Colebrook (turbulento):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \cdot \log \left[\frac{e/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re_D \sqrt{f}} \right]$$

• Perda de Carga:

$$\Delta p = P_1 - P_2 = f \frac{\rho U_m^2}{2D} \Delta x$$

• Potência Consumida:

$$P = \Delta p \dot{V} = \frac{\Delta p \dot{m}}{\rho}$$

→ Condições Plenamente Desenvolvidas

Note que o perfil de temperatura $T(r)$ está continuamente mudando com x , deixando parecer que uma convecção plenamente desenvolvida nunca poderá ser atingida. Então, vamos trabalhar com uma forma adimensional da temperatura. Definindo $\frac{T_s - T}{T_s - T_m}$ observa-se que há convecções nas quais essa razão se torna independente de x .

↳ Embora $T(r)$ continue variando com x , a forma relativa desse perfil permanece inalterada
 ↳ Escoamento Termicamente Plenaente Desenvolvido

A principal condição a ser satisfeita é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T_s(x) - T(r,x)}{T_s(x) - T_m(x)} \right] = 0 \rightarrow \text{Tiramos a dependência de } x!$$

é atingida para fluxo térmico q_s'' uniforme na superfície ou uma temperatura T_s uniforme.

Como $\frac{T_s(x) - T(r,x)}{T_s(x) - T_m(x)}$ independe de x a derivada dessa razão razão em relação a r também deve ser independente de x .

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_s - T}{T_s - T_m} \right) \right|_{r=r_0} = \frac{-\partial T / \partial r |_{r=r_0}}{T_s - T_m}$$

↳ na superfície do tubo

Da Lei de Fourier: $q_s'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$

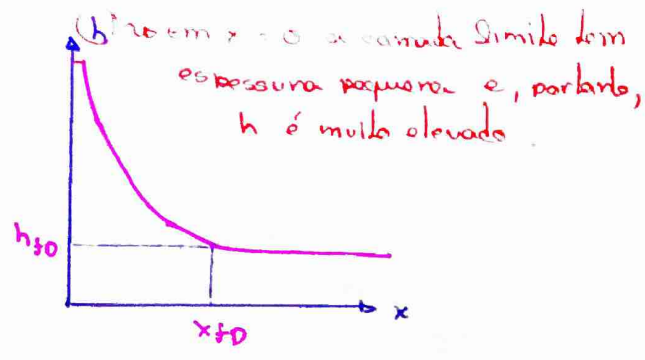
↳ $h(T_s - T_m) = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$

↳ $\frac{h}{k} (T_s - T_m) = -\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$

Logo, $\frac{h}{k} \neq f(x)$ não é uma função de x

No escoamento termicamente plenaente desenvolvido de um fluido com propriedades constantes, o coeficiente de transferência de calor por convecção local é uma cte independente de x .

Não vale para a região de entrada!
 (na entrada varia com x).

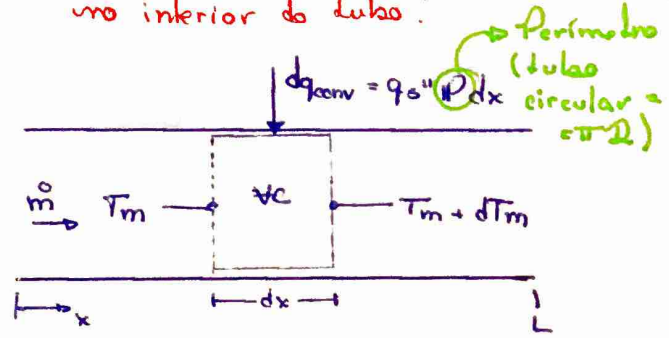


↳ Balanço de Energia

Desprezamos as dissipações viscosas, consideramos fluido incompressível com variação de pressão desprezível e desprezamos a condução na direção axial. Então temos:

$$q_{conv} = \dot{m} c_p (T_{m,saí} - T_{m,entra})$$

A convecção está ocorrendo no interior do tubo!



$$dq_{conv} = \dot{m} c_p (T_m + dT_m - T_m) \rightarrow dq_{conv} = \dot{m} c_p \cdot dT_m \rightarrow q_s'' \cdot P dx = \dot{m} c_p dT_m$$

$$\rightarrow \frac{dT_m}{dx} = \frac{q_s'' \cdot P}{\dot{m} c_p} = \frac{P}{\dot{m} c_p} h (T_s - T_m)$$

- $T_s > T_m \rightarrow$ calor é transferido da superfície para o fluido
- $T_s < T_m \rightarrow$ calor é transferido do fluido para a superfície

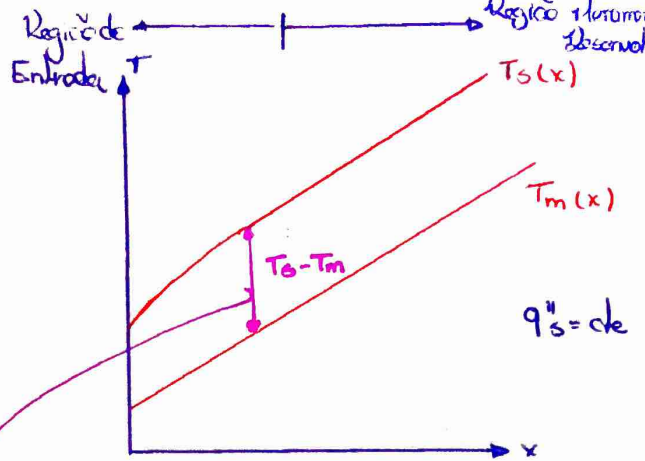
A solução das equações depende da condição térmica da superfície.

• Fluxo Térmico Constante na superfície:

$$q_s'' \neq f(x) \cdot q_{conv} = q_s'' \cdot P \cdot L$$

$$\therefore \frac{dT_m}{dx} = \frac{q_s'' \cdot P}{\dot{m} c_p} \neq f(x) \rightarrow T_m = T_{m,entra} + \frac{q_s'' \cdot P}{\dot{m} c_p} x$$

↳ Temperatura Média varia linearmente com x



Como $(T_s - T_m) \cdot h = q''_s$ e h é cte na região plenamente desenvolvida então a distância das duas curvas é cte. e igual a $T_s - T_m$.

• Temperatura superficial constante

Definindo $\Delta T = T_s - T_m$:

$$\frac{dT_m}{dx} = -\frac{d\Delta T}{dx} = \frac{\rho}{\dot{m} c_p} h \Delta T \rightarrow$$

$$\int_{\Delta T_{ent}}^{\Delta T_{sai}} \frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{\rho}{\dot{m} c_p} \int_0^L h dx \rightarrow$$

$$\ln \frac{\Delta T_{sai}}{\Delta T_{ent}} = -\frac{\rho L}{\dot{m} c_p} \cdot \frac{1}{L} \int_0^L h dx \rightarrow$$

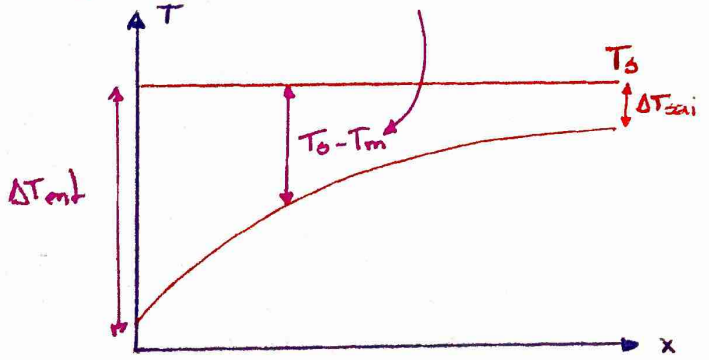
$\rightarrow \ln \frac{\Delta T_{sai}}{\Delta T_{ent}} = -\frac{\rho L}{\dot{m} c_p} \cdot \bar{h}$ Valor médio de h no tubo

$$\rightarrow \frac{T_s - T_{m,sai}}{T_s - T_{m,entra}} = \exp\left(-\frac{\rho L}{\dot{m} c_p} \cdot \bar{h}\right)$$

Para um x qualquer:

$$\frac{T_s - T_m(x)}{T_s - T_{m,ent}} = \exp\left(-\frac{\rho x}{\dot{m} c_p} \bar{h}_x\right) \text{ se } T_s = cte.$$

Diferença de temperatura decai exponencialmente com o aumento de x .



A transferência de calor total é dada por:

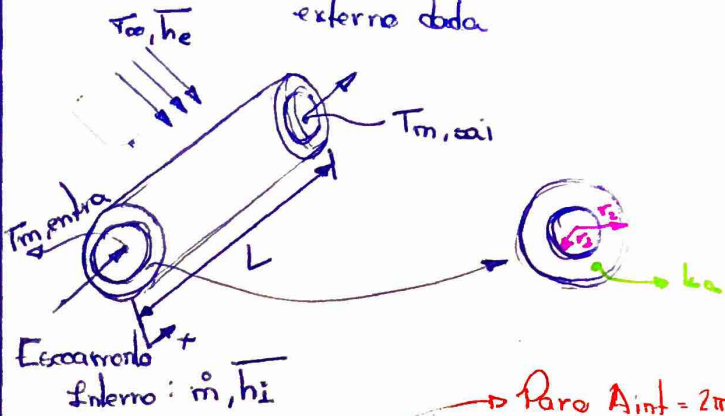
$$q_{conv} = \bar{h}_L A_s \Delta T_{mL} \text{ se } T_s = cte$$

↳ Área da Superfície: $P \cdot L$

↳ Média logarítmica da diferença das temperaturas.

$$\Delta T_{mL} = \frac{\Delta T_{sai} - \Delta T_{ent}}{\ln(\Delta T_{sai} / \Delta T_{ent})}$$

• Caso especial: temperatura de um fluido externo cte



$$U_{int} = \frac{1}{\frac{1}{h_{int}} + \frac{r_1}{k_a} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{h_e}}$$

↳ Poderia ser usado o raio externo $A_{ext} = 2\pi r_2 L$ e U_{ext}

Coeficiente Global de Transferência de Calor Média

Utilizaremos T_{∞} e não mais T_s :

$$\frac{\Delta T_{sai}}{\Delta T_{entra}} = \frac{T_{\infty} - T_{m,sai}}{T_{\infty} - T_{m,entra}} = \exp\left(-\frac{U A_{int}}{\dot{m} c_p}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\dot{m} c_p P R_{tot}}\right)$$

→ Correlações na região desenvolvida & escoamento plenamente desenvolvido

- Escoamento laminar em tubo circular:
 - Fluxo de calor uniforme: $Nu_D \equiv \frac{h D}{k} = 4,36$
 - Temperatura superficial uniforme: $Nu_D = \frac{h D}{k} = 3,66$
 - ↳ Independente de Reynolds e Prandl.

• Escoamento turbulento em tubo circular:

→ Tubos lisos e condutivos plenamente turbulentos $Re_D > 10000$ (Correlação de Dittus - Boelter)

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n \begin{cases} n = 0,3 & (T_s < T_m) \\ n = 0,4 & (T_s > T_m) \end{cases}$$

$$0,6 \lesssim Pr \lesssim 16 ; Re_D \gtrsim 10000 ; \frac{L}{D} \gtrsim 10$$

→ Correlação de Gnielinski

$$Nu_D = \frac{(f/8)(Re_D - 1000)Pr}{1 + 12,7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3})}$$

$$0,1 \lesssim Pr \lesssim 2000 ; 2000 \lesssim Re_D \lesssim 5 \cdot 10^6$$

Essas correlações só servem para escoamentos plenamente desenvolvidos!