

# Estática

## FORÇAS E VETORES APLICADOS - sistema

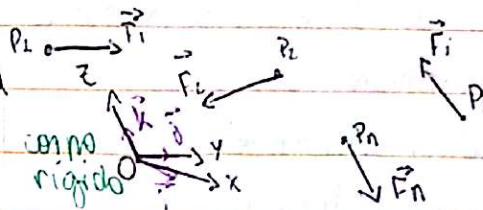
de forças

Há 3 categorias de vetores:

■ aplicados

■ deslizantes

■ livres

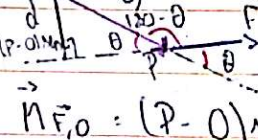


Def.: **resultante** de um sistema de forças é o **VETOR LIVRE**

$$\vec{R} \triangleq \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (F_{xi}\hat{i} + F_{yi}\hat{j} + F_{zi}\hat{k}) [N]$$

Def.: **momento** de uma força ( $\vec{F}, P$ ) em relação a um polo O genérico

$$\vec{M}_{O} \text{ ou } \vec{M}_{\vec{F},O} \triangleq (P-O) \wedge \vec{F} [N \cdot m]$$



VETOR APLICADO

(d) distância entre O e a linha de ação de F

$$\vec{M}_{\vec{F},O} = (P-O) \wedge \vec{F}$$

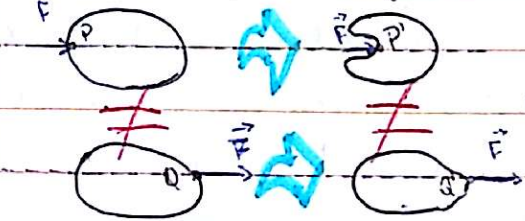
$$\|\vec{M}_{\vec{F},O}\| = \|(P-O)\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin\theta = d \cdot \|\vec{F}\|$$

- Direção e sentido: Regra da mão direita

- Propriedade: o momento de uma força em relação a um polo **NÃO** se altera quando a força é **deslocada** sobre sua **linha de ação**

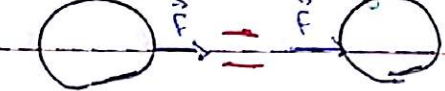
Corpo rígido (indeformável)

- Para um corpo **NÃO** rígido:



$\vec{F}$  (força) é um vetor **aplicado**

- Para um corpo **rígido**:



$\vec{F}$  (força) é um vetor **deslizante** (CASO PARTICULAR!)

Continuidade da matéria

Def.: **referencial**  $\mathcal{R}$  é um corpo rígido de forças em relação a um polo O:

Aos **referenciais**, atribuem-se sistemas de referência ou sistemas de coordenadas (cartesianas, esféricas, cilíndricas).

$$\vec{M}_{\vec{F},O} \triangleq \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i \quad \text{VECTOR APLICADO}$$

Def.: **Teorema de Varignon**



$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (Q - O) \wedge \vec{F}_i + (Q - O) \wedge \vec{R} \quad \text{VECTOR APLICADO}$$

### 1. Sistema de Forças

Dado um conjunto  $\{(\vec{F}_i, P_i)\}$  de forças aplicadas a pontos definidos em relação a um referencial

Def.: **Mudança de polo**

e descritos em termos de um sistema de coordenadas associado a esse referencial, temos:

Suponha conhecido o momento de uma força ( $\vec{F}, P$ ) em relação a um polo O. O momento em relação a  $O'$  é dado por:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + (O - O') \wedge \vec{R}$$

Consequência da fórmula de mudança de polo  $\rightarrow$  invariante escalar

Multiplicando escalarmente por  $\vec{R}$  em ambos os lados da fórmula de mudança de polo:

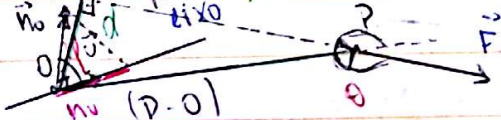
$$\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} + [(O-Q) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{R}$$

$$\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} = I \quad \text{invariante escalar}$$

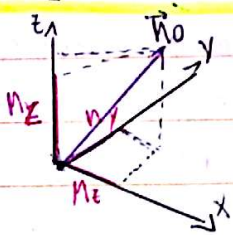
Exemplo 1 - caderno de exemplos

### MOMENTO EM RELAÇÃO A UM EIXO

Eixo que passa pelo ponto  $O$  e é orientado pelo vetor  $\vec{u} \approx OQ$



$$M_u \equiv [(P-O) \wedge \vec{F}] \cdot \vec{u}$$



$$\vec{M}_0 = M_{0x} \hat{i} + M_{0y} \hat{j} + M_{0z} \hat{k}$$

$$M_{0x} = \vec{M}_0 \cdot \hat{i}$$

$$M_{0y} = \vec{M}_0 \cdot \hat{j}$$

$$M_{0z} = \vec{M}_0 \cdot \hat{k}$$

$$M_u = \|(P-O)\| \cdot \|\vec{F}\| \sin \theta \cdot \|\vec{u}\| \cos \varphi$$

$$M_u = d \cdot F \cdot \cos \varphi$$

Quando  $M_u$  é NULO?

A linha de ação de  $\vec{F}$  é concorrente

com o eixo  $OQ$

A linha de ação de  $\vec{F}$  é paralela

ao eixo  $OQ$

Consequência:  $M_u$  pode ser obtido a partir do momento calculado em relação a

qualquer polo pertencente a  $OQ$

qualquer polo pertencente a  $OQ$

### BINÁRIO

Dado o sistema de forças  $(\vec{F}, P)$  e  $(-\vec{F}, Q)$

Vamos obter sua resultante e o momento em relação a um polo



$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_0 = (P-O) \wedge \vec{F} + (Q-O) \wedge (-\vec{F})$$

$$\vec{M}_0 = (P-Q) \wedge \vec{F} = \vec{M}$$

$\vec{M} \approx$  momento do binário: VETOR LIVRE não depende de O

$$\|\vec{M}\| = \|(P-Q)\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin \theta$$

$$\|\vec{M}\| = d \|\vec{F}\|$$

### REDUÇÃO DE SISTEMA DE FORÇAS

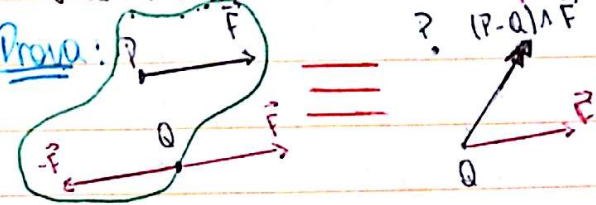
"Reduzir" um sistema de forças é obter outro sistema que lhe seja equivalente, porém MAIS SIMPLES.

Equivalência significa mesma resultante e mesmo momento em relação a um polo arbitrário.

A simplificação é feita a partir do invariante escalar (I)

### EQUIVALÊNCIA DE UMA FORÇA

Uma força  $(\vec{F}, P)$  é equivalente a uma força  $\vec{F}$  aplicada em outro ponto, acrescida de um momento de transporte



Algebricamente:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + (P-Q) \wedge \vec{F}$$

$$(\vec{F}, P) \equiv (\vec{F}, Q) \cup (P-Q) \wedge \vec{F}$$

$$(\vec{F}, P) \equiv (\vec{F}, Q) \cup \vec{M}_Q$$

Redução binária-n no  $\perp (\vec{M}_0 \cdot \vec{R})$

$$-\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0$$

$\vec{M}_0 = \vec{0}$  e  $\vec{R} = \vec{0}$ : sistema equilibrado

ou balanceado  $\rightarrow$  condição de equilíbrio estático

$\hookrightarrow \vec{M}_0 \neq \vec{0} \text{ e } \vec{R} = \vec{0}$ : binário

$\hookrightarrow \vec{M}_0 = \vec{0} \text{ e } \vec{R} \neq \vec{0}$

$\hookrightarrow \vec{M}_0 \neq \vec{0} \text{ e } \vec{R} \neq \vec{0} (\vec{M}_0 \perp \vec{R})$ : sistema

reduzível à resultante sobre um eixo no

qual os momentos são nulos  $\Rightarrow \Rightarrow$  pontos E tais que  $\vec{M}_E = \vec{0}$ . Vamos obter o lugar

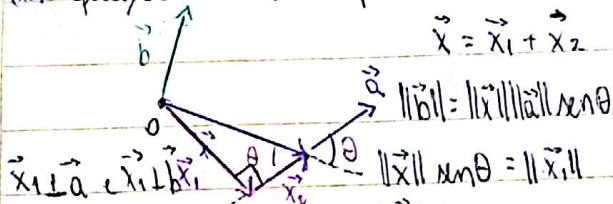
geométrico desses pontos:

$\vec{M}_E = \vec{M}_0 + (0 - \epsilon) \wedge \vec{R}$

$\vec{0} = \vec{M}_0 + (0 - \epsilon) \wedge \vec{R} \Leftrightarrow (\epsilon - 0) \wedge \vec{R} = \vec{M}_0$

(\*) equações vetorial do tipo  $\vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{b}$

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$



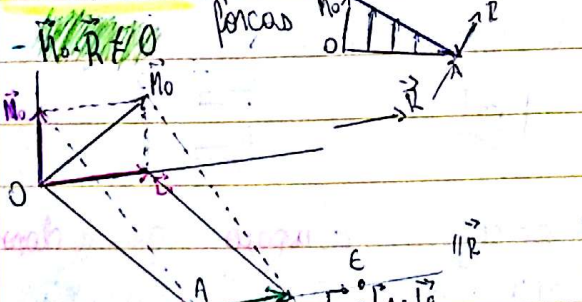
$\vec{x}_1 \perp \vec{a} \text{ e } \vec{x}_2 \perp \vec{b}$   
 $\vec{x}_1 \parallel \vec{a} \wedge \vec{b}$   
 $\|\vec{x}_1\| = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \vec{x}_1 = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|} = \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\theta)}$

$\vec{x}_2 = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$  Porém,  $\vec{x} = (\epsilon - 0) = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_2 = \lambda \vec{a}$   
 $(\epsilon - 0) = \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} + \lambda \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}$

Voltando à eq. original  $(\epsilon - 0) \wedge \vec{R} = \vec{M}_0$

$\epsilon = 0 + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$

eq. de uma reta de momentos mínimos (nesse caso zero), fixo central do sistema de forças



$\vec{M}_0 \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} + L_0 \cdot \vec{R} = I$

Nesse caso existem pontos E tais que  $\vec{M}_E = \vec{0}$  denominada relativas, vinculares ou reações que é mínimo

$\vec{M}_E = \alpha \cdot \vec{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \vec{M}_E \parallel \vec{R}$   
 $\vec{M}_E = \vec{M}_0 + (0 - \epsilon) \wedge \vec{R}$

$\vec{M}_E = \vec{M}_0 + (0 - \epsilon) \wedge \vec{R}$

Encontrando  $\alpha$ :

$(\alpha \cdot \vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} + [(0 - \epsilon) \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R}$

$\alpha = \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{\|\vec{R}\|^2} = \frac{I}{\|\vec{R}\|^2}$

$\Rightarrow \vec{M}_E$ , momento mínimo =  $\alpha \cdot \vec{R} = \left( \frac{\vec{M}_0 \cdot \vec{R}}{\|\vec{R}\|^2} \right) \vec{R}$

O lugar geométrico dos pontos do eixo central (eixo de momento mínimo) é dada por

$(\epsilon - 0) \wedge \vec{R} = \vec{M}_0 - h \vec{R}$   
 $\epsilon = 0 + \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}_0 - h \vec{R})}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}$

$\epsilon = 0 + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0 + \lambda \vec{R}}{\|\vec{R}\|^2}$  ou  $\epsilon = A + \lambda \vec{R}$   
 eixo central

Exemplo 2 - cadeia de exemplos

Def: Estática - equilíbrio dos corpos rígidos e dos sistemas de corpos rígidos

Definições:

1. Ponto material
2. Corpo rígido
3. Sistemas de corpos - TODO conjunto formado por um ou mais corpos rígidos é um sistema de corpos

4. Forças internas: são as decorrentes de ações entre corpos DO sistema de corpos

Forças externas: são as decorrentes de ações entre quaisquer corpos externos ao sistema de corpos

5. Forças ativas e reativas (ou vinculares). Forças que ocorrem em reação a uma força aplicada voluntariamente são de

6. Diagrama de corpos livres: é um diagrama no qual TODOS os esforços (forças e momentos) que agem em um CR ou um sistema de CR são representados

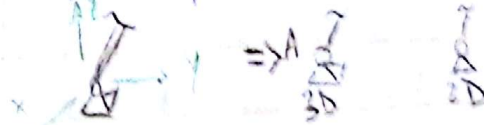
Def. Corolário: um corpo rígido sujeito a APENAS 3 forças somente estará em equilíbrio se estas forem



planarias (paralelas ou concorrentes)

Vínculos e grupos de liberdade (GL)

(2) Articulações



Grupos de liberdade: número de parâmetros independentes necessários e suficientes para definir a posição de um corpo rígido em relação ao espaço

Restringe 3GL no espaço e 2GL no plano

Impõe uma reação de  $\forall$  módulo, direção e sentido em um ponto determinado, o centro da articulação

Um corpo rígido possui 6GL no espaço



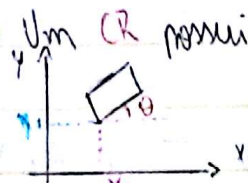
- 3 coordenadas de um ponto

- 3 orientações em relação a eixos cartesianos

(3) Anel simples (mancal)



Um CR possui 3GL no plano



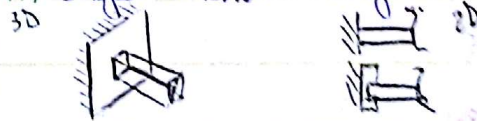
Restringe 1GL no plano e 2GL no espaço

Impõe uma reação de  $\forall$  módulo em direção  $\perp$  a um eixo

Vínculo: TODO "ente" capaz de restringir graus de liberdade. A restrição é possível mediante a aplicação ao corpo rígido ou ao sistema de corpos rígidos, de esforços (forças ou momentos) chamados vínculos ou reações (reação de apoio)



(4) Engastamento ou engaste



Tipos de vínculos ideais (sem atrito)

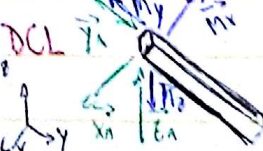
Restringe 6GL no espaço e 3GL no plano

(1) Apoio simples unidirecional ou bidirecional

Impõe três forças e três momentos no espaço ou duas forças e um momento relativos em um ponto definido



Restringe 1GL no plano e 1GL no espaço



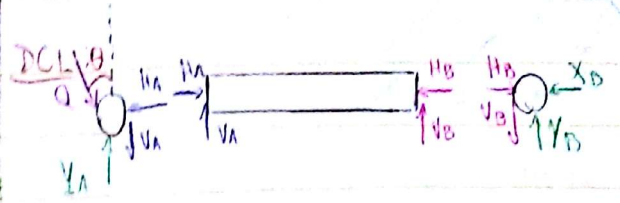
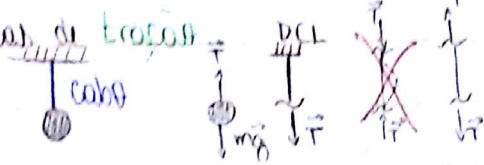
Impõe uma força de  $\forall$  módulo e direção  $\perp$  a um plano, por um ponto definido

Exemplo 3 - caderno de exemplos e exercícios

Elementos Mecânicos

Fios (ou barras) ideais: massa desprezível, indeformável e resiste somente

a forças de tração



$\sum F_x = 0$        $\sum F_y = 0$   
 $0 \text{ sen } \theta - H_A = 0$        $= 0 \text{ cos } \theta - V_A + Y_A = 0 \quad (1)$

$H_A = 0 \text{ sen } \theta$

Placas: massa considerável e a seguinte característica geométrica



$h \ll b$

$h \ll l$

$\sum F_x = 0$        $\sum F_y = 0$   
 $X_B = H_B$        $Y_B = V_B$

Barras  $\sum M_A = 0 \Rightarrow L \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B \Rightarrow V_A = 0$

Barras: massa considerável e resiste a forças de tração, compressão e flexão

Característica geométrica



$h \ll b$

$l \ll b$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = H_B = 0 \text{ sen } \theta$

Por (1)  $\Rightarrow Y_A = 0 \text{ cos } \theta$

∴ se as cargas externas forem aplicadas APENAS nos nós, as forças in-

ternas terão a direção das barras (tração ou compressão) sendo  $n$  o nº de nós,  $b$  o nº de barras e  $r$  o nº de reações de apoio (ou vinculadas) a treliça será isostática se:

teremos a direção das barras (tração ou compressão) sendo  $n$  o nº de nós,  $b$  o nº de barras e  $r$  o nº de reações de apoio (ou vinculadas) a treliça será isostática se:

$2n = b + r$

Treliças: são estruturas formadas apenas por barras, unidas por articulações ideais (sem atrito) genericamente denominadas nós e cujas forças externas (ativas e reativas) são aplicadas EXCLUSIVAMENTE NUNS NÓS

Resolver uma treliça é obter as forças em TODAS as barras e as reações vinculadas

Há 2 métodos clássicos de soluções:

↳ Método dos nós

↳ Método das reações

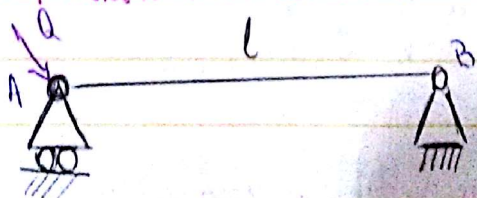
Caso haja cargas (forças) não-nodais, a estrutura recebe o nome de pórtico

Exemplo - Caderno de exemplos e exercícios

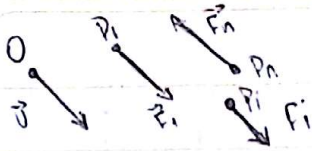
Estudaremos treliças planas

SISTEMAS DE FORÇAS // e CENTRO DE FORÇAS //

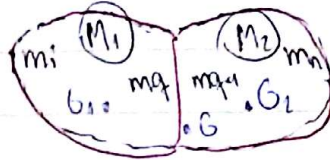
Propriedade Fundamental:



Seja sistema  $(\vec{F}_i, P_i)$ , com  $F_i = h_i \vec{u}_h$ , hGR



Propriedades:  
 (1) Associativa



Calcularemos a **resultante**, o momento em relação a O e o **momento escalar**

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left( \sum_{i=1}^n h_i \right) \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - O) \wedge h_i \vec{u}$$

$$\vec{M}_O = \left[ \sum_{i=1}^n h_i (\vec{r}_i - O) \right] \wedge \vec{u}$$

$$I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$$

$$(G-O) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - O)}{\sum_{i=1}^n m_i} \Rightarrow M(G-O) = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - O)$$

$$(G_1-O) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - O)}{\sum_{i=1}^n m_i} \Rightarrow M_1(G_1-O) = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - O)$$

$$(G_2-O) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - O)}{\sum_{i=1}^n m_i} \Rightarrow M_2(G_2-O) = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - O)$$

O sistema de forças //s é **reduzível** à sua **resultante** sobre o **eixo central**

Existem pontos para os quais o momento é **nulo**. Sejam estes pontos  $E$

$$\vec{M}_E = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - E) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - E) \wedge h_i \vec{u} = \vec{0}$$

$$(G-O) = \frac{M_1(G_1-O) + M_2(G_2-O)}{M}$$

**Consequência:** o sistema de forças //s é reduzível a uma **ÚNICA** força independentemente da direção  $\vec{u}$ . Para obter os pontos  $E$  do eixo central fazamos

$$\vec{M}_E = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_E = \vec{M}_O + (O-E) \wedge \vec{R} = -\vec{M}_O$$

$$(E-O) \wedge \vec{R} = \left[ \sum_{i=1}^n h_i (\vec{r}_i - O) \right] \wedge \vec{u}$$

$$(E-O) \wedge (\sum h_i \vec{u}) = \left[ \sum_{i=1}^n h_i (\vec{r}_i - O) \right] \wedge \vec{u} \quad (1)$$

(2) **Simetria:** se um ponto, eixo ou plano for de simetria, o centro de massa será o ponto ou pertencerá ao eixo ou plano de simetria

**HIDROSTÁTICA**

Vamos trabalhar com **fluidos incompressíveis** em repouso.

Os **fluidos** exercem **pressão** sobre outros corpos.

As **forças** resultantes da pressão são sempre **paralelas** à **normal** à superfície a qual elas agem.

Em particular, para  $\lambda=0$ ,  $E=A$ , que será chamado **centro de forças** //s, a qual elas agem.

$C$ , um ponto do eixo central

$$(C-O) = \frac{\sum h_i (\vec{r}_i - O)}{\sum h_i}$$

centro de forças paralelas

**Volume das pressões**

Suponha um elemento de área da superfície sobre o qual age uma **pressão**  $p(P)$ , onde  $P$  é o ponto onde a pressão se aplica

**Propriedade:** o centro de forças paralelas não depende do polo O

O **centro de forças paralelas** no campo gravitacional é o **centro de massas** ou **baricentro**

$$\vec{R} = p(P) \cdot \vec{n} \text{ da } (-\vec{n})$$

$$\vec{R} = \text{volume} \cdot (-\vec{n})$$

↳ peso do fluido sobre a área

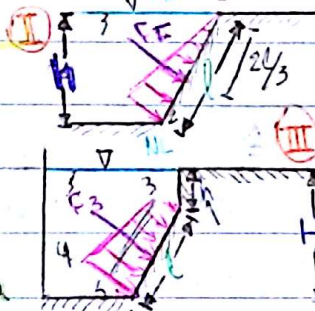
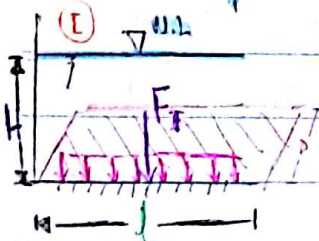
Lei de Stevin

Supondo um fluido de peso específico  $\gamma$  há quatro modulos básicos:

[N/m<sup>3</sup>] e um elemento de espessura unitária em equilíbrio, temos  $(p_1 - p_2) = \gamma \cdot y$ , ou seja, a pressão **AUMENTA** linearmente quando a profundidade **DIMINUI**.

Forças exercidas por um fluido sobre superfícies planas

Suponha espessura (largura, dimensões damentais foram estabelecidas por Coulomb perpendicular ao plano da base) valendo  $D$  [m] e um fluido de peso específico  $\gamma$  [N/m<sup>3</sup>]



Não vamos obter a força resultante da pressão do fluido sobre as superfícies de área  $l \cdot D$

I  $p_1 = \gamma h$   
 $F_1 = \gamma \cdot h \cdot l \cdot D$

II  $p_1 = 0$   $p_2 = \gamma \cdot h$   
 $F_2 = \frac{(\gamma \cdot h) \cdot l \cdot D}{2}$

III  $p_1 = \gamma h$   $p_2 = \gamma H$   
 $F_3 = \frac{\gamma (h+H) \cdot l \cdot D}{2}$  Área de  $\frac{h+H}{2} \cdot l$

Para obter o CM de III, utilizamos a

propriedade de composição

$F_3 = F_4 + F_5$   $F_5 = \gamma (H-h) l D$   
 $F_4 = \gamma h l D$

$(C-O) \cdot F_3 = \frac{1}{2} F_4 + \frac{2}{3} F_5$

$(C-O) = \frac{(h+2H) l}{3(H+h)}$

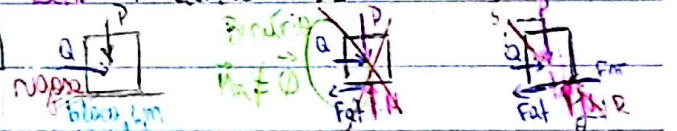
ATRIÇÃO

Atrito seco de engastamento  
 - Atrito lubrificado de engastamento  
 - Atrito de rolamento  
 - Atrito de pivoteamento

Atrito seco de escorregamento

Possui caráter empírico cujas leis foram

estabelecidas por Coulomb e Leis do atrito:



(a)  $\mu < 0$   $F_{atmáx} \approx \text{equilíbrio}$   
 $\rightarrow \|\vec{Q}\| = \|\vec{F}_{at}\|$

(b)  $\mu = 0$   $F_{atmáx} \approx \text{equilíbrio}$ , porém **mínima**  
 de movimento  $\rightarrow \|\vec{Q}\| = \mu_e \|\vec{N}\| = \|\vec{F}_{at}\|$

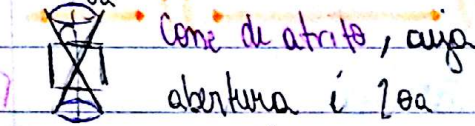
(c)  $\mu > 0$   $F_{atmáx} \approx \text{equilíbrio}$   $\rightarrow \|\vec{F}_{at}\| = \mu_e \|\vec{N}\|$   
 Em geral,  $\mu_e > \mu_0$

Para o bloco, as eqs de equilíbrio são:

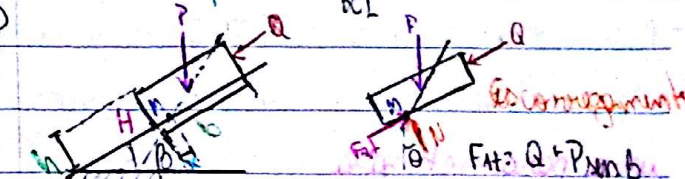
$\sum F_y = 0 \Rightarrow P = N \cdot \cos \theta$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow S \cdot \sin \theta = F_{at} = \mu_e N \cdot \cos \theta = N$

Como  $S = R \Rightarrow S \cdot \sin \theta = \mu_e S \cdot \cos \theta \Rightarrow \mu_e = \tan \theta$



Cono de atrito, cuja abertura é  $2\theta$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{at} - Q - P \sin \theta = 0$  (1)  $Q = \gamma \cdot \text{volume} \leq \mu P \cos \theta$   
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow -P \cos \theta + N = 0$  (2)  $\mu > \frac{Q + \gamma \cdot \text{volume}}{P \cos \theta}$

tembocamento

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow x \cdot N + \frac{h}{2} Q - \frac{b}{2} P \cos \beta + \frac{h}{2} P \sin \beta = 0$$

$$2xN + hQ - bP \cos \beta + hP \sin \beta = 0$$

$$2xN + h(Q + P \sin \beta) - bP \cos \beta$$

$$x = \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \left( \frac{Q + P \sin \beta}{P \cos \beta} \right) = \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \mu$$

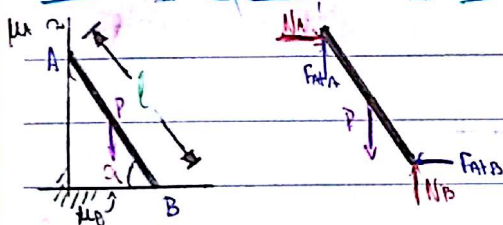
Condições de não-tembocamento

$$x > 0 \Rightarrow \frac{b}{2} - \frac{h}{2} \mu > 0 \Rightarrow \mu \leq \frac{b}{h}$$

Para haver equilíbrio:

$$\frac{Q + P \sin \beta}{P \cos \beta} \leq \mu \leq \frac{b}{h}$$

Estudo de equilíbrio da escada



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_A = F_{ATB} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B + F_{ATA} - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{h}{2} \cos \beta P + L \cos \beta N_B - P \sin \beta F_{ATB} = 0 \quad (3)$$

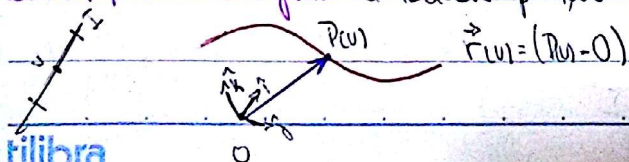
Obtendo  $N_B$  por (2) e (3) e impedindo-se a condição  $F_{ATA} = \mu N_A$  e  $F_{ATB} = \mu N_B$  obtém-se

$$\text{Logo } \mu \geq \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2\mu_B}$$

Binâmica

Curvas Parametrizadas

Dado um parâmetro  $u \in I$ ,  $I$  um intervalo contido em  $\mathbb{R}$ , denomina-se uma curva parametrizada qualquer função  $\vec{r}(u)$



As conjuntos de pontos  $P(u)$  obtidos à medida em que  $u$  varia, denomina-se

traço de  $P(u)$ , uma curva parametrizada

Exemplo:  $pl \quad 0 \leq u < 2\pi$

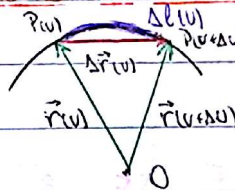
$$\begin{aligned} x(u) &= R \sin u \\ y(u) &= R \cos u \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} R > 0 \in \mathbb{R}, \text{cte} \end{array} \right\}$$

$$z(u) = bu, \quad b > 0 \in \mathbb{R}, \text{cte}$$

$$\vec{r}(u) = R \sin u \hat{i} + R \cos u \hat{j} + bu \hat{k}$$



TRIÉDRO DE FRENET



$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\|\delta \vec{r}(u)\|}{\frac{\Delta u}{\|\vec{r}'(u)\|}} = 1$$

$$\|\vec{r}'(u)\| = l'(u) \quad (1)$$

Def: vetor tangente em  $P(u)$  (versor)

$$\vec{t}(u) \triangleq \frac{\vec{r}'(u)}{\|\vec{r}'(u)\|} = \frac{\vec{r}'(u)}{l'(u)} \quad (2)$$

Def: vetor normal (versor)

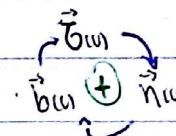
$$\vec{n}(u) \triangleq \frac{\vec{t}'(u)}{\|\vec{t}'(u)\|} \quad (3)$$

Como  $\vec{t}(u)$  é um versor  $\Rightarrow \vec{t}(u) \cdot \vec{t}(u) = 1$   
 $\Rightarrow \vec{t}(u) \cdot \vec{t}'(u) + \vec{t}'(u) \cdot \vec{t}(u) = 0 \therefore \vec{t}'(u) \perp \vec{t}(u)$

Define unicamente o versor normal

Def: vetor binormal

$$\vec{b}(u) = \vec{t}(u) \wedge \vec{n}(u) \quad (4)$$



Forma alternativa de cálculo do triédrio de Frenet

$$\text{De (2): } \vec{r}'(u) = \|\vec{r}'(u)\| \cdot \vec{t}(u) \quad (5)$$

$$\vec{r}''(u) = \|\vec{r}''(u)\| \cdot \vec{t}(u) + \|\vec{r}'(u)\| \cdot \|\vec{t}'(u)\| \cdot \vec{n}(u)$$

$$\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u) = \|\vec{r}'(u)\| \|\vec{t}'(u)\| \vec{t}(u) \wedge \vec{n}(u) + \|\vec{r}'(u)\|^2 \vec{t}'(u) \wedge \vec{t}(u)$$

$$\|\vec{r}'(u)\| \cdot \vec{t}'(u) \wedge \vec{t}(u) = \|\vec{r}'(u)\|^2 \|\vec{t}'(u)\| \vec{b}(u)$$

$$\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u) = \|\vec{r}'(u)\|^2 \|\vec{t}'(u)\| \vec{b}(u)$$



Assim, (5.1)

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)}{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|} \quad (5)$$

$\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$   
 $\vec{b}' \cdot \vec{b} = 0$   
 $\vec{b} \cdot \vec{b}' = 0$   
 $\vec{b} \cdot \vec{b}'' = -\vec{b}' \cdot \vec{b}'$   
 2ª fórmula de Frenet  
 método pl.  $\vec{n} \cdot \vec{b}$  (p. 9)  
 e pl.  $\vec{n} \cdot \vec{b}$  (p. 5)

Def: Tensão de uma curva parametrizada  
 $\gamma(u) \triangleq \frac{\vec{b}(u) \cdot \vec{n}(u)}{l'(u)} \quad (9)$

Procedimento

1. Calcular  $\vec{b}$  por (5)
2. Calcular  $\vec{r}''(u), \vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u) \leftarrow \|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|$
3. Calcular  $\vec{b}$  por (5)
4. Calcular  $\vec{n} = \vec{b}(u) \wedge \vec{b}'(u)$

$$\gamma(u) \cdot l'(u) = \vec{b}'(u) \cdot \vec{n}(u)$$

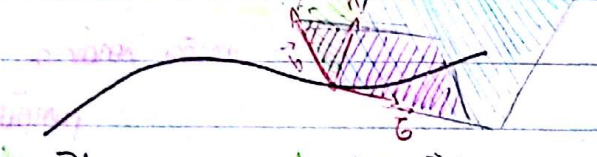
$$\vec{b}'(u) \cdot \gamma(u) \cdot l'(u) \cdot \vec{n}(u) \quad (10)$$

2ª Fórmula de Frenet

$$\vec{n}' = (\vec{n}' \cdot \vec{b}) \vec{b} + (\vec{n}' \cdot \vec{n}) \vec{n} + (\vec{n}' \cdot \vec{b}') \vec{b}'$$

$$\vec{n}' = -c(u) l'(u) \vec{b} - \gamma(u) l''(u) \vec{b} \quad (11)$$

Fórmulas de Frenet



Plano normal ( $\vec{n} \perp \vec{b}$ )

Plano osculador ( $\vec{n} \perp \vec{b}'$ )

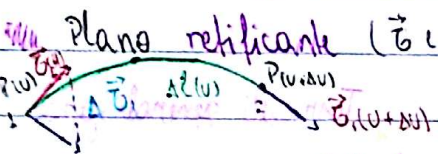
Plano rectificante ( $\vec{b} \perp \vec{b}'$ )

Modo alternativo de cálculo da curvatura

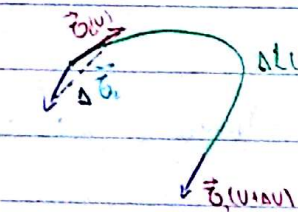
$$\|\vec{b}'(u)\| = \frac{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|}{\|\vec{r}'(u)\|^2 \cdot \|\vec{b}'(u)\|}$$

$$\|\vec{b}'(u)\| = \frac{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|}{l'^2(u)}$$

por (6)  $c(u) = \frac{\|\vec{r}'(u) \wedge \vec{r}''(u)\|}{l'^3(u)}$



Def: Curvatura de uma



curva parametrizada

$$c(u) \triangleq \frac{\|\vec{b}'(u)\|}{l'(u)} \quad (6)$$

VELOCIDADES E ACELERAÇÕES DE UM PONTO

MATERIAL ~ Expressões intrínsecas

Quando os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  descritos

Def: Raio de curvatura de uma curva parametrizada

$$\rho \triangleq \frac{1}{c(u)} \quad (7)$$

em relação ao Triedro de Frenet, suas

expressões denominam-se intrínsecas pois

dependem APENAS da trajetória do ponto

mATERIAL sobre a curva parametrizada

em  $\mathbb{R}^3$

Como  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  são funções do tempo

a inclusão do parâmetro da curva é feita

por uma função implícita

curva define-se:  $\vec{r}(u(t))$  arco rectificante

$$s(u(t)) \triangleq \Delta l(u(t))$$

1ª Fórmula de Frenet

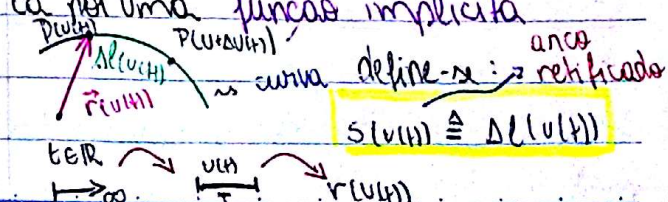
de (3):  $\vec{b}'(u) = \|\vec{b}'\| \vec{n}$  com (6)

$$\vec{b}'(u) = c(u) \cdot l'(u) \vec{n}(u) \quad (8)$$

3ª Fórmula de Frenet

$$\vec{b}(u) \cdot \vec{b}(u) = 1 \Rightarrow \vec{b}'(u) \cdot \vec{b}(u) = 0$$

$$\vec{b}'(u) = (\vec{b}'(u) \cdot \vec{b}(u)) \vec{b}(u) + (\vec{b}'(u) \cdot \vec{n}(u)) \vec{n}(u) + (\vec{b}'(u) \cdot \vec{b}'(u)) \vec{b}'(u)$$



PREMISSO

Velocidades

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

velocidade  
vetorial  
aceleração  
vetorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

↳ vetor posição em coordenadas cartesianas

Levando-se em conta a parâmetro posição, temos:

$\vec{r}(t)$  é o vetor posição

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t) \cdot \hat{u}(t)$$

Utilizando ( )

$$\vec{v}(t) = |\vec{r}'(t)| \cdot \vec{e}_u \cdot \hat{u}(t)$$

$$s(t) = |\vec{r}(t)|$$

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \vec{e}_u$$

$$\dot{s}(t) = \dot{r}(t) \cdot \hat{u}(t)$$

casos em que da se expressa como função da posição ou da velocidade, de maneira implícita

Caso 1: aceleração em função da tempo

→ obtém-se  $v(t)$  e  $s(t)$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v - v_0 = \int_{t_0}^t a(t) dt$$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) \Rightarrow \int ds(t) = \int v(t) dt$$

$$s = s_0 + \int_{t_0}^t (v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt) dt$$

↳ expressões da função variável

Caso 2: aceleração em função da posição

→ obtém-se  $v(s)$  e  $t(s)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v \Rightarrow a ds = v dv$$

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s a(s) ds \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2 \int_{s_0}^s a(s) ds$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(s) ds$$

$$\text{Tempo: } v(s) = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v(s)} \Rightarrow \int dt = \int \frac{ds}{v(s)}$$

$$t = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{v(s)}$$

Expressões intrínsecas da velocidade com

$\dot{s}(t) \equiv$  velocidade escalar

Acelerações

Para obter a expressão da aceleração

Caso 3: aceleração em função da velocidade

→ obtém-se  $s(v)$  e  $t$

$$a(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v \Rightarrow ds = \frac{v}{a(v)} dv$$

$$\int ds = \int_{v_0}^v \frac{v}{a(v)} dv \Rightarrow s = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{v}{a(v)} dv$$

$$\text{Tempo: } a(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)}$$

$$t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)}$$

Vamos derivar um relação ao tempo a velocidade intrínseca

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \vec{e}_u \Rightarrow \dot{\vec{v}}(t) = \dot{\dot{s}}(t) \vec{e}_u + \dot{s}(t) \dot{\vec{e}}_u$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\dot{s}}(t) \vec{e}_u + \dot{s}(t) \dot{\vec{e}}_u$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\dot{s}}(t) \vec{e}_u + \frac{\dot{s}(t)}{r(t)} \vec{n}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\dot{s}}(t) \vec{e}_u + \frac{\dot{s}(t)}{r(t)} \vec{n}$$

Expressões intrínsecas da aceleração onde

$$\vec{a}_t = \dot{\dot{s}}(t) \vec{e}_u, \dot{\dot{s}}(t) \text{ aceleração escalar}$$

$$\vec{a}_n = \frac{\dot{s}(t)^2}{r(t)} \vec{n}$$

INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES DA CINEMÁTICA ESCALAR NO PONTO MATERIAL

A aceleração é sempre a derivada em relação da velocidade. No entanto, há libbra

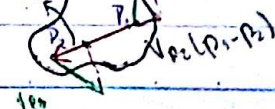
CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

1 Propriedade fundamental

Dado um C.R. e dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ ,

Oxyz um ref. inercial,  $\vec{v}_{P_1}$  e  $\vec{v}_{P_2}$  as veloci-

dades de  $P_1$  e  $P_2$ , tempo  $t$

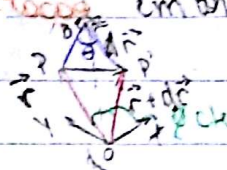


$\frac{d}{dt} \|(P_1 - P_2)\|^2 = cte \quad \vec{v}$

$2(P_1 - P_2) \cdot \left(\frac{d}{dt} (P_1 - P_2)\right) = 0 \Leftrightarrow (\vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_2}) \cdot (P_1 - P_2) = 0$   
 propriedade fundamental de

3. Velocidade angular e velocidade rotacionais

Superfície um CR em movimento rotacional em torno de um eixo fixo



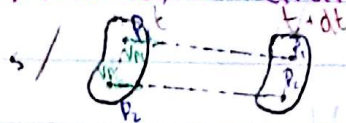
2. Movimentos contínuos de um CR

a) Translação quando uma reta de

um corpo permanecer SEMPRE paralelo  $\|AP\| = \|(P-B)\| \cdot \Delta\theta$ , com B = projeção de a uma dada direção, diz-se que o P sobre o eixo de rotação  
 corpo executa uma translação

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta t} = \|(P-B)\| \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \|(P-B)\| \omega$

1.1) Translação retilínea



$\omega \hat{=} \text{velocidade angular}$

Mas  $\|(P-B)\| = \|r\| \sin \theta \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \|r\| \sin \theta \omega$

Pode-se escrever  $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$  vetor rotação

$\|\vec{v}\| = \|r\| \|\vec{\omega}\| \sin \theta \quad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

1.2) Translação curvilínea



Ainda:  $\vec{v}_P = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \quad \vec{r} = (P-O)$

Portanto, como esperadas, a derivada de

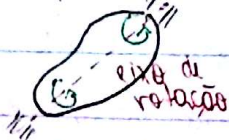
b) Rotações numa reta de um corpo um vetor de módulo constante é ORTOGO.

permanecer fixo em relação a um ref. INAL a este, no caso  $\dot{\vec{r}} \perp \vec{r}$

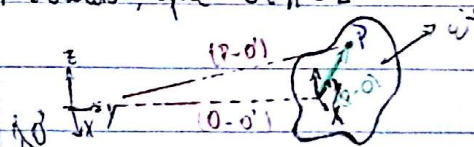
Inercial durante TODO o movimento, diz

4. Equações Fundamentais da cinemática do CR

se o corpo executa uma rotação. Seja  $Oxyz (O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  <sup>queridas</sup> relatadas ao CR e que executa um movimento qualquer com rotações instantânea  $\vec{\omega}$ . Seja  $O'x'y'z' (O', \hat{i}', \hat{j}', \hat{k}')$



c) Mov. em torno de um ponto fixo: numa inercial fixa. Imaginemos, no instante considerado, esse ponto fora parte do eixo de referência, que  $Oz \parallel O'z'$



d) Mov. plano: ocorre SEMPRE no mes.  $(P-O') = (O-O') + (P-O)$

no plano e NÃO pode ser caracterizado  $\frac{d}{dt} \vec{v}_P - \vec{v}_O = \vec{v}_O - \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

como de rotações ou translações. O Teorema de Chasles postula que um mov. plano  $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)$

Eq. fundamental da cin. dos sólidos é SEMPRE a soma de uma rotação e uma translação. "Fórmula de Poisson"

translação.

Vamos escrever  $\vec{r} = (P-O) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

5. Existência e unicidade do vetor rotação 6. Ato de movimentos de um CR

Suponha, no diagrama anterior, Oxyz e Def. Ato de movimentos de um CR é o Oxyz em qualquer orientação particular conjunto de velocidades de Torres os pontos que o compõem em um dado instante

$\vec{r} = (P-O) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Vimos que  $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_O - (x\hat{i} \wedge \vec{\omega} + y\hat{j} \wedge \vec{\omega} + z\hat{k} \wedge \vec{\omega})$

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge x\hat{i} + \vec{\omega} \wedge y\hat{j} + \vec{\omega} \wedge z\hat{k}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)$

• Dada análise dos atos de movimento,

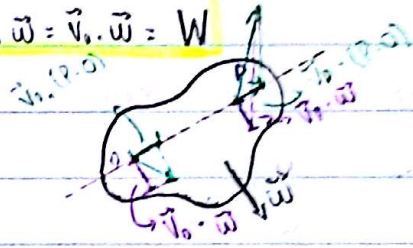
recorre-se à EFCS:

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)$

• Multiplicando-se a EFCS a  $\vec{\omega}$

$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} + [\vec{\omega} \wedge (P-O)] \cdot \vec{\omega}$

$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = W$



Demonstrações da existência

Suponha que existam  $\vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2, \vec{\Omega}_3$  vetores

rotações tais que

$\dot{\hat{i}} = \vec{\Omega}_1 \wedge \hat{i} \quad \dot{\hat{j}} = \vec{\Omega}_2 \wedge \hat{j} \quad \dot{\hat{k}} = \vec{\Omega}_3 \wedge \hat{k}$

$\vec{\Omega}_1 = p_1\hat{i} + q_1\hat{j} + r_1\hat{k} \quad \dot{\hat{i}} \cdot \hat{j} = -\hat{j} \cdot \dot{\hat{j}} \quad \text{Casos possíveis:}$

$\vec{\Omega}_2 = p_2\hat{i} + q_2\hat{j} + r_2\hat{k} \quad \dot{\hat{i}} \cdot \hat{k} = -\hat{i} \cdot \dot{\hat{k}} \quad 1) \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$

$\vec{\Omega}_3 = p_3\hat{i} + q_3\hat{j} + r_3\hat{k} \quad \dot{\hat{j}} \cdot \hat{k} = -\hat{j} \cdot \dot{\hat{k}} \quad 2) \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \neq 0$

$p_1 = p_2 = p_3 \quad q_1 = q_2 = q_3 \quad r_1 = r_2 = r_3$ , portanto  $\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$  com  $\vec{v}_O = 0$  e  $\vec{\omega} = 0$

$\vec{\Omega}_1 = \vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}_3 = \vec{\omega}$ , vetor rotação do CR

$\dot{\hat{i}} = \vec{\omega} \wedge \hat{i}$   
 $\dot{\hat{j}} = \vec{\omega} \wedge \hat{j}$   
 $\dot{\hat{k}} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}$

Formulas de Rodrigues

1. a) Ato de repouso instantâneo

1. o) Ato de movimentos em torno de um eixo instantâneo de rotação (EIR)

$\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$  com  $\vec{v}_O = 0$  e  $\vec{\omega} \neq 0$

1. c) Ato de movimentos instantâneos de translação

Demonstrações da unicidade

Suponha existirem para o mesmo CR  $\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$  com  $\vec{v}_O \neq 0$  e  $\vec{\omega} = 0$

no mesmo instante dois vetores rotação  $\vec{\omega}$  e  $\vec{\omega}'$

Então, pela EFCS

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)$

$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}' \wedge (P-O)$

$\vec{0} = (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \wedge (P-O) \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}'$

1. a)  $\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} = 0$  com  $\vec{v}_O \neq 0$  e  $\vec{\omega} \neq 0$

$\exists$  pontos para os quais  $\vec{v}_P = \vec{0}$

2)  $\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \neq 0 \Rightarrow \exists$  pontos para os quais a velocidade é mínima

1. d) e 2) Ato de movimento rototranslatório em torno de um eixo helicoidal instantâneo (EHI)

Caso particular: Ato de movimento de rotação em torno de um EIR

tilibra

RNE3100

Vamos obter a equação do CHI (e do EIR)

$$\frac{d(\hat{x})}{dt} \approx \vec{v}_p - \vec{v}_0 = \dot{x} \hat{i} + r \hat{j} \approx \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{r}}{\omega \hat{r} \wedge \hat{i}}$$

No caso do CHI,  $\exists$  pontos P para os quais

$$\vec{v}_p - \vec{v}_0 + r \omega \hat{k} \wedge \hat{i} \approx \vec{v}_p - \vec{v}_0 + r \omega \hat{j} \quad (III)$$

$v_p$  é mínimo. Nesses pontos  $\vec{v}_p \parallel \vec{\omega}, \vec{v}_p \perp h \vec{\omega}$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + r (\dot{\omega} \hat{j} + \omega \hat{k}) \quad \omega (\hat{\omega} \wedge \hat{j})$$

$h \in \mathbb{R}$  e  $[h]$ : [metro]

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + r \dot{\omega} \hat{j} + r \omega (\omega \hat{k} \wedge \hat{j})$$

em  $\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O)$  faz-se

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + r \dot{\omega} \hat{j} - r \omega^2 \hat{i} \quad (IV) \text{ ao tangencial ac normal}$$

$h \vec{\omega} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O) \Rightarrow h \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} + [\vec{\omega} \wedge (P-O)] \cdot \vec{\omega}$

$$h = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|^2} \quad \vec{v}_p = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|^2} \cdot \vec{\omega} \quad h = \text{projeção da hélice}$$

9. Centro Instantâneo de Rotação (CIR)

Se o movimento é plano, vale sempre:

$$(P-O) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0}{\|\vec{\omega}\|^2} + \lambda \vec{\omega} \quad \text{Equação do CHI}$$

$$\vec{v}_p \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\omega} = 0$$

Dessa forma, há instantaneamente pontos

Para o EIR, basta fazer  $\vec{v}_p = 0$  e o resultado é idêntico, pois  $h \vec{\omega} = 0$

para os quais a velocidade é ZERO. Esses pontos estão sobre o EIR. Seja CIR esse

7. Campo de acelerações no movimento geral

$$\text{pontos, } \vec{v}_p = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \wedge (P-CIR)$$

Para  $\forall$  CIR vale que  $\vec{v}_p = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O)$  (EIRS)



$$\dot{\vec{v}}_p = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(P-O)$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_p - \vec{v}_0) = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O)$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]$$

com os de acelerações de um corpo rígido

Métodos para obtenção do CIR

1) Conhecidos  $\vec{v}_0$  e  $\vec{\omega}$ , basta fazer  $(CIR-O) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0}{\|\vec{\omega}\|^2}$

O CIR é o traço do EIR sobre o plano

8. Campo de acelerações no movimento plano de movimentos

Vimos que o campo de acelerações do CIR é 2) Conhecidas as velocidades de dois pontos

$$\vec{a}_p = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)] \quad (II)$$

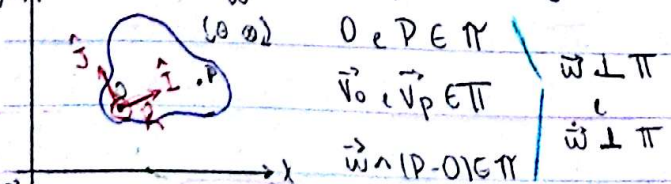
NÃO sobre a mesma perpendicular,

Suponha, agora, que o CIR execute um movimento que é SEMPRE paralelo a um



plano, por exemplo, Oxy no diagrama:

3) Conhecidas as velocidades de dois pontos

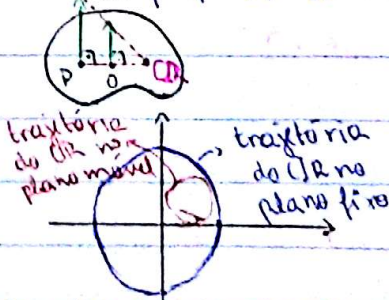


sobre a mesma perpendicular

Estabelecamos um sist. de coordenadas Oxyz

Exemplo

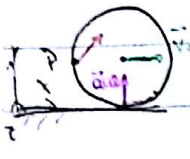
solidário ao CIR, seja



$$(P-O) = r \hat{i}, \quad r = \|(P-O)\| \quad (*)$$

**Aceleração de CR** - Dado em relação aos movimentos de P observada por um observador em S' supondo-se P rigidamente vinculado a S. Para todos os efeitos, (sem escorregamento) plano horizontal

(a)  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{CR} + \vec{\omega} \wedge (P-O)$

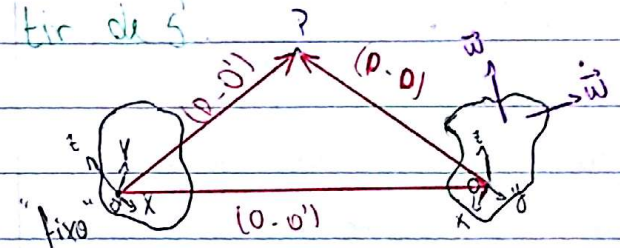


$\vec{v}_0 = (-\omega \hat{k}) \wedge (R \hat{j}) = \omega R \hat{i}$   
 $\vec{v}_P = \vec{v}_{CR} + (-\omega \hat{k}) \wedge (P-O)$   
 $\vec{v}_P = \vec{0} + \omega R (\hat{i} + \hat{j})$

via o movimento de um ponto de S que ocupasse instantaneamente a mesma posição de P.

**Acelerações**  $\vec{a}_P = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-O))$  \* Movimentos absolutos de P - movimento de P observado diretamente a partir de S

$\vec{a}_0 = \vec{a}_{CR} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (O-CR) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O-CR)]$   
 $\vec{0} = \vec{a}_{CR} + (-\omega \hat{k}) \wedge (\omega R \hat{i}) \Rightarrow \vec{a}_{CR} = \omega^2 R \hat{j}$



(b)  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$   $\vec{\omega} \approx \omega \hat{k}$   
 $\vec{a}_0 = \vec{a}_{CR} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (O-CR) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (O-CR)]$   
 $\vec{v}_{CR} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (CR-O) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge R(\cos\theta \hat{i} - \sin\theta \hat{j})$   
 Derivando a eq. e desenvolvendo  
 $\vec{a}_{CR} = \vec{a}_0 + \dot{\omega} k (-\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) + \omega^2 R (\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j})$   
 Levando  $\theta \rightarrow 0$   
 $\vec{a}_{CR} = \vec{a}_0 - \omega R \hat{i} + \omega^2 R \hat{j}$   
 $= \vec{0}$ , pois NÃO há escorregamento

**Obs importante:** Qualquer vetor pode ser escrito com componentes em qualquer sist. de coord. Porém, sua VARIAÇÃO deve ser obtida em relação ao sist. de coord. ar. iniciais e referenciais inerciais

**10. Composição de movimentos**

**1) Composição de velocidades**

Def.: dados dois CRs S' e S e um ponto P (P-O') = (O-O') + (P-O) obtemos variáveis material P NÃO rigidamente vinculado a nenhum dos CRs; dados dois sistemas de coordenadas O'xyz solidário a S' e Oxyz solidário a S; dados os vetores  $\vec{\omega}(t)$  e  $\vec{v}_P$  instantâneos de S e admitindo-se que S' está em repouso em relação a um rd. inercial definem-se:

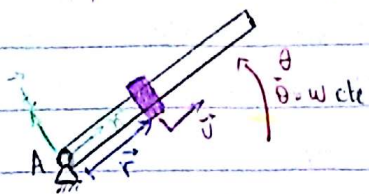
$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}})$  (II)  
 $\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O) + (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}})$   
 $\vec{v}_{P,ABS} = \vec{v}_{P,ABS,ST} + \vec{v}_{P,REL}$  Lei de composição das velocidades

**2) Composição de acelerações**

$\vec{a}_P = \frac{d(\text{II})}{dt} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] + \vec{\omega} \wedge [x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}}] + \dot{\omega} [x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}}] + (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) \cdot (x\dot{\hat{i}} + y\dot{\hat{j}} + z\dot{\hat{k}})$   
 \* Movimentos relativo de P - movimento que P possui quando observado por um observador solidário a S.  
 $\vec{a}_P = \vec{a}_{e,abs} + \vec{a}_{p,rel} + \vec{a}_{p,c}$   $\vec{a}_{p,c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{p,rel}$

\* Movimentos de arrastamento de P.  $\vec{a}_{p,c} \triangleq$  aceleração complementar de Coriolis

**Ilustração da aceleração de Coriolis**



$\vec{v} = v \hat{n}$  cte  
 Anel sólido AB  
 $AB \sim \vec{\omega} = \omega \hat{k}$  cte

$\vec{v}_{P/S}$  e  $\vec{v}_{Q/S}$  as velocidades absolutas de P e Q (em relação a S)

$\vec{\omega} \sim$  rotações de  $\Sigma$  em relação a  $Oxyz$  e  $S$

Supondo-se o anel rigidamente ligado à barra teríamos:



$\vec{v}_a \sim$  rotações do arrastamento de S em relação a  $Oxyz$  e S

$\vec{v}_p = \vec{v}_{p,r} + \vec{v}_{p,a}$        $\vec{v}_a = \vec{v}_{a,r} + \vec{v}_{a,a}$

$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a$

$\|\dot{\vec{v}}\| = \|\ddot{\vec{v}}\| \Delta t$        $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{v}\|}{\Delta t} = \|\ddot{\vec{v}}\| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta t} = \|\ddot{\vec{v}}\|$

↳ rotações absoluta

$\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\vec{\omega}}_a + \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a \wedge \vec{\omega}_r$

supondo-se agora que o anel desliza sobre a barra e é visto a partir do observador que se move com a barra

$\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\vec{\omega}}_a + \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a \wedge \vec{\omega}_r$



**Dinâmica**

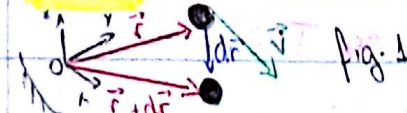
**1. Leis da Mecânica**

- Lei da inércia (Galileo, Newton)
- Lei fundamental da dinâmica

$\|\ddot{\vec{v}}_p - \ddot{\vec{v}}_p'\| = \dot{\theta} \|\vec{r}' - \vec{r}\| - \dot{\theta} \|\vec{r}'\| = \dot{\theta} \|\vec{r}\|$

$\vec{Q} \triangleq m \dot{\vec{v}}$       quantidade de movimento

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{v}' - \Delta \vec{v}\|}{\Delta t} = \dot{\theta} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dot{\theta} \|\vec{v}\|$



$\|\dot{\vec{a}}_r - \dot{\vec{a}}_r'\| = 2 \omega \|\vec{v}\|$

$\dot{\vec{Q}} = \frac{d}{dt}(m \dot{\vec{v}}) = m \frac{d \dot{\vec{v}}}{dt} = m \ddot{\vec{a}}$        $\dot{\vec{\Omega}} = m \ddot{\vec{a}} = \vec{R}$

**11) Composição de movimentos para um CR**



$\vec{R}$ : resultante de TODAS as forças que agem no corpo

Def:  $\vec{v}_{p,r} \sim$  velocidade de P e  $\Sigma$  em relação a  $Oxyz$  sólido a S

**3ª Lei: Princípio da ação e reação**

$\vec{v}_{p,a} \sim$  velocidade de Q e  $\Sigma$  em relação a  $Oxyz$  sólido a S

**2. Teoremas gerais**

Considerando a fig. 1, temos:

$\vec{v}_{p,a} \sim$  velocidade de arrastamento de P e  $\Sigma$ , supondo-se P e S em relação a  $Oxyz$

Teorema da variação da quantidade de movimento:  $\dot{\vec{Q}} = \frac{d \vec{Q}}{dt} = \vec{R} \Rightarrow d \vec{Q} = \vec{R} dt$

$\vec{v}_{q,a} \sim$  velocidade de arrastamento de Q e  $\Sigma$ , supondo-se Q e S em relação a  $Oxyz$

$\int_{t_0}^t \dot{\vec{Q}} dt = \int_{t_0}^t \vec{R} dt$   
 $\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{R}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dt$

PREÇO

Def: impulso da resultante

$$\vec{I}_{(t)} \triangleq \int_{t_0}^t \vec{R}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dt$$

$$\vec{H}_0 = (\vec{p}_0 - 0) \wedge m\vec{v}_0$$

quantidade de movimento angular

$$\vec{H}_0 = (\vec{v}_0 - \vec{v}_0) \wedge m\vec{v}_0 + (\vec{p}_0 - 0) \wedge m\vec{a}_0$$

Teorema da Energia Cinética (TEC)

$$\vec{H}_0 = m\vec{v}_0 \wedge \vec{v}_0 + \vec{M}_0 \Rightarrow \vec{H}_0 - m\vec{v}_0 \wedge \vec{v}_0 = \vec{M}_0$$

(TOMA)

Def: trabalho da resultante entre 2 inst.

Entre 0 sup. um reb. fixo ou  $\vec{v}_0 \parallel \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{H}_0 = \vec{M}_0$

antes

$$\vec{G}_{(t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v}$$

$$\vec{G}_{(t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\vec{G}_{(t_2)} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Integral da Energia

Def: força conservativa: uma força é dita conservativa se é possível admitir previamente que esta depende APENAS

Define-se T = energia cinética da partícula

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\therefore \vec{G}_{(t_2)} = T(t_2) - T(t_1)$$

(TEC)

Considerando-se que  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , temos:

$$\vec{G}_{(t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R} \cdot \vec{v} dt$$

Def: define-se energia potencial a função escalar  $\sim$  constante

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + C$$

$\vec{r}$ : posição arbitraria de referência que permite o cálculo de C

Calculamos o trabalho de uma força

Def: potência instantânea de uma força conservativa entre 2 instantes:

$$W(t) = \frac{d\vec{G}_{(t_2)}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \vec{R} \cdot \vec{v} dt \right]$$

$$W(t) = \vec{R} \cdot \vec{v}$$

Calculamos o trabalho de uma força conservativa entre 2 instantes:

$$\vec{G}_{(t_2)} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

sem base na def. acima:

$$\vec{G}_{(t_2)} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\vec{G}_{(t_2)} = U(\vec{r}) - (-U(\vec{r}_0)) = U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -\Delta U$$

Consequências da TEC

• se, entre 2 instantes, o trabalho da resultante for NULO, a energia cinética se conserva

• se, entre 2 instantes, as velocidades escalares nos dois instantes são idênticas

• caso a resultante e a velocidade vetorial sejam ortogonais, o trabalho da resultante é nulo

Finalmente, a integral da energia pode ser obtida:

$$\text{Pelo TEC } \vec{G}_{(t_2)} = T(t_2) - T(t_1) \text{ e } \vec{G}_{(t_2)} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow T(t_2) + U(\vec{r}_1) = T(t_1) + U(\vec{r}_2) \triangleq E$$

integral da energia

$E$  = energia mecânica total: constante

Exemplos clássicos de forças conservativas

1) Peso

Definindo a energia potencial arbitrariamente ( $p/\vec{r} = 0$ )

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (0,0,0)$$

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$U(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{p} d\vec{r} = - \int_0^{\vec{r}} -mg\hat{k} d\vec{r}$$

$$U(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} mg dz$$

$$\vec{G}_{(t_2)} = -\Delta U = U(z_2) - U(z_1)$$

$$\vec{G}_{(t_2)} = mg(z_2 - z_1)$$

Teorema da quantidade de movimento angular (TONA) ou Teorema do Momento angular (TMA)

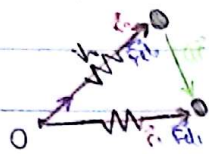
Def: momento da quantidade de movimento

tilibra



PMF 3100

**1.2 Força elástica**



$$\vec{F}_d = -k(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\vec{F}_d = -k(r - r_0)\vec{u}$$

$$d\vec{r} = dr\vec{u} + r d\vec{u}$$

$\vec{u}$  = versor da direção (P-O)

$$U_{(r, \vec{u})} = \int_{r_0}^r -k(r-r_0)\vec{u} \cdot (dr\vec{u} + r d\vec{u})$$

$$\vec{r} = r\vec{u}$$

$$U_{(r, \vec{u})} = -\int_{r_0}^r k(r-r_0) dr$$

$$U_{(r, \vec{u})} = \int_{r_0}^r \vec{F}_d d\vec{r}$$

$$U_{(r, \vec{u})} = -\frac{k}{2}(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 \Big|_{r_0}^r = \frac{k}{2}(r_0 - r)^2 - \frac{k}{2}(r - r_0)^2$$

Da equações (1) e das equações (2), resultam 3 equações escalares, a saber:

$$\vec{O}: F_{AO} + F_{RO} = m\ddot{s}$$

$$\vec{n}: F_{An} + F_{Rn} = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$\vec{b}: F_{Ab} + F_{Rb} = 0$$

**Problemas básicos em dinâmica do PM**

$$\vec{F}_a(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \vec{F}_r(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\ddot{\vec{r}}(t)$$

Forças ativas      Forças reativas

Definindo-se a **energia potencial elástica**:

$$U_{(r)} = -\int_{r_0}^r k(r-r_0) dr$$

$$U_{(r, \vec{u})} = U(r) - U(r_0)$$

A eq. diferencial acima, de difícil solução no caso geral, admite soluções mais simples em casos particulares. Lembrando

de que se tratam de eqs. vetoriais, a solução pode ser obtida para cada componente. Portanto, sem perda de generalidade no

**3. Movimento vinculado**

**Movimento livre:** ocorre quando a partícula sofre APENAS a ação de forças ativas

3 casos particulares unidimensionais

**Movimento vinculado:** resulta da imposição das forças reativas (ou vinculadas), responsáveis pela limitação de movimentos

(1)  $F = F(t)$  excitar em O,

Lembrando-nos do movimento com relação a um parâmetro, vimos que, numa

$$m\ddot{x}(t) = F(t) \quad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt$$

curva de Frenet:

$$m\frac{dv}{dt} = F(t) \quad \int dx = \int_{t_0}^t v(t) dt$$

$$\vec{a} = \dot{s}\vec{e} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\int v dv = \frac{1}{m} \int F(t) dt \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Supondo a partícula de massa m e densidade

$$v(t) = v_0(t) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt$$

considerando forças ativas como  $\vec{F}_a$  e forças reativas como  $\vec{F}_r$ , podemos escrever a

$$m\frac{dv}{dt} = F(v) \Rightarrow dt = \frac{m}{F(v)} dv$$

**2ª Lei de Newton:**

$$\vec{F}_a + \vec{F}_r = m\vec{a} = m(\dot{s}\vec{e} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}) \quad (1), \text{ vale ainda:}$$

$$\left. \begin{aligned} F_{AO} &= \vec{F}_a \cdot \vec{e}; & F_{RO} &= \vec{F}_r \cdot \vec{e} \\ F_{An} &= \vec{F}_a \cdot \vec{n}; & F_{Rn} &= \vec{F}_r \cdot \vec{n} \\ F_{Ab} &= \vec{F}_a \cdot \vec{b}; & F_{Rb} &= \vec{F}_r \cdot \vec{b} \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\int_{t_0}^t dt = m \int_{v_0}^v \frac{1}{F(v)} dv \quad dx = \frac{m v dv}{F(v)}$$

tempo decorrido p/ que a partícula varie sua velocidade de  $v_0$  a  $v$ .  
(Lei horária)

(3)  $F = F(x(t))$   
 $m \frac{dv}{dt} = F(x)$   
 $m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = F(x)$   
 $m dv \cdot v = F(x) dx$   
 $\int v dv = \frac{1}{m} \int F(x) dx$

$v(t) = v_0(t_0) + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx$   
 (velocidades)

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{\dot{x}} = dt$   
 $\int_{t_0}^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\dot{x}}$   
 $t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{1}{v(x)} dx$

pois ser desmembrada em componentes  
consequência: conservação da quantidade de movimento  
 $P = m \vec{v}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{v}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} \vec{v}_i$   
 se  $\vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_0 = \text{constante}$

DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

Hipótese básica: corpos rígidos não conjugados infinitas de partículas que obedecem a

o centro de massa em equilíbrio ou em MRU em relação a um ref. inercial

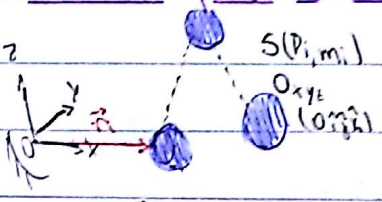
DISTRIBUIÇÃO DE MASSA

Lei fundamental da cinemática ( $\vec{v}_p \cdot (p-O) = \vec{v}_0 \cdot (p-O)$ )  
 consequência do vínculo de CR,  $\|(p-O)\| = \text{cte}$

Momentos e produtos de inércia

1. Momento polar de inércia

1. Teorema da resultante (Teorema do movimento do baricentro  $\approx$  TMB)



Seja um sistema  $S(P_i, m_i)$  e um ref.

inercial cuja base associada é  $Oxyz$ . con. Def.:  $I_0 \triangleq \sum_{i=1}^n m_i \|(P_i - O)\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$

$I_0 \triangleq \sum_{i=1}^n m_i \|(P_i - O)\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$

sendo  $\vec{F}_i$  a resultante de TODAS as forças externas ao sistema aplicadas à partícula  $i$

Em coordenadas cartesianas:

$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$

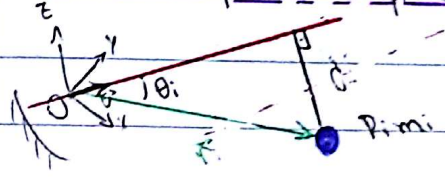
cuja  $i$  e  $\vec{F}_i$  a resultante de TODAS as forças aplicadas à partícula  $i$

Para um CR contínuo:  $I_0 \triangleq \int_{\text{volume}} \|\vec{r}\|^2 dm$

sendo aplicadas à partícula  $i$  pela partícula  $j$  (ambas internas ao sistema  $S$ )

2. Momento de inércia em relação a um eixo  $O\vec{u}$  (polo  $O$  e definida pelo versor  $\vec{u}$ )

Pelas 2ª e 3ª leis de Newton, temos  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \Rightarrow \vec{R}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$  (1)



Def.  $I_u = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$   $\approx$  distância entre  $P_i$  e o eixo  $O\vec{u}$

$\| (P_i - O) \wedge \vec{u} \| = \| (P_i - O) \| \sin \theta_i = d_i$

Da definição de centro de massa de um sistema de partículas vem:

Para uma direção definida por seus versores nos diretores

$m(\vec{G} - \vec{O}) = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - \vec{O})$

$\vec{u} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$

$\frac{d}{dt} m(\vec{v}_0 - \vec{v}_0) = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0)$

$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} - v_z \hat{k}$

$\frac{d}{dt} m \vec{v}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$  (2)

$I_u = \sum_{i=1}^n m_i \|(P_i - O) \wedge \vec{u}\|^2$

Logo, quando (1) e (2) conclui-se que  $\vec{R}^{\text{ext}} = m \vec{a}_0$  Teorema da resultante

Esta é uma eq. vetorial e, portanto, tilibra

Casos notáveis

a)  $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow O_u = O_x$

$$I_u = \sum_{i=1}^n m_i \|(x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}) \wedge \hat{i}\|^2$$

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

b)  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0, \gamma = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow O_u = O_y$

$$I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

c)  $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0 \rightsquigarrow O_u = O_z$

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Propriedade:  $I_x + I_y + I_z = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2 + x_i^2 + z_i^2 + x_i^2 + y_i^2)$

$I_x + I_y + I_z = 2I_o$  Trço da matriz de inércia

3. Eixos principais de inércia

A matriz de inércia é real e simétrica

$I_o$  é diagonalizável. Os valores da diagonal de  $I_o = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$  são os autovalores de  $I_o$  e as

direções  $O_x, O_y, O_z$  são dadas pelos autovetores de  $I_o$

Se os eixos principais passarem pelo centro de massa serão chamados de eixos un-

triais de inércia

Propriedades

↳ Simetria: produtos de inércia são nulos

↳ Composição: momentos e produtos de inércia

A soma dos momentos de inércia de três eixos ortogonais entre si por um polo é constante. Vamos determinar a memencia

de inércia de um sistema  $S(k, m_i)$  em 4. Translação de eixos (parâmetros e relação a um eixo genérica  $O_u$  dada por dados de inércia)

Novos eixos diretores:

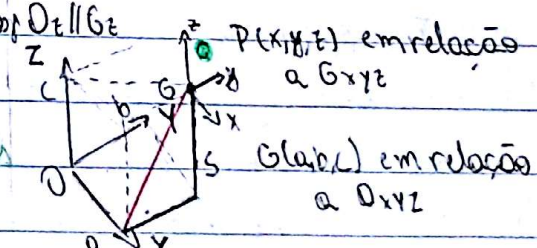
$$I_u = \sum_{i=1}^n m_i \|(x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}) \wedge (c \cos \alpha \hat{i} + c \cos \beta \hat{j} + c \cos \gamma \hat{k})\|^2$$

$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$x_i$	$y_i$	$z_i$
$c \cos \alpha$	$c \cos \beta$	$c \cos \gamma$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma + 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2I_{zx} \cos \alpha \cos \gamma$$

Seja  $S$  um CR e  $G_{xyz}$  um conjunto de eixos ortogonais por  $G$ . Seja  $O_{xyz}$  um outro sistema triortonormal com  $O_x \parallel O_x, O_y \parallel O_y, O_z \parallel O_z$

Seja  $O_{xyz}$  um outro sistema triortonormal com  $O_x \parallel O_x, O_y \parallel O_y, O_z \parallel O_z$



Produtos de inércia

Podemos representar momentos e produtos de inércia em uma matriz de inércia,

fazendo  $[u]^t = [c \cos \alpha \ c \cos \beta \ c \cos \gamma]$ , fica

$$I_u = [u]^t [I_o] [u], \quad I_o = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Suponha conhecidos os momentos e produtos de inércia de  $S$  em relação a  $G_{xyz}$

Vamos obtê-los em relação a  $O_{xyz}$ , temos:

$I_{xy} = I_{yx} \triangleq \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$

$I_{yz} = I_{zy} \triangleq \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$

$I_{zx} = I_{xz} \triangleq \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$

$I_x = \int_{\text{volume}} (y^2 + z^2) dm, \quad y = y + b, \quad z = z + c$  (constantes)

$I_x = \int_{\text{volume}} (y^2 + z^2) dm + \int_{\text{volume}} (b^2 + c^2) dm + 2b \int_{\text{volume}} y dm + 2c \int_{\text{volume}} z dm$

$I_x = I_{x_0} + m(b^2 + c^2)$

$I_x = I_{x_0} + m d_x^2, \quad I_z = I_{z_0} + m d_z^2$

$I_y = I_{y_0} + m d_y^2$  Teorema de Steiner

Para os produtos de inércia

$$I_{xy} = \int x y d m = \int (x+a)(y+b) d m = \int x y d m + \int a b d m$$

$$I_{xy} = I_{xy0} + m \cdot a \cdot b$$

$$I_{xz} = I_{xz0} + m \cdot a \cdot c$$

$$I_{yz} = I_{yz0} + m \cdot b \cdot c$$

ponto de vista de um observador e  $O'xyz$

$$\vec{H}_0 = m(\vec{v}_0 - \vec{v}_0) \wedge \vec{v}_0 + m(G-O) \wedge \vec{a}_0 \quad (3)$$

$$+ [i, j, k] [I_0] \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + [i, j, k] [I_0] \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{H}_0 = m\vec{v}_0 \wedge \vec{v}_0 + m(G-O) \wedge \vec{a}_0 + \vec{\omega} \wedge [i, j, k] [I_0] \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + [i, j, k] [I_0] \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix}$$

QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR E TEO.

$$\vec{H}_0 = m\vec{v}_0 \wedge \vec{v}_0 = m(G-O) \wedge \vec{a}_0 + \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega})$$

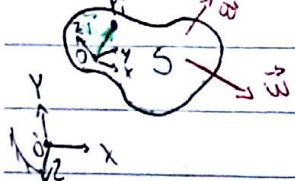
TEMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO ANGULAR

$$\vec{M}_0^E = m(G-O) \wedge \vec{a}_0 + \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega}) \quad \text{TAMA ou TMA} \quad (4)$$

Dado um C.R.  $S, (P_i, m_i) \in S, Oxyz$  e  $O'xyz$  eixos particulares da TAMA

dado a  $S, O'xyz$  fixo,  $\vec{\omega}(t), \dot{\vec{\omega}}(t)$  conhecidos

$$1) G \equiv O \Rightarrow \vec{M}_0^E = \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega}) \quad e, \text{ por (3)} \quad \vec{H}_0 = \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega})$$



$$\vec{r}_i = (P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \quad \therefore \vec{M}_0^E = \vec{H}_0 = \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega})$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_x \hat{i} + \dot{\omega}_y \hat{j} + \dot{\omega}_z \hat{k}$$

Consequência: se  $\vec{M}_0^E = \vec{0} \Rightarrow$  NÃO há variação na quant. de mov. angular  $\Rightarrow \vec{H}_0 = cte$

Def.: Quantidade de mov. angular de  $S$  em: NENHUM sistema de forças cujo momen. relação a um polo  $O \in S$

$$\vec{H}_0 \triangleq \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \quad (\text{EFCS})$$

$$\vec{H}_0 = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \wedge m_i (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)) \quad \Sigma 2$$

$$\vec{H}_0 = m(G-O) \wedge \vec{v}_0 + \left( \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O) \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - O)) \right)$$

Vamos resolver  $\Sigma 2$  por partes

$$\vec{\omega} \wedge (P_i - O) = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \hat{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \hat{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \hat{k}$$

$$(P_i - O) \wedge (\vec{\omega} \wedge (P_i - O)) = (x_i^2 \omega_z - x_i z_i \omega_x) \hat{k} + (-x_i y_i \omega_x + x_i^2 \omega_y) \hat{j} + (-y_i z_i \omega_y + y_i^2 \omega_z) \hat{k} + (y_i^2 \omega_x - x_i y_i \omega_y) \hat{i} + (z_i^2 \omega_y - y_i z_i \omega_z) \hat{j} + (-x_i z_i \omega_z + z_i^2 \omega_x) \hat{i}$$

$$\Sigma 2 = [i, j, k] \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{H}_0 = m(G-O) \wedge \vec{v}_0 + I_0(\vec{\omega}) \quad (2)$$

to em relação ao CM seja NULO é capaz de modificar sua equat. de mov. angular

2) Ato de mov. instantâneo de rotações

$$G \neq O \Rightarrow \vec{M}_0^E = m(G-O) \wedge \vec{a}_0 = \vec{0}$$

$$G = O \Rightarrow \vec{M}_0^E = \vec{0} = \vec{H}_0 = \vec{0}$$

$$3) O \equiv G \Rightarrow \vec{H}_0 = \vec{M}_0^E = \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega})$$

4) Movimento plano, supondo plano  $Oxy$

$$\vec{M}_0^E = m(G-O) \wedge \vec{a}_0 + \frac{d}{dt} [i, j, k] [I_0] \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{M}_0^E = m(G-O) \wedge \frac{d}{dt} [-I_{xz} \omega_z \hat{i} - I_{yz} \omega_z \hat{j} + I_x \omega_z \hat{k}]$$

$$\vec{M}_0^E = m(G-O) \wedge \vec{a}_0 + [-I_{xz} \dot{\omega}_z \hat{i} + I_{yz} \dot{\omega}_z \hat{j} + I_x \dot{\omega}_z \hat{k}] + \dot{\omega}_z [-I_{xz} \hat{i} - I_{yz} \hat{j} + I_x \hat{k}]$$

Supondo  $O \equiv G$  e  $G, xyz$  eixos principais de inércia  $\sim \vec{M}_0^E = I_z \dot{\omega}_z \hat{k} \quad (T = I_d)$

Equações de Euler

Para chegarmos no Teorema da Quanti. Suponha a equações (4) com  $O \equiv G$  e dado de movimento angular vamos derivar eixos principais de inércia

$$\text{por (2)} \quad \text{em relação ao tempo. a partir de } \vec{M}_0^E = \frac{d}{dt} (I_0 \vec{\omega}) = \vec{\omega} \wedge \vec{H}_0 + [i, j, k] [I_0] \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix}$$

tilibra

PME-3100

Euler demonstrou que:

$$\hat{i}: I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = M_{Gx}^E = H_{Gx}$$

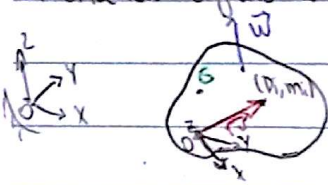
$$\hat{j}: I_y \dot{\omega}_y - (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = M_{Gy}^E = H_{Gy}$$

$$\hat{k}: I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y = M_{Gz}^E = H_{Gz}$$

ENERGIA CINÉTICA DE UM C.D.

Dado um CR S,  $(P_i, m_i) \in S$  e  $Oxyz$ , sistema de coordenadas solidário a S. Dado o ato  $T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{v}}\|^2 + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [I_0] [\boldsymbol{\omega}]$

de movimento de S e  $O'xyz$ , sistema de coordenadas ligado a um ref. inercial  $T = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [I_0] [\boldsymbol{\omega}]$



Vamos obter a energia cinética de S. Supondo o mov. no plano  $Oxy \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}} = \omega_z \hat{k}$

Pela definições:  $T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{v}}\|^2 + m \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot [\omega_z \hat{k} - (G-O)] + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\dot{\mathbf{v}}_i\|^2, \text{ Pela EPCS: } \dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O) \text{ de } O=G \text{ e fixo: } T = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}, (P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\|\dot{\mathbf{v}}_i\|^2 + 2 \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O)] + \|\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O)\|^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{v}}_0\|^2 + m \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (G-O)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O)\|^2$$

Vamos desenvolver  $\|\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O)\|^2$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O) = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \hat{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \hat{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \hat{k}$$

$$\|\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O)\|^2 = \omega_y^2 z_i^2 + \omega_z^2 y_i^2 + \omega_z^2 x_i^2 + \omega_x^2 z_i^2 + \omega_x^2 y_i^2 + \omega_y^2 x_i^2 - 2\omega_y \omega_z y_i z_i - 2\omega_x \omega_z x_i z_i - 2\omega_x \omega_y x_i y_i$$

$$\therefore \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (P_i - O)\|^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{v}}_0\|^2 + m \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot [\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (G-O)] + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [I_0] [\boldsymbol{\omega}]$$

Cases particulares:

(a) Ato de movimento de translação

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{v}}_0\|^2$$

(b) Ato de mov. de rot. em torno de um ponto fixo

$$T = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [I_0] [\boldsymbol{\omega}] \text{ use m: massa, } I_0 \text{ momento}$$

(c)  $O=G$

$$T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{v}}_0\|^2 + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [I_0] [\boldsymbol{\omega}]$$

(d)  $O=G$  e fixo

$$T = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}]^T [I_0] [\boldsymbol{\omega}]$$

(e) movimento plano:

Supondo o mov. no plano  $Oxy \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}} = \omega_z \hat{k}$

$$T = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{v}}_0\|^2 + m \dot{\mathbf{v}}_0 \cdot [\omega_z \hat{k} - (G-O)] + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

TEOREMA DA ENERGIA CINÉTICA PARA UM CR.

Vimos que, para uma partícula:

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt \quad (1)$$

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{E}_{\text{ext}, t_1}^F \quad (2)$$

Com  $\mathbf{R}$ , resultante das forças aplicadas no corpo. Suponha agora, um sistema de partículas

$(P_i, m_i)$ , cada uma sujeita a forças externas  $\vec{F}_i$  e forças internas  $\vec{F}_{ij}$

A energia cinética para o sistema é  $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{v}}_i\|^2 \quad (3)$

$$\text{de (1): } \dot{T} = \frac{d}{dt} \left( \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}} dt \right) = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d(3)}{dt} = \dot{T} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \frac{d\dot{\mathbf{v}}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \dot{\mathbf{a}}_i \Rightarrow \dot{T} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = W^E + W^I$$

$$\dot{T} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = W^E + W^I$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{T} dt = \int_{t_0}^{t_1} W^E dt + \int_{t_0}^{t_1} W^I dt$$

$$T(t_1) - T(t_0) = \mathcal{E}_{\text{ext}, t_1}^E + \mathcal{E}_{\text{int}, t_1}^I$$

Importante: o estado cinemático no instante define a energia cinética do corpo rígido INDEPENDENTEMENTE do polo adotado para o cálculo

sistema de partículas:

TEC para um sist. de part. a variação da energia cinética entre dois instantes é algebricamente idêntica ao trabalho das forças internas e externas entre esses dois instantes.

Casos particulares em que  $\vec{G} = 0$

(a) Corpos rígidos ( $P_i, P_j \in CR$ )

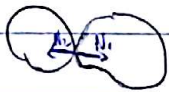
$$\|P_i - P_j\|^2 = cte \Rightarrow 2(P_i - P_j) \cdot d(P_i - P_j) = 0$$

$$(P_i - P_j) \cdot (dP_i - dP_j) = 0, \text{ como } P_i \neq P_j \Rightarrow$$

$$dP_i = dP_j$$

$$dG = \vec{F}_i \cdot dP_i + \vec{F}_j \cdot dP_j + \vec{F}_{ij} \cdot dP_i + \vec{F}_{ji} \cdot dP_j \Rightarrow \Delta T = G^{ext}$$

(b) Contatos entre corpos rígidos sem atrito



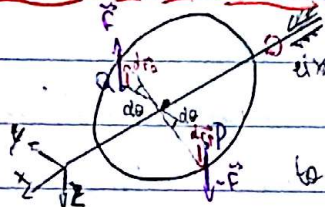
Como a velocidade no ponto de contato é perpendicular

$$\text{às reações normais, } \vec{N} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \vec{N} \cdot \vec{v} dt = 0$$

(c) Rolamento sem escorregamento ( $\epsilon = 0$ )

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}_{cont} dt = 0, \text{ pois } \vec{v}_{cont} = \vec{0}$$

### TRABALHO DE UM BINÁRIO



Suponha a CR ao lado móvel ao longo ( $\vec{F}, P$ ), ( $-\vec{F}, Q$ )

$$\text{tal que } \|P - O\| = \|Q - O\|$$

Calculamos o trabalho desse sistema de forças em deslocamentos elementares  $d\vec{r}$

$$dG = F \hat{k} \cdot dr \hat{k} + (-F \hat{k}) \cdot (dr \hat{k}) = 2F dr$$

$$dr = \|P - O\| d\theta \text{ fazemos } \|P - O\| = R$$

$$dG = 2FR d\theta \text{ momento do binário}$$

$$G_{\theta_0, \theta} = M(\theta - \theta_0) = M \Delta \theta \text{ trabalho do binário}$$

Pelo TEC, pl um CR girando em torno de um eixo fixo

$$T(t_1) - T(t_0) = \frac{1}{2} \omega_2 [I_0] \omega_2 = M \Delta \theta$$

$$\frac{1}{2} I \omega_2^2 = M \Delta \theta = G$$