Transferência de Calor

1) Introdução : Paulo Akira 2018.1

Calor : é a energia transferida devido a uma diferença de temperatura. → trabalho é todo o resto!

↳ Nunca esquecer de fazer o balanço de energia

Formas de Transferência de Calor : condução, convecção, radiação.

Regime permanente : $\frac{dE}{dt} = 0 \therefore \cancel{\frac{dE}{dt}}^{0} = \dot{Q} - \dot{W}$

Consideramos que nada varia no tempo para facilitar.

Mecanismos de transferência de calor : predomina

- Condução : transferência em sólidos ou fluidos estacionários devido ao movimento aleatório de átomos, moléculas e/ou elétrons. Parcela pequena
- Convecção : transferência devido ao ~~movimen~~ efeito combinado do movimento global e aleatório do fluido
- Radiação : energia emitida pela matéria devido a mudanças na configuração de seus elétrons e transportadas por ondas eletromagnéticas (ou fótons)

Obs : condução e convecção necessitam de meios materiais. Já a radiação não!

→ Condução :

↳ transferência de energia de partículas mais energéticas para as de menor energia! (2ª Lei)

(alta temperatura para baixa temperatura) ← Colisões

Lei de Fourier : taxa de transf. de calor

$$q = -k A \frac{\Delta T}{L}$$

espessura

$[q] = J/s = W$

k → condutividade térmica do material ($W/m\,K$)

A → área de transferência

$$q'' = -k \cdot \frac{\Delta T}{L}$$

fluxo de calor

$[q''] = \frac{J}{s \cdot m^2} = \frac{W}{m^2}$

Obs¹ : ar é ótimo isolante térmico!

Obs² : em qualquer processo de colisão, a transferência de energia só dá no sentido de baixar a temperatura das partículas quentes.

→ Convecção :

↳ combinação dos efeitos causados pelo movimento molecular e movimento global. (na verdade é efeito ~~das~~ combinado da condução na superfície e movimento de massa)

$$q = h A \cdot (T_s - T_\infty)$$

T_s → Temperatura da superfície

T_∞ → Temperatura "longe"

h ↳ coeficiente de TC por convecção ($\frac{W}{m^2K}$)

Não é propriedade do material, está relacionado com o escoamento.

$q'' = h \cdot (T_s - T_\infty)$ movimento do fluido é gerado por fonte externa

Tipos de convecção : forçada (meio externo), (bomba, etc) natural (empuxo) e mista

ocorre simplesmente devido a diferença de densidade ocasionada pela diferença de temperatura...

→ Radiação : → eficiente no vácuo!

↳ toda matéria a uma temperatura não nula emite energia por radiação.

↳ energia emitida é transmitida por ondas eletromagnéticas ou fótons.

↳ ocorre devido a uma mudança na configuração eletrônica dos átomos ou moléculas.

Lei de Stefan - Boltzmann (corpo negro) :

$$q = \sigma A \cdot T_s^4 \quad \text{ou} \quad q'' = \sigma T_s^4$$

σ ↳ cte de Boltzmann ($5{,}670 \cdot 10^{-8}\ W/m^2K^4$)

Fluxo Líquido de Radiação para uma superfície :

$$q''_{rad} = \varepsilon \sigma \overbrace{(T_s^4 - T_{viz}^4)}^{\text{Kelvin!}}$$

ε ↳ emissividade da superfície ($0 \leq \varepsilon \leq 1$)

Obs: a emissividade está relacionada com o fato do corpo real não emitir tanta energia quanto o corpo negro por radiação.

II) Equação da Condução

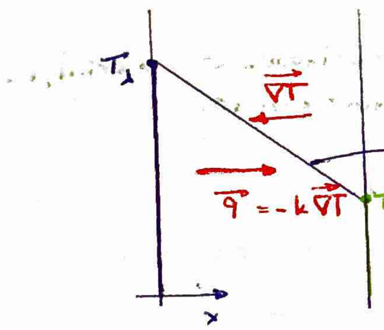
→ Lei de Fourier: → Descobrir o fluxo de calor (necessário saber a distribuição de temperaturas)

Equação que permite o cálculo do fluxo de calor por condução a partir do conhecimento da distribuição de temperatura no meio.

Calor vai da superfície de maior para menor temp.

$$\boxed{\vec{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)}$$

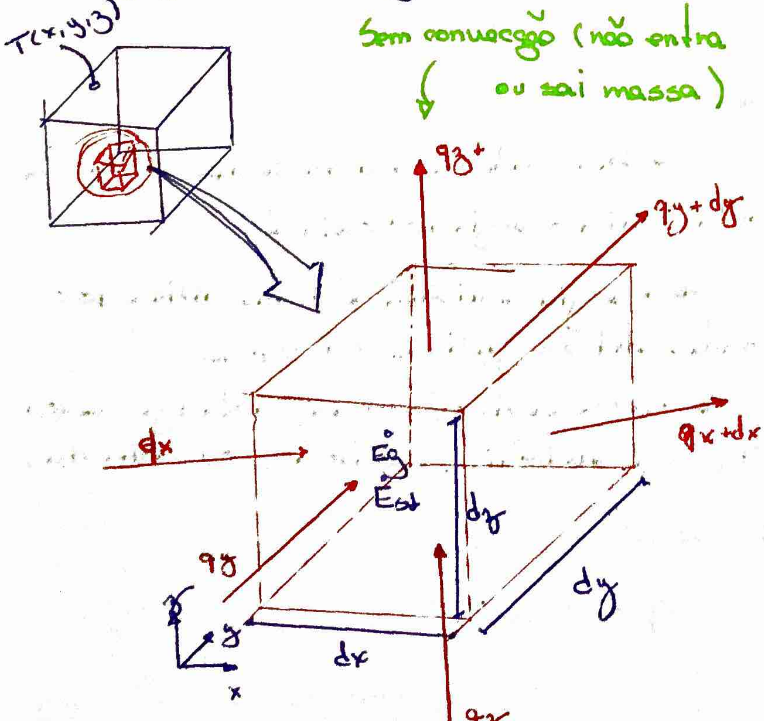
sinal para correção do sentido do fluxo de calor (contrário ao gradiente)



distribuição de temperaturas $T(x)$

→ Equação geral da condução (coordenadas cartesianas) → Descobrir a distribuição de temperatura

Sem convecção (não entra ou sai massa)



Lei de Fourier:

$$\vec{q}'' = -\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + k\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + k\frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$\dot{E}_g \equiv$ energia gerada em taxa $(J/s = W)$

reações químicas, reações nucleares, ondas eletromagnéticas (radiação)

Balanço energético: saldo nas faces

$$q_x - q_{x+dx} + q_y - q_{y+dy} + q_z - q_{z+dz} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} \quad (1)$$

onde
$$\begin{cases} \dot{E}_g = \dot{q}\,dx\,dy\,dz \quad (\hookrightarrow J/s\,m^3) \\ \dot{E}_{st} = \rho c_p \cdot \dfrac{\partial T}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \end{cases}$$

Expansão de Taylor (desprezar os termos de ordem superior):

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\cdot dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}\cdot dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}\cdot dz$$

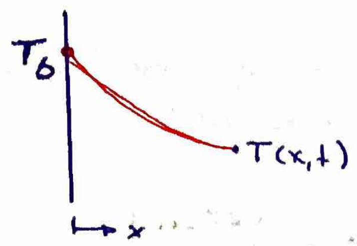
Substituindo em (1) e aplicando a Lei de Fourier para cada q (q'') e dividindo por volume — isotrópico

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}}$$

↳ Equação geral da condução

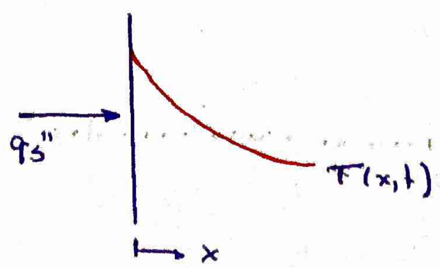
Condição de Contorno:

• Temperatura superficial constante



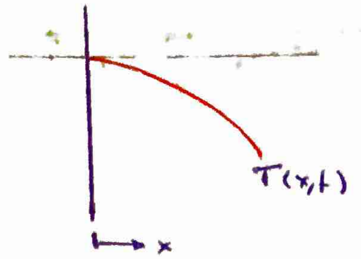
$$T(0,t) = T_s$$

• Fluxo de calor cte:



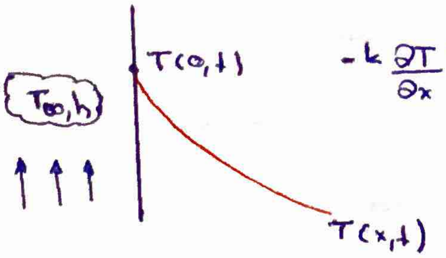
$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_s''$$

• Superfície adiabática:



$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

• Convecção na superfície:



$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h\,[T_\infty - T(0,t)]$$

Obs: equação geral da condução:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)} + \dot{q} = \rho c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

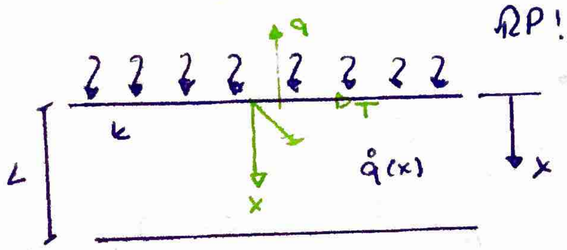
saldo

Taxa líquida de transferência de energia por condução para o interior de um volume de controle unitário ~~~ nas faces

↳ taxa volumétrica de geração de energia térmica

↳ taxa de variação da energia térmica acumulada no interior do VC.

Exemplo (2.28, 6ª ed).



$$T(x) = -\frac{A}{ka^2}e^{-\alpha x} + Bx + C$$

a) Fluxo de calor nas faces:

Lei de Fourier: $q''_x = -k\left[\frac{dT}{dx}\right] = -k\left[\frac{-A}{ka^2}(-a)e^{-ax} + B\right]$

$x=0: q''_x(0) = -k\left[+\frac{A}{ka}\cdot 1 + B\right] = -\left[\frac{A}{a} + kB\right]$

$x=L \quad q''_x(L) = -k\left[+\frac{A}{ka}e^{-aL} + B\right] = -\left[\frac{A}{a}e^{-aL} + kB\right]$

b) Geração interna:

Eq. geral da condução:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \Rightarrow \dot{q} = -k\frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)$$

$$\dot{q}(x) = -k\frac{d}{dx}\left[\frac{+A}{ka}e^{-ax} + B\right] = Ae^{-ax}$$

c) Energia absorvida:

Nas faces

Balanço de Energia: $\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = 0$

$$\dot{E}''_g = -\dot{E}''_{in} + \dot{E}''_{out} = -q''_x(0) + q''_x(L) = \frac{A}{a}(1 - e^{-aL})$$

Por integração: $\dot{q}$ é volumétrico então para ter o efeito da radiação, devo integrar!

$$\dot{E}''_g = \int_0^L \dot{q}(x)\,dx = \int_0^L Ae^{-ax}\,dx = -\frac{A}{a}\left[e^{-ax}\right]_0^L =$$

$$= \frac{A}{a}(1 - e^{-aL})$$

em área

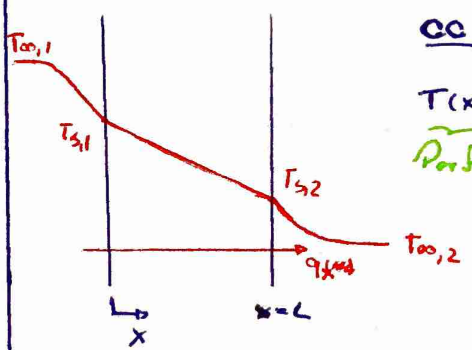
III) Condução de Calor Unidimensional em RP sem $\dot{q}$

A direção mais significativa é relacionada com o maior gradiente!

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)}}_{0\,(\text{uni})} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)}}_{0\,(\text{uni})} + \underbrace{\cancel{\dot{q}}}_{0\,(\text{s/ geração})} = \rho c_p \cdot \underbrace{\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}}_{(RP)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = 0} \xrightarrow{\text{integrar}} T(x) = ax + b$$

→ Parede Plana



CC: $T(0) = T_{s,1}$, $T(L) = T_{s,2}$

$$T(x) = T_{s,1} + (T_{s,2} - T_{s,1})\frac{x}{L}$$

Perfil de temp.

ΔT = parede plana

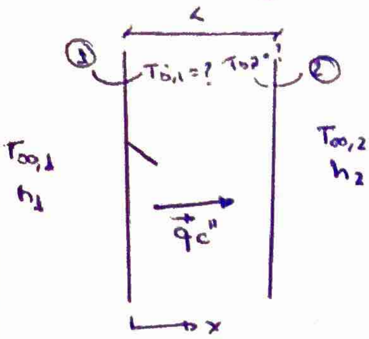
Aplicando a Lei de Fourier: $\underbrace{q''_x}_{i} = -k\frac{dT}{dx} = \underbrace{\frac{k}{L}}_{R}\underbrace{(T_{s,1} - T_{s,2})}_{ddP}$

só quando em RP e sem geração.

Analogia com circuito elétrico: $q''_x = \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{R}$,

onde $R = \frac{L}{k}$

Exemplo: convecção especificada (ex 3.1)



Solução:

$$T(x)=C_1x+C_2$$

CC:

$x=0$:

$$\underbrace{-k\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}=h_1(T_{\infty,1}-T_{S,1})}_{\text{fluxos na primeira parede devem ser iguais (vale sempre, pois, a parede não acumula massa)}}$$

fluxo!

$$-kC_1=h_1(T_{\infty,1}-T_{S,1}) \quad (1)$$

$x=L$:

$$-k\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L}=h_2(T_{S,2}-T_{\infty,2})$$

$$-kC_1=h_2\left[(C_1L+C_2)-T_{\infty,2}\right] \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2):

$$C_1=\frac{(T_{\infty,1}-T_{\infty,2})}{\left(-\frac{k}{h_2}-L-\frac{k}{h_1}\right)}$$

$$C_2=T_{\infty,1}+\frac{k}{h_1}\left[\frac{T_{\infty,1}-T_{\infty,2}}{\left(-\frac{k}{h_2}-L-\frac{k}{h_1}\right)}\right]$$

$$\therefore T(x)=\frac{(T_{\infty,1}-T_{\infty,2})}{\left(-\frac{k}{h_2}-L-\frac{k}{h_1}\right)}x+T_{\infty,1}+\frac{k}{h_1}\left[\frac{(T_{\infty,1}-T_{\infty,2})}{\left(-\frac{k}{h_2}-L-\frac{k}{h_1}\right)}\right]$$

$$q_x''(x)=-k\frac{dT}{dx}=-k\cdot\frac{(T_{\infty,1}-T_{\infty,2})}{\left(-\frac{k}{h_2}-L-\frac{k}{h_1}\right)}=$$

$$=\frac{(T_{\infty,2}-T_{\infty,1})}{\left(-\frac{1}{h_2}-\frac{L}{k}-\frac{1}{h_1}\right)}$$

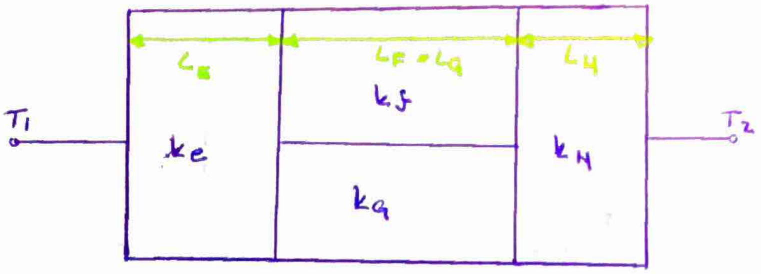
"resistência a convecção"

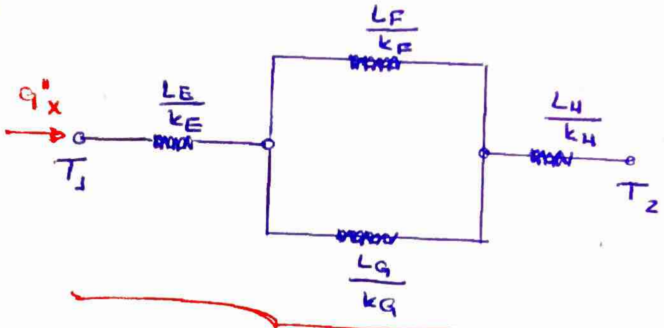
"resistência a condução"

$$R_{tot}=\frac{1}{h_2}+\frac{L}{k}+\frac{1}{h_1} \quad \therefore q_x''=\frac{T_{\infty,1}-T_{\infty,2}}{R_{tot}}$$

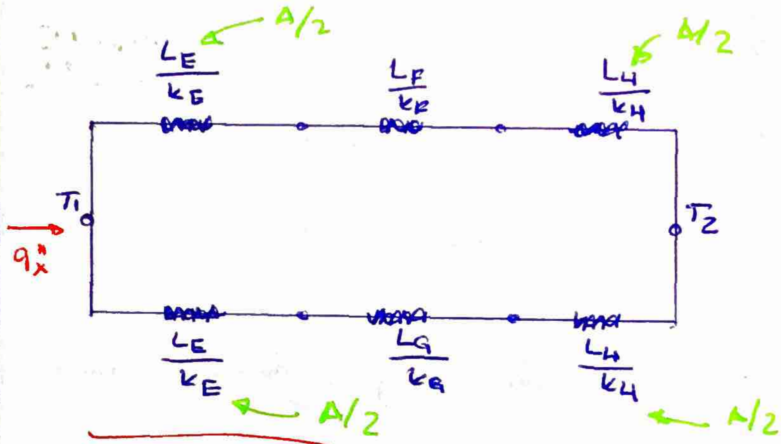
Paredes Compostas:

→ Problema bidimensional que pode ser aproximado por um problema unidimensional!



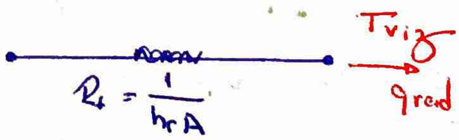


Superfície Verticais Isotérmicas!



Superfícies Horizontais Adiabáticas!

Obs: caso haja radiação:

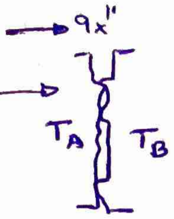


$$R_t=\frac{1}{h_rA}, \text{ onde } h_r=\varepsilon\sigma(T_S+T_{viz})(T_S^2+T_{viz}^2)$$

Resistência de contato:

Pontos de contato se entremeiam com interstícios que são preenchidos com um fluido. A transferência de calor é, portanto, devido a condução através do contato real e/ou a radiação/convecção nos interstícios. A resistência de contato pode ser vista como duas resistências em paralelo (devido aos pontos de contato e devido aos interstícios).

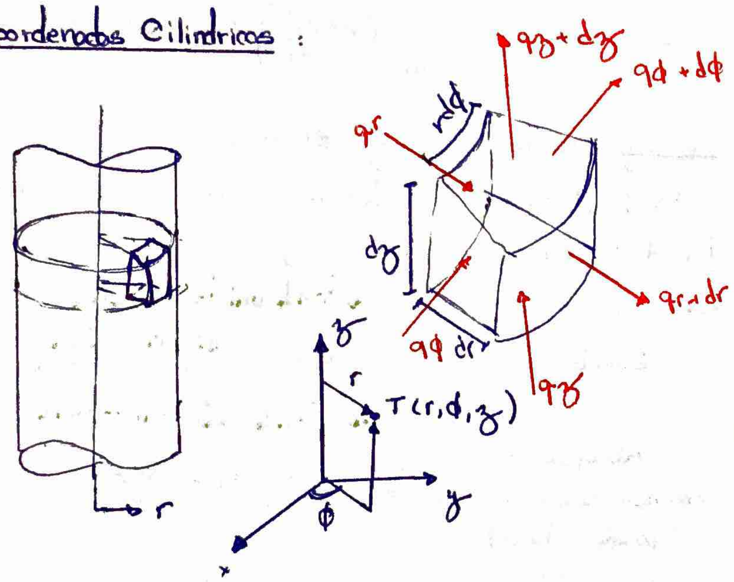
$$\underbrace{R''_{t,c}}_{\text{tabelado}} = \frac{T_A - T_B}{q''_x} \qquad [R''_{t,c}] = \frac{m^2K}{W}$$



→ sólidos cuja a condutividade é maior do que a do fluido intersticial, pode ter a resistência de contato reduzida com o aumento da área dos pontos em contato (acréscimo da pressão de contato ou redução da rugosidade).

→ a resistência de contato pode ser diminuída pela seleção de um fluido com elevada condutividade térmica.

Coordenadas Cilíndricas :



Lei de Fourier: $\vec{q}'' = -k\nabla T = -k\left(\frac{\partial T}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\right)$

Operador Divergente:

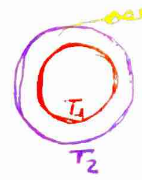
$$\nabla(k\nabla T) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Caso particular: → só condução na direção radial

- RP
- Sem geração interna
- Superfícies interna e externa são isotérmicas

$$\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0}_{\text{a saída de potência é zero!}}$$

Integrando uma vez: $r\frac{dT}{dr} = C_1$



Integrando novamente: $\boxed{T = C_1 \ln r + C_2}$

CC: $T(r_1) = T_1$ e $T(r_2) = T_2$

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)}, \quad C_2 = T_2 - \frac{(T_1 - T_2)\ln r_2}{\ln(r_1/r_2)}$$

$$\text{Logo: } \underbrace{T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1/r_2)}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_2}$$

Definida para $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$ ⇒ no centro temos ($r=0$) temos a solução trivial (no centro não podemos ter mudança de temperatura, pois, estamos em RP e não há geração).

Aplicando a Lei de Fourier: Nota que q'' depende de r. Logo, não faz sentido usar o R''

$$q''_r = -k\frac{dT}{dr} = \frac{k}{r\ln(r_2/r_1)}(T_1 - T_2)$$

$$q_r = 2\pi r L \cdot q''_r = \underbrace{\frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)}}_{\frac{1}{R}}(T_2 - T_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{q_r = \frac{T_2 - T_1}{R}}$$

Como a taxa não depende do raio então a analogia é válida.

No caso de convecção: $R_{convec} = \frac{1}{h2\pi r L}$

Raio Crítico : ← é do isolante!

$$R^{isolante}_{TOTAL} = \frac{\ln(r/r_i)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi r h}$$

e

$$q_r = \frac{T_{int} - T_\infty}{R^{isolante}_{TOTAL}}$$

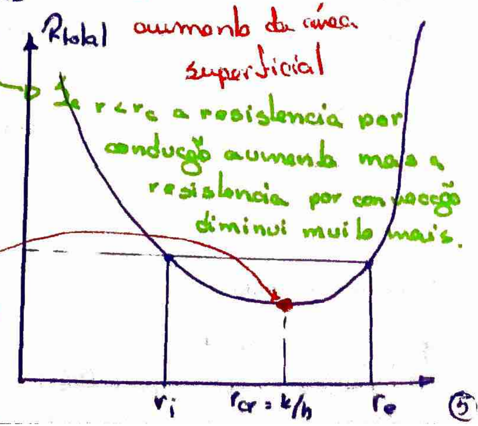
se $r < r_{crítico}$ → aumenta devido ao aumento da área superficial

$$\boxed{r_{crítico} = \frac{k}{h}}$$

Se $r < r_c$ a resistência por condução aumenta mas a resistência por convecção diminui muito mais.

Há um aumento da R_{TOTAL} quando $r > r_{cr}$ (transferência diminui)

No r_{cr}, a transferência é máxima!

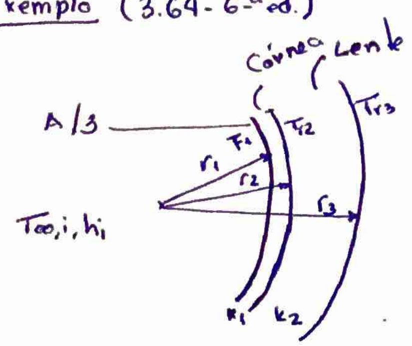


Em sistemas radiais não usar o fluxo (depende do raio), melhor usar a potência!

Exemplo (3.4 - 6.ª ed):

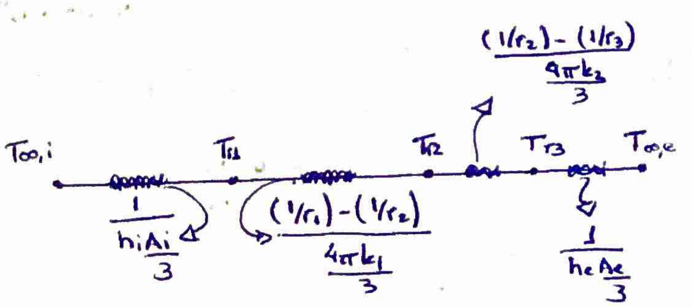
a) Como a radiação é absorvida pela interface e não pelos sólidos então não temos geração de energia (as equações diferenciais ficam $\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0$)

Exemplo (3.64 - 6.ª ed.)



$T_{\infty,e}, h_e$

a) Circuito com a lente



Resistências:

Conv. Interna: $\frac{1}{h_i \frac{A_i}{3}} = \frac{1}{12 \cdot \frac{4\pi(0{,}0102)^2}{3}} = 191{,}22\ (W/k)^{-1}$

Cond. Córnea: $\frac{(1/r_1)-(1/r_2)}{\frac{4\pi}{3}k_1} = \frac{(1/0{,}0102)-(1/0{,}0127)}{\frac{4\pi}{3}\cdot 0{,}35} = 13{,}16\ (W/k)^{-1}$

Cond. Lente: $\frac{(1/0{,}0127)-(1/0{,}0165)}{\frac{4\pi}{3}\cdot 0{,}8} = 5{,}41 (W/k)^{-1}$

Convec. Externa sem a lente: $\frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{\frac{6\cdot 4\pi\cdot 0{,}0127^2}{3}} = 246\ (W/k)^{-1}$

Convec. Externa com a lente: $\frac{1}{\frac{6\cdot(4\pi\cdot 0{,}0165^2)}{3}} = 146$

b) Com a lente:

$$q = \frac{37-21}{191{,}27 + 13{,}16 + 5{,}41 + 146} = 44{,}9\,mW$$

Sem a lente:

$$q = \frac{37-21}{191{,}22 + 13{,}16 + 246} = 35{,}4\,mW$$

c) $r_{cr} = \frac{2k}{h} = \frac{2\cdot 0{,}8}{6} = 0{,}266\,m$ ← para esferas!

Como $r_3 < r_{cr}$ então a resistência de condução aumenta mas a resistência de convecção aumenta ainda mais, aumentando a transferência de calor.

IV) Condução de Calor Uni. em RP com geração de energia

Coordenadas: unidimensional e RP.

Cartesiana: $k\frac{d^2T}{dx^2} + \dot{q} = 0$

Cilíndricas: $\frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \dot{q} = 0$

Esféricas: $\frac{k}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right) + \dot{q} = 0$

Geração interna de energia térmica:

→ Fonte de energia térmica: conversão a partir de outra forma de energia

Exemplo:

Efeito Joule: $\dot{q} = \frac{I^2 \cdot R_{el}}{V}$ → fonte uniformemente distribuída

Absorção de radiação em meio semi-transparente (parede plana): $\dot{q} \propto \exp(-\alpha x)$ → fonte não uniforme

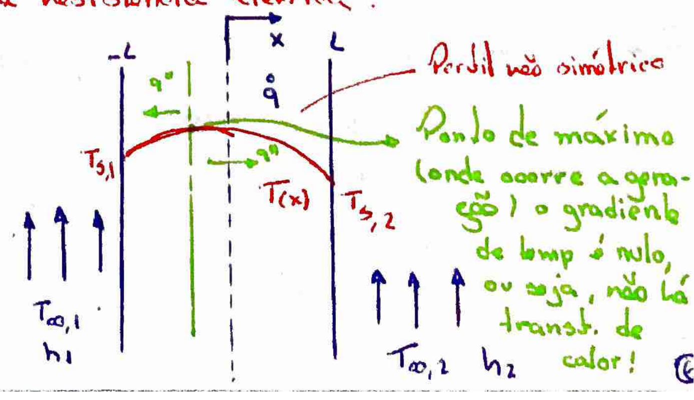
→ **Parede Plana com geração:**

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}}{k} \Rightarrow$$

($\dot{q}$ → uniforme!)

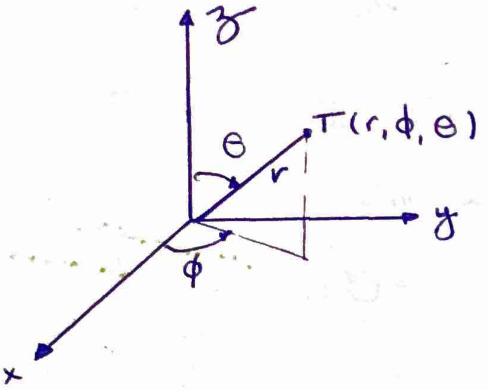
$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k}x + C_1 \Rightarrow T(x) = \underbrace{-\left(\frac{\dot{q}}{2k}\right)x^2 + C_1x + C_2}_{\text{parábola}}$$

Como q_x varia com x então não vale a analogia com a resistência elétrica!



"Para achar onde está acontecendo a geração basta fazer $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$"

Obs: coordenadas esféricas



Lei de Fourier: $\vec{q}'' = -\left(k\frac{\partial T}{\partial r}\vec{i} + k\frac{\partial T}{r\partial\theta}\vec{j} + k\frac{\partial T}{r\,\text{sen}\theta\,\partial\phi}\vec{k}\right)$

Equação Geral:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\cdot\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\,\text{sen}\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \dot{q} = \rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

0 0 0

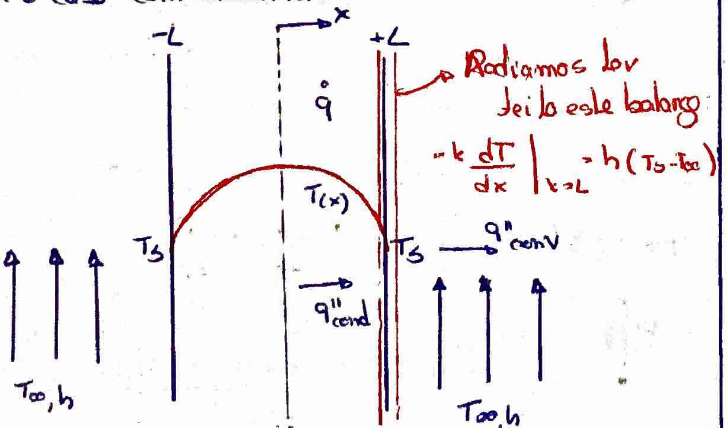
Se não houver geração interna:

$$R_{cond} = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$R_{conv} = \frac{1}{h4\pi r^3}$$

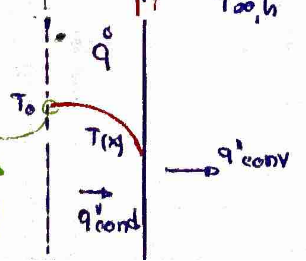
□

Para o caso com simetria:



Podíamos ter feito este balanço

$$-k\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = h(T_s - T_\infty)$$



Não há transf. de calor. Logo, não entra nada por esta sup.!

$$T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s^2$$

Balanço superficial: $-\dot{E}_{out} + \dot{E}_g = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -hA_s(T_s - T_\infty) + \dot{q}A_sL = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}L}{h}$

Exemplo (3.104, 7ed)

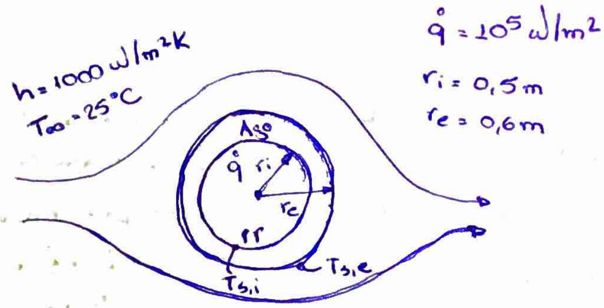
$k_{rr} = 20\ W/mK$

$k_{ago} = 15\ W/mK$

$\dot{q} = 10^5\ W/m^2$

$r_i = 0{,}5m$

$r_e = 0{,}6m$



Solução:

a) para a casca de aço:

$$q_r = \frac{T_{s,i} - T_{s,e}}{\frac{1}{4\pi k_{aço}}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right)} \quad (1)$$

para o fluido:

$$q_r = \frac{T_{s,e} - T_\infty}{\frac{1}{hA_e}} \quad (2)$$

Logo,

$$q_r = \frac{T_{s,i} - T_\infty}{\frac{1}{hA_e} + \frac{1}{4\pi k_{aço}}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}\right)} \quad (3)$$

Para o rejeito radioativo: 52359,88

$q_{r=r_i} = \dot{q}\forall \Rightarrow q_{r=r_i} = \dot{q}\frac{4}{3}\pi r^3 \quad (4)$

Como temos RP,

$(2) = (4) \Rightarrow h4\pi r_e^2(T_{s,e} - T_\infty) = \dot{q}\frac{4}{3}\pi r_i^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{s,e} = 36{,}57°C$

Assim,

$q_r = 52359{,}88 \Rightarrow 52359{,}88 = (3) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{s,i} = 128{,}7°C$

c) $\underbrace{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0}_{\text{Integrar}}$

$\underbrace{r^2\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3}\frac{\dot{q}}{k}r^3 + C_1}_{\text{Integrar}}$

$T(r) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{\dot{q}}{k}\cdot r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$

$$T(r) = -\frac{1}{6}\frac{\dot{q}}{k}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$$

se $C_1 \neq 0$ a temperatura tenderia ao infinito quando $r = 0$ (o que é impossível)

em $r = 0$, $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

→ devido a simetria do problema

em $r = r_i \Rightarrow T(r_i) = T_{s,i} = 128{,}7\,°C$ (temps na sup. da esfera são iguais!)

$$T(r_i) = 128{,}7 = -\frac{1}{6}\cdot\frac{100000}{20}\cdot 0{,}5^2 + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = 337{,}03$$

$$T(r=0) = 337{,}03\,°C$$

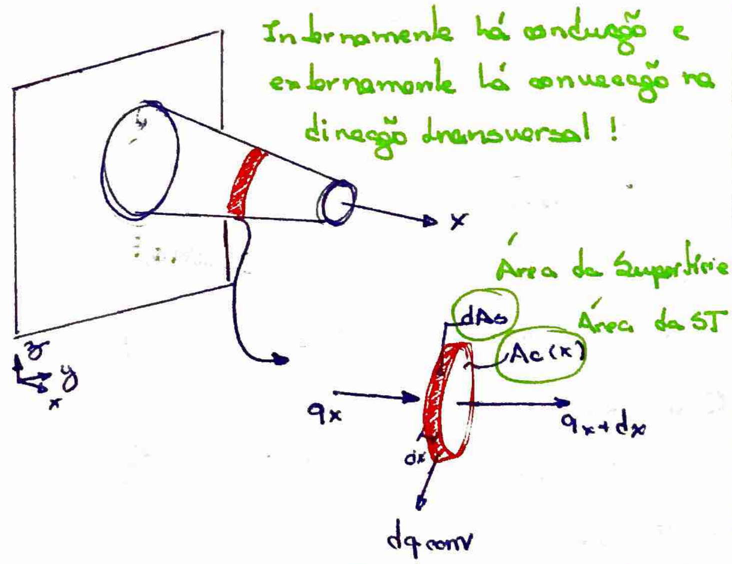
V) Superfícies estendidas

→ Objetivo: aumentar a taxa de transferência de calor por convecção e/ou radiação para a vizinhança

Hipóteses:

- Regime permanente
- Condução unidimensional
- Condutividade térmica constante
- Sem geração de calor
- Radiação desprezível em face da convecção

Internamente há condução e externamente há convecção na direção transversal!



Obteremos uma temperatura que descreve toda a seção embora consideremos só a direção x.

Perímetro (aprox. área)

Balanço energético: $q_x - q_{x+dx} - dq_{conv} = 0$

Da Série de Taylor: $\cancel{q_x} - \cancel{q_x} + \frac{dq_x}{dx}\cdot dx - hP(T - T_\infty)\cdot dx = 0$

Aplicando a Lei de Fourier: Multiplicação (derivada)

$$-\frac{d}{dx}\left(-kA_c\frac{dT}{dx}\right)dx - hP(T - T_\infty)dx = 0$$

→ Área

$$k\frac{dA_c}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right) + kA_c\frac{d^2T}{dx^2} - hP(T - T_\infty) = 0$$

Se considerarmos $A_c = cte$:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h}{kA_c}\cdot\frac{dA_s}{dx}(T - T_\infty) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c}(T - T_\infty) = 0$$

Define-se: $m^2 = \frac{hP}{kA_c}$

temperatura da aleta!

$$\theta = T - T_\infty \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad \text{homogênea}$$

excesso de temperatura

Solução: Pol. carct: $\lambda^2 - m^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm m$

Base $= \{e^{mx}; e^{-mx}\}$

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad \text{ou}$$

$$\theta = C_3 \operatorname{senh}(mx) + C_4 \cosh(mx)$$

→ Já consideramos a convecção na sup. Logo, temos que utilizar uma cc adequada.

Na base: $\theta(0) = T_b - T_\infty = \theta_b$ → normalmente é conhecida!

Podemos calcular o calor transferido pela aleta de dois modos: → vale sempre!

Convecção: $q_a = \int_{A_{sup}} h\,\theta(x)\,dA_s$

Condução: $q_a = -kA_c\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$

Caso A: convecção na ponta $\rightarrow -k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = h\theta(L)$

Lembrando que na base $\theta(0) = \theta_b$, então

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + h/km\cdot \operatorname{senh} m(L-x)}{\cosh(mL) + h/km\ \operatorname{senh}(mL)}$$

→ me mostra como a temperatura mudou em relação a temperatura da base

Cálculo do calor total transferido na aleta:

$$q_a = -kA_c\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{q_a = M\,\frac{\operatorname{senh}(mL) + h/km\cdot\cosh(mL)}{\cosh(mL) + h/km\ \operatorname{senh}(mL)}}, \text{ onde } M = kA_c\theta_b m$$

Caso B: adiabática $\rightarrow -k\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}}$$

$$\boxed{q_a = M \cdot tgh(mL)} \text{ , onde } M = A_c k\, m\, \theta_b$$

Caso C : temperatura dada na ponta $\rightarrow \theta(L) = \theta_L$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\theta_L/\theta_b \cdot senh(mx) + senh[m(L-x)]}{senh(mL)}}$$

$$\boxed{q_a = \frac{M[cosh(mL) - \theta_L/\theta_b]}{senh(mL)}}$$

Caso D : aleta infinita ($mL > 2{,}65$) $\rightarrow \theta(L) = 0$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}} \qquad \boxed{q_a = M}$$

→ Desempenho das aletas

A aleta representa uma resistência condutiva à transferência de calor na superfície original. Por isso, não há garantias que a taxa de transferência de calor seja aumentada com o uso de aletas.

Efetividade = $\dfrac{\text{calor transferido pela aleta}}{\text{calor transferido sem aleta}}$

Uso da aleta só é justificável se $\varepsilon \geq 2$.

$$\varepsilon = \frac{q_a}{hA_c\theta_b} \longrightarrow \varepsilon = \frac{\overbrace{\boxed{\theta_b\sqrt{hPkA_c}}}^{M}}{hA_c\theta_b} = \sqrt{\frac{Pk}{hA_c}}$$

Eficiência = $\dfrac{\text{calor transferido pela aleta}}{\text{máximo calor que pode ser transf. se a aleta estivesse na temp. da base}}$

$$\eta_a = \frac{q_a}{hA_s\theta_b} \longrightarrow \eta_a = \frac{M\, tgh(mL)}{hA_s\theta_b} \rightarrow \eta_a = \frac{\theta_b\sqrt{hPkA_c}\, tgh(mL)}{hPL\theta_b}$$

$$\rightarrow \eta_a = \frac{tgh(mL)}{mL}$$

Para não precisarmos trabalhar com o Caso A (convecção na ponta) podemos "corrigir" o comprimento da aleta para trabalharmos com o caso B (aleta com ponta adiabática) → aprox é válida pois compensamos a convecção com uma aleta mais longa!

$$\eta_a = \frac{tgh(mL_c)}{mL_c}$$

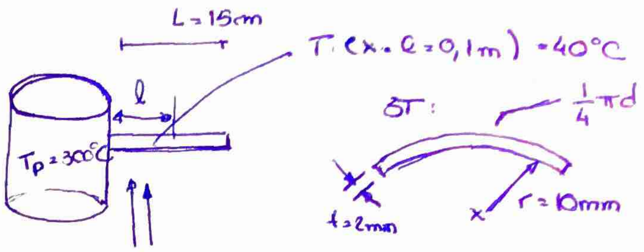
$$A_p = L_c \cdot t \;;\; L_c = L + \frac{t}{2} \;;\; L_c = L + \frac{D}{4}$$

↳ espessura

Validação:

$$\frac{ht}{k} \text{ ou } \frac{hD}{2k} \leq 0{,}0625$$

Exemplo :



$h = 10\ W/m^2\,°C$

$T_\infty = 29°C$

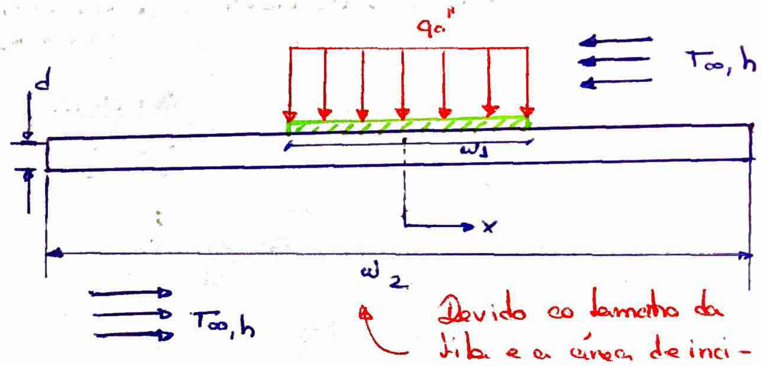
$\theta_b = 280°C$

Cabo	k	m	th/k	$T(x=L)$	$T(x=l)$
Vidro	0,8	118,68	0,025	20	20
Al	202	7,46	$9\cdot10^{-5}$	184	194
Cu	385	5,41	$5\cdot10^{-5}$	229	235
Aço	17	25,74	$11\cdot10^{-7}$	33	43

→ Utilizamos a aproximação adiabática para calcular as temperaturas

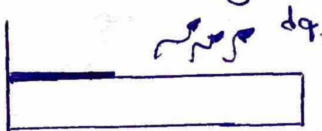
$$L_c = L + t/2 = 0{,}15 + 0{,}001$$

Exemplo : (ex 3,115 , 6ª ed)



Devido ao tamanho da fita e a área de incidência, não temos uma dissipação significativa!

Se tivesse radiação:



$$dq'_{rad} = 2dx\, \sigma\varepsilon(T_s^4 - T_{viz}^4)$$

linearização

$$dq'_{rad} = 2dx\, \varepsilon\sigma \underbrace{(T_s + T_{viz})(T_s^2 - T_{viz}^2)}_{h_r = cte}(T - T_{viz})$$

T_s = temperatura inicial da superfície.

VI) Análise em regime transitório

→ Método da Análise Concentrada

$\nabla T = 0$ } Pela Lei de Fourier teríamos uma condutividade infinita.

Não há gradiente de temperatura dentro da peça! (toda peça está à mesma temperatura).

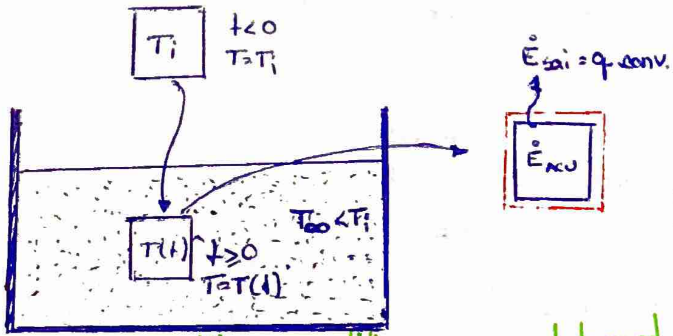
Como validaremos esta hipótese?

Número de Biot: $Bi = \frac{R_{int}}{R_{ext}}$

$Bi < 0,1$

Se $Bi \ll 1$, então R_{int} é muito pequeno. A temperatura da superfície logo se espalha por todo corpo. Isso satisfaz a hipótese de que $\nabla T \approx 0$.

A utilização da Análise concentrada é válida quando a resistência à condução da peça é pequena quando comparada à resistência à transferência de calor entre a peça e sua vizinhança.



Não vamos utilizar a eq. geral da cond. pois não temos distribuição espacial da temp.

Balanço de energia (1ª Lei da Termodinâmica)

$$\cancel{\dot{E}_{entra}} - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -hA_s(T-T_\infty) = \frac{dE}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -hA_s(T-T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{dt} \Rightarrow$$

$\theta = T - T_\infty$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} \rho V c = -hA_s\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{hA_s}{\rho V c}\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA_s}{\rho V c} dt$$

Integrando:

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA_s}{\rho V c}\int^{t} dt \Rightarrow \ln\frac{\theta}{\theta_i} = -\frac{hA_s}{\rho V c} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\theta}{\theta_i} = e^{-\frac{hA_s}{\rho V c}t}}$$

excesso de temperatura inicial do bloco

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T-T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{hA_s}{\rho V c}t} = e^{-\frac{t}{R_tC_t}}, \text{ onde}$$

$R_t = \frac{1}{hA_s}$ e $C_t = \rho V c$

Resistência a transf. de calor por convecção — Capacitância térmica global do sólido

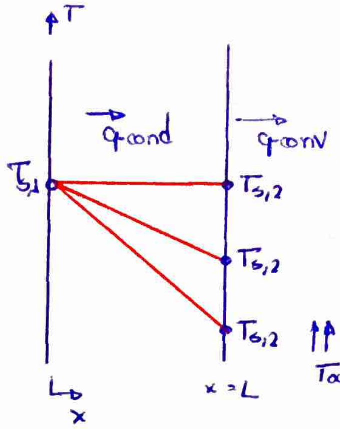
Também podemos definir $\tau = R_tC_t = \frac{\rho V c}{hA_s}$

Constante de tempo térmica

quanto maior a cte de tempo, maior será o tempo que o sistema vai demorar para responder a uma mudança no ambiente.

Validação do Método:

Consideremos um problema estacionário de parede plana:



Balanço de Energia Superficial

$q_{cond} = q_{conv} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) =$

$= hA(T_{s,2} - T_\infty)$

Podemos generalizar para o caso transiente!

$$\therefore Bi = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_\infty} = \frac{L/kA}{1/hA} = \frac{R_{t,cond}}{R_{t,conv}}$$

Adimensional

$\Rightarrow$ a resistência a conv. for muito mais significativa do que a resistência a cond. então a análise concentrada é válida!

Análise Concentrada é válida quando $Bi \ll 1$ ($Bi < 0,1$)

De forma geral, o número de Biot é dado por:

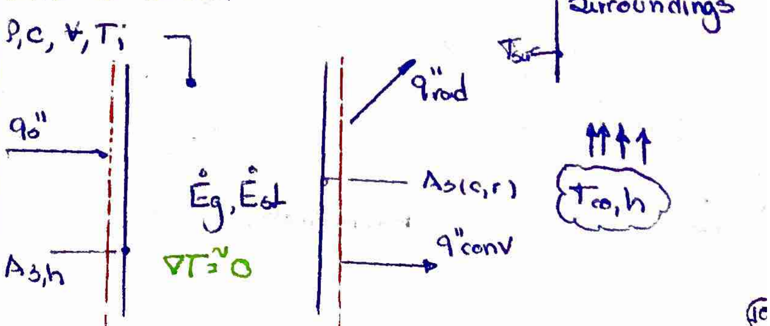
$$\boxed{Bi = \frac{hL_c}{k}}$$

L_c é o comprimento característico!

Na Análise Concentrada é definido como a razão entre o volume do sólido e sua área superficial. (V/A_s).

Análise Geral:

Vamos considerar casos em que temos perda por radiação, temos energia gerada e temos alguma fonte de potência induzindo variação de temperatura no sólido.



Balanço de energia:

$$\frac{dE_{st}}{dt} = \rho V c \frac{dT}{dt} = \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho V c \frac{dT}{dt} = q_s'' A_{s,h} - \left[h(T-T_\infty) - \varepsilon\sigma(T^4 - T_{sur}^4)\right]A_{s(c,r)} + \dot{E}_g$$

• Caso particular: somente radiação

↳ sem imposição de fluxo térmico ou geração interna.

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = -\varepsilon\sigma A_s (T^4 - T_{sur}^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho V c \frac{dT}{T^4 - T_{sur}^4} = -\varepsilon\sigma A_s \, dt$$

Integrando: $\dfrac{\varepsilon\sigma A_s}{\rho V c} \displaystyle\int_0^t dt = \int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T_{sur}^4 - T^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{\rho V c}{4\varepsilon\sigma A_s T_{sur}^3}\left\{ \ln\left|\frac{T_{sur}+T}{T_{sur}-T}\right| - \ln\left|\frac{T_{sur}+T_i}{T_{sur}-T_i}\right| + 2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{T}{T_{sur}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{T_i}{T_{sur}}\right)\right]\right\}$$

Não conseguimos obter T de forma explícita!

• Caso particular: radiação desprezível.

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = q_s'' A_{s,h} - h A_{s,c}(T - T_\infty) + \dot{E}_g$$

$$a = h A_{s,c} / \rho V c$$
$$b = (q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g)/\rho V c \quad \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -a(T-T_\infty) + b$$

$$\theta = T - T_\infty \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -a\theta + b$$

$$\theta' = \theta - \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{d\theta'}{dt} = -a\theta'$$

Integrando: $\dfrac{d\theta'}{\theta'} = -a\,dt \Rightarrow \displaystyle\int_{\theta_i'}^{\theta'} \frac{d\theta'}{\theta'} = \int_0^t -a\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\theta'}{\theta_i'} = e^{-at} \Rightarrow \frac{\theta - \frac{b}{a}}{\theta_i - \frac{b}{a}} = e^{-at} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_i e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})\frac{1}{\theta_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-at} + \frac{b/a}{T_i - T_\infty}(1 - e^{-at}), \text{ onde}$$

$$a = \frac{h A_{s,c}}{\rho V c} \quad \text{e} \quad b = \frac{q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g}{\rho V c}$$

A temperatura de equilíbrio será:

$$\frac{T_f - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \lim_{t\to\infty}\left\{\underbrace{e^{-at}}_{0} + \frac{b/a}{T_i - T_\infty}(1 - \underbrace{e^{-at}}_{0})\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_f - T_\infty}{\cancel{T_i - T_\infty}} = \frac{b/a}{\cancel{T_i - T_\infty}} \Rightarrow T_f = T_\infty + \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_f = T_\infty + \frac{q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g}{h A_{s,c}}$$

Obs: para o número de Biot:

• Placa de espessura 2L: $L_c = \dfrac{2LA_s}{2A_s} = L$

• Cilindro de raio r: $L_c = \dfrac{\pi r^2 L}{2\pi r L} = \dfrac{r}{2}$

• Esfera de raio r: $L_c = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\pi r^3}{4\pi r^2} = \dfrac{r}{3}$

Calor transferido:

$$\Delta E_{st} = -Q = -\int_0^t \dot{E}_{out}\,dt \Rightarrow$$

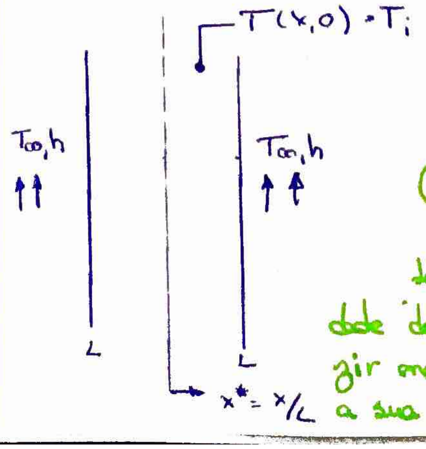
$$\Rightarrow \Delta E_{st} = -hA_s \int_0^t \theta\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{st} = (\rho V c)(T_\infty - T_i)\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

→ Efeitos Espaciais

Utilizaremos quando o número de Biot não for pequeno o suficiente! ($Bi \ll 1$; $Bi < 0{,}1$)

Para uma parede plana com convecção e simetria:



Eq. Geral. da Condução

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

↳ $\alpha = \dfrac{k}{\rho . c} \equiv$ difusividade térmica (mede a capacidade de um material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la)

Condições de Contorno:

- $T(x,0) = T_i$ → prevê distribuição de temperatura uniforme em $t=0$
- $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ → simetria
- $\left.-k\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = h[T(L,t) - T_\infty]$

A resposta da EDP depende de uma série de parâmetros físicos:

$$\underbrace{T = T(x,t,T_i,T_\infty,L,k,\alpha,h)}$$

Vamos adimensionalizar a EDP para diminuir a dependência destes parâmetros físicos. Desta forma, obteremos uma solução mais simples com menor dependência de parâmetros particulares.

Adimensionalizando a EDP:

- temperatura adimensional: $\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T-T_\infty}{T_i - T_\infty}$
- coordenada adimensional: $x^* = \frac{x}{L}$ → metade da espessura da parede plana.
- tempo adimensional (número de Fourier): $t^* \equiv \frac{\alpha t}{L^2} = F_o$
- número de Biot: $\underbrace{B_i = \frac{hL}{k}}$ agora, o número de Biot não é dado pela razão do volume sobre a área!

Fazendo as substituições:

$$\frac{\partial^2\theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial\theta^*}{\partial F_o}$$

CC:
- $\theta^*(x^*,0) = 1$
- $\left.\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=0} = 0$
- $\left.-k\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*}\right|_{x^*=L} = -B_i\theta^*(1,F_o)$

A solução terá forma:

$$\underbrace{\theta^* = f(x^*, F_o, B_i)}$$

redução da redução de valores físicos particulares.

A solução exata para a parede plana é:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(-\zeta_n^2 F_o)} \cdot \cos(\zeta_n x^*), \text{ com}$$

$$C_n = \frac{4\,\text{sen}\,\zeta_n}{2\zeta_n + \text{sen}(2\zeta_n)} \quad \text{e} \quad \zeta_n \,\text{tg}\,\zeta_n = B_i$$

autovalores de ζ_n são raízes da eq. tr.

Podemos demonstrar que para $F_o > 0{,}2$ podemos aproximar a solução por:

$$\theta^* = \underbrace{C_1 e^{(-\zeta_1^2 F_o)}}_{\theta_o^*} \cos(\zeta_1 x^*)$$

$$\theta^* = \theta_o^* \cos(\zeta_1 x^*)$$

Podemos encontrar os valores de C_1 e ζ_1 (tabelados) a partir de B_i.

<u>Variação de Energia</u>: p parede plana

Calor total transferido: $\Delta E_{st} = -Q$

$$Q = -[E(t) - E(0)] = -\int \rho c[T(x,t) - T_i]\, d\forall$$

Adimensionalizamos!

$$\Rightarrow \frac{Q}{Q_o} = -\frac{1}{\forall}\int_0^t \left[\frac{T(x,t) - T_i}{T_i - T_\infty}\right] d\forall \Rightarrow$$

$Q_o = \rho c \forall (T_i - T_\infty)$ → energia interna inicial da parede em relação à temperatura do fluido

$$\Rightarrow \frac{Q}{Q_o} = \frac{1}{\forall}\int_0^t (1-\theta^*)\, d\forall \Rightarrow Q = Q_o\left(1 - \frac{\text{sen}\,\zeta_1}{\zeta_1}\theta_o^*\right)$$

usar a tabela

<u>Cilindro</u>:

Solução exata:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\zeta_n^2 F_o} \cdot J_0(\zeta_n r^*),$$

J_0 → Função de Bessel de primeira espécie

onde $C_n = \frac{2}{\zeta_n} \cdot \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n)}$ e $F_o = \frac{\alpha t}{r_o^2}$

Os autovalores de ζ_n são:

$$\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = B_i \qquad B_i = \frac{h r_o}{k}$$

Se $F_o > 0{,}2$:

$$\theta^* = \underbrace{C_1 e^{(-\zeta_1^2 F_o)}}_{\theta_o^*} \cdot J_0(\zeta_1 r^*) \Rightarrow$$

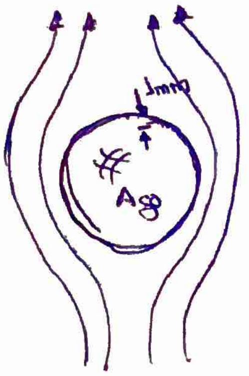
$$\Rightarrow \theta^* = \theta_o^* \cdot J_0(\zeta_1 r^*)$$

O calor transferido é dado por:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{2\theta_o^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$$

Também é uma função de Bessel de primeira espécie.

Exemplo 1 (5.57 - 6ed)



$c = 500\ J/kgK$

$\rho = 700\ kg/m^3$

$k = 50\ W/mK$

$T(9mm, t) = 1000K$

$D = 0{,}020\ m$

$T_i = 300K$

$T_\infty = 1300K$

$h = 5000\ W/m^2K$

Solução:

Análise concentrada?

$$Bi = \frac{h\,L_c}{k} = \frac{5000 \cdot 0{,}010/3}{50} = \underbrace{0{,}33\ldots}_{\text{Não}} \qquad L_c = r_o/3$$

$$Bi = \frac{h \cdot r_o}{k} = \frac{5000 \cdot 0{,}010}{50} = 1{,}0$$

$$\Theta^* = C_1 \cdot e^{-\zeta_1^2 F_o} \cdot \frac{1}{\zeta_1 r^*} \operatorname{sen}(\zeta_1 \cdot r^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_o = -\frac{1}{\zeta_1^2} \cdot \ln\left[\frac{\Theta^*}{C_1} \Big/ \frac{1}{\zeta_1 \cdot r^*} \operatorname{sen}(\zeta_1 \cdot r^*)\right]$$

Lembrando que:

$$F_o = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{\alpha t}{r_o^2} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{50}{7800 \cdot 500} = 1{,}28 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

$$\text{Tab 5.1} \longrightarrow Bi = 1{,}0 \begin{cases} \zeta_1 = 1{,}5708 \\ C_1 = 1{,}2732 \end{cases}$$

$$F_o = \frac{-1}{(1{,}5708)^2} \cdot \ln\left[\frac{1000-1300}{300-1300} \Big/ \frac{1{,}2732}{1{,}5708 \cdot 0{,}9} \cdot \operatorname{sen}(1{,}5708 \cdot 0{,}9)\right]$$

$$= 0{,}441 \Rightarrow t = \frac{0{,}441 \cdot 0{,}01^2}{1{,}28 \cdot 10^{-5}} = 3{,}4\,s$$

Fluxo de calor no instante 3,4 s

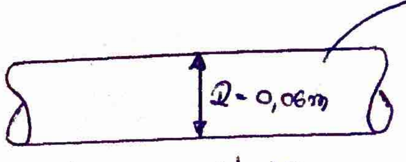
$$q''_r(r_o^*, 0.441) = h\,(T(r_o; 3{,}4) - T_\infty)$$

Exemplo 2 (5.60 - 6ed)

$\rho = 800\ kg/m^3$

$c = 500\ J/kgK$

$k = 50\ W/mK$



$h = 1000\ W/m^2K$

$T_\infty = 750K$

$$T(r^* = 0, t) \longleftrightarrow T(r^* = 1, t) = 550\,K$$

Análise concentrada:

$$Bi = \frac{h \cdot r_o/2}{k} = \frac{1000 \cdot 0{,}06/4}{50} = \underbrace{0{,}3 > 0{,}1}_{\text{não}}$$

$$Bi = \frac{h \cdot r_o}{k} = \frac{1000 \cdot 0{,}3}{50} = 0{,}6$$

$$\begin{matrix}\text{Tab 5.1} \\ \text{(cilindro)}\end{matrix} \begin{cases} \zeta_1 = 1{,}0185 \\ C_1 = 1{,}1346 \end{cases}$$

$$\Theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \underbrace{C_1 \cdot \exp(-\zeta_1^2 F_o)}_{\Theta_o^*} \underbrace{J_0(\zeta_1 r_1^*)}_{\text{tabela}}$$

$$\frac{\Theta^*}{\Theta_o^*} = J_0(\zeta_1 \cdot r^*)$$

$x = \zeta_1 \cdot r^* = 1{,}0185 \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow J_0 \cong 0{,}7652$

$$\frac{\dfrac{550-750}{T_i - 750}}{\dfrac{T(r^*=0,t) - 750}{T_i - 750}} = \frac{550 - 750}{T(r^*=0,t) - 750} = 0{,}7652 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(r^* = 0, t) = 488\,K$$

Esfera:

Solução exata:

$$\Theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\zeta_n^2 F_o} \cdot \frac{1}{\zeta_n r^*} \operatorname{sen}(\zeta_n r^*),$$

com $C_n = \dfrac{4[\operatorname{sen}(\zeta_n) - \zeta_n \cos(\zeta_n)]}{2\zeta_n - \operatorname{sen}(2\zeta_n)}$ e

$$F_o = \frac{\alpha t}{r_o^2}$$

Os autovalores de ζ_n são dados por:

$$1 - \zeta_n \operatorname{cotg} \zeta_n = Bi \qquad Bi = \frac{h r_o}{k}$$

Solução aproximada:

$$\Theta^* = \underbrace{C_1\, e^{-\zeta_1^2 F_o}}_{\Theta_o^*} \cdot \frac{1}{\zeta_1 r^*} \operatorname{sen}(\zeta_1 r^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta^* = \Theta_o^* \cdot \frac{1}{\zeta_1 r^*} \cdot \operatorname{sen}(\zeta_1 r^*)$$

→ Sólido semi-infinito:

O domínio é limitado por um lado e se estende indefinidamente pelo outro.

↳ Pode ser usado para aproximar soluções de problemas em R'T com sólidos finitos onde $Fo < 0{,}2$, ou seja, evitamos a utilização da solução exata!

Feita esta aproximação, podemos encontrar soluções analíticas para o problema a partir de 3 casos:

- Caso 1: Temperatura na superfície constante

$T(0,t) = T_s$ e $T(x,0) = T_i$

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$q_s'' = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

↳ fluxo na superfície!

- Caso 2: Fluxo térmico na superfície cte:

$T(x,0) = T_i$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = q_0'' = q_s''$$

$$T(x,t) - T_i = \frac{2q_0''(\alpha t/\pi)^{1/2}}{k} e^{-x^2/4\alpha t} - \frac{q_0'' x}{k}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

↳ Função erro complementar: $1 - \operatorname{erf}(\eta)$

- Caso 3: Convecção na superfície:

$T(x,0) = T_i$

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} = h\left[T_\infty - T(0,t)\right]$$

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \left[e^{\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}}\right]\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]$$

Como verificar se posso usar a aproximação por um sólido semi-infinito?

$$\underbrace{\delta_p = 2{,}3 \cdot \sqrt{\alpha t^2}}_{\text{Espessura de penetração térmica}}$$

Profundidade até a qual efeitos significativos na temperatura se propagam no meio.

Basta comparar com as dimensões do sólido para validar a aproximação!

Caso tenhamos contato entre dois sólidos semi-infinitos A e B:

$$T_s = \frac{(k\rho c)_A^{1/2} T_{A,i} + (k\rho c)_B^{1/2} T_{B,i}}{(k\rho c)_A^{1/2} + (k\rho c)_B^{1/2}}$$