Física II

MHS (Movimento Harmônico Simples)

Importância do MHS:

· Energia Potencial $V(r)$, $r \equiv$ posição medida em relação a uma referência

· Em $r = r_0$ o potencial tem um mínimo ⇝ ponto de equilíbrio estável ✓

· Série de Taylor para $r \simeq r_0$:

$$V(r) = V(r_0) + \frac{dV}{dr}(r-r_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dr^2}(r-r_0)^2 + \dots$$

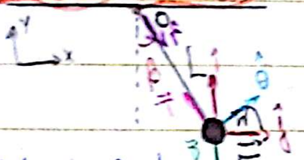
Nesse caso $\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$, $(r-r_0)^3, (r-r_0)^4 \ll (r-r_0)^2$

$$V(r) - V(r_0) \simeq \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0}(r-r_0)^2$$

· É análogo à constante elástica da mola: $k = \left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0}$

Exemplos Típicos:

Pêndulo Simples:



2ª Lei de Newton: $\vec{F}_R = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

coord. cartesianas: $\vec{r} = L\,\text{sen}\,\beta\,\hat{i} - L\cos\beta\,\hat{j} = L\hat{r}$

$\hat{r} = \text{sen}\,\beta\,\hat{i} - \cos\beta\,\hat{j}$ $\vec{v} = L\dot{\beta}\hat{\theta}$ coord. polares

$\vec{a} = L\ddot{\beta}\hat{\theta} - L\dot{\beta}^2\hat{r}$

Obtendo a força: $\vec{F}_r = \vec{T} + \vec{P}$, $\vec{T} = -T\hat{r}$

$\vec{P} = mg(\cos\beta\,\hat{r} - \text{sen}\,\beta\,\hat{\theta})$, então

$(-|\vec{T}| + mg\cos\beta)\hat{r} - mg\,\text{sen}\,\beta\,\hat{\theta} = m(L\ddot{\beta}\hat{\theta} - L\dot{\beta}^2\hat{r})$

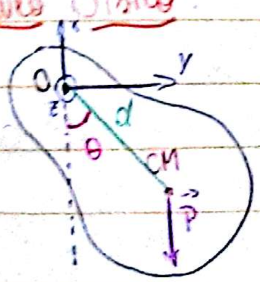
$\ddot{\beta} = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\beta$ (1) ⚠ NÃO descreve um MHS ⚠

$-|\vec{T}| + mg\cos\beta = -mL\dot{\beta}^2 L$ (2)

Para $\beta \ll 1$ ⇝ $\text{sen}\,\beta \simeq \beta$

Em (1) $\ddot{\beta} = -\frac{g}{L}\beta$ ⇝ MHS de $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Pêndulo Físico



· Giro em torno de um eixo fixo (eixo z)

$\tau_z = I_z\alpha_z$

$\vec{\tau}$ em relação a O: APENAS o peso realiza torque ⇒ $\vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{P,O} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$

$\vec{\tau}_O = [d\,\text{sen}\,\theta\,\hat{i} - d\cos\theta\,\hat{j}] \times (-mg\hat{j}) = -mgd\,\text{sen}\,\theta\,\hat{k}$

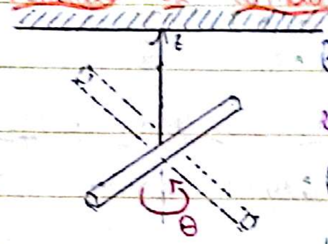
$\alpha_z = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ⇒ $-mgd\,\text{sen}\,\theta = I_z\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I_z}\,\text{sen}\,\theta$

Para $\theta \ll 1$ ⇝ $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$

$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I_z}\theta$ ⇝ MHS de $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}}$

Pêndulo de Torção



· Giro em torno do eixo z

· O fio exerce um torque restaurador

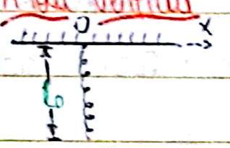
$\tau_z = -k\theta$ k ⇝ coeficiente de torção

$\tau_z = I_z\alpha_z = -k\theta$, mas como $\alpha_z = \ddot{\theta}$, então

$\ddot{\theta} = -\frac{k}{I_z}\theta$ ⇝ MHS de $\omega = \sqrt{\frac{k}{I_z}}$

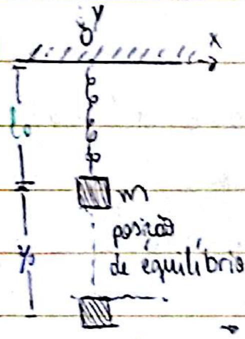
Mola Vertical

1)



l_0 ⇒ comprimento natural da mola

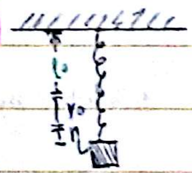
2)



$\vec{F}_R = \vec{0}$ $\vec{F}_R = -ky_0\hat{j} + mg\hat{j}$

$mg = ky_0 \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$

3)



$\vec{F}_R = -k(y_0 + \eta)\hat{j} + mg\hat{j} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\ddot{\eta}\hat{j}$

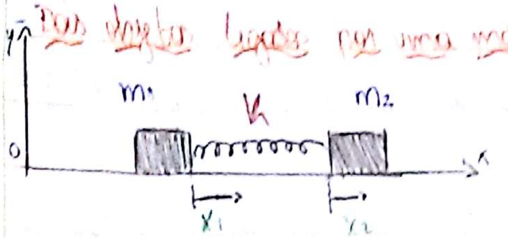
$\ddot{\eta} = -\frac{k}{m}(y_0 + \eta) + g$

Substituindo y_0:

$\ddot{\eta} = -\frac{k}{m}\eta$ ⇝ MHS de $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Scanned by CamScanner

Dois objetos ligados por uma mola



2ª lei de Newton p/ cada bloco

$\vec{F}_{R,1} = -kx_1\hat{i} + kx_2\hat{i} + \vec{N}_1 + \vec{P}_1 = m\vec{a}_1 = m\ddot{x}\hat{i}$

$\vec{F}_{R,2} = -kx_2\hat{i} + kx_1\hat{i} + \vec{N}_2 + \vec{P}_1 = m\vec{a}_2 = m\ddot{x}\hat{i}$

$m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$ (1) $\quad m_1(2) - m_2(1)$

$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$ (2) $\quad m_1m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -k(m_1 + m_2)(x_2 - x_1)$

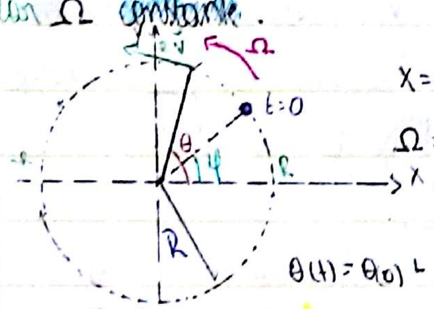
$x = x_2 - x_1 \sim$ posição relativa de 2 em relação a 1

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \sim$ massa reduzida

$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x \sim$ MHS de $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}}$

- Movimento circular uniforme e MHS

+ Partícula de massa m descreve um círculo de raio r e com velocidade angular Ω constante.



$x = R\cos\theta$

$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = cte$

Integrando

$\theta(t) = \theta(0) + \Omega t = \varphi + \Omega t$

$\boxed{x(t) = R\cos(\Omega t + \varphi)}$

Números Complexos:

$z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= re^{i\theta}$

- Aplicação no MHS $\sim \ddot{x} = -\omega^2 x$

(1) $z = x + iy$ $\left\{\begin{array}{l}\ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y\end{array}\right.$

(2) $\ddot{z} = -\omega^2 z$

Resolvemos (2): $z(t) = e^{pt}$ (3) e substituimos (3) em (2): $\ddot{z} = p^2 e^{pt} = p^2 z$

$p^2 z = -\omega^2 z \quad p^2 = -\omega^2 \quad p = \pm i\omega$

$z(t) = z_1 e^{i\omega t} + z_2 e^{-i\omega t} = A_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t} + A_2 e^{i\varphi_2} e^{-i\omega t}$

$z(t) = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{-i(\omega t - \varphi_2)}$

$x(t) = Re(z) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t - \varphi_2)$

$= (A_1\cos\varphi_1 - A_2\cos\varphi_2)\cos(\omega t) + (-A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin(\omega t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

$= A\cos(\omega t + \varphi)$

Oscilador Harmônico Amortecido

- Equação de MHS (sistema bloco-mola horizontal) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Força de resistência ao movimento:

- Proporcional à velocidade do objeto

Força dissipativa

- Equação do movimento (2ª lei de Newton)

$-m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}$

$\hookrightarrow \rho = cte > 0$

$-\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (1)

$\hookrightarrow \gamma = \frac{\rho}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \sim$ frequência angular natural

- Solução de (1)

- Testamos $x(t) = e^{pt}$

- Há de satisfazer (1)

$\dot{x} = pe^{pt} = px \qquad \ddot{x} = p^2 e^{pt} = p^2 x$

De (1) $\sim (p^2 + \gamma p + \omega_0^2)x = 0$, $\forall t$

$\Rightarrow p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$, 2 soluções:

$\boxed{p_+ = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}} \qquad \boxed{p_- = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}}$

- Amortecimento Subcrítico: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$

$\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$, então:

$p_+ = -\frac{\gamma}{2} + i\omega$, $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$

$p_- = -\frac{\gamma}{2} - i\omega$

$x(t) = C_+ e^{p_+ t} + C_- e^{p_- t}$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t})$ Eq. geral do movimento

Em geral,

$C_+ = A_1 e^{i\varphi_1}$, $C_- = A_2 e^{i\varphi_2}$

Scanned by CamScanner

Física II

- 4 parâmetros. A_1, A_2, φ_1 e φ_2
- Porém, pela equação diferencial, há somente 2 independentes
- $x(t)$ tem que ser real!

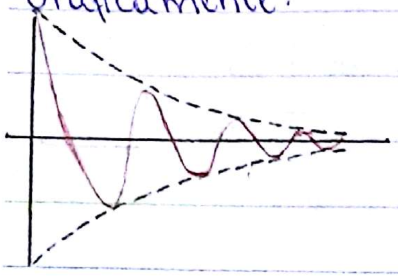
↳ C_+ e C_- são CONJUGADOS

$C_+ = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$ e $C_- = \frac{A}{2} e^{-i\varphi}$, assim:

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{A}{2} \left(e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)} \right)$

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} A \cos(\omega t + \varphi)}$$

Graficamente:



Energia mecânica do sistema bloco-mola

$E = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$

De (1) ⇝ $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\gamma = \frac{\rho}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{dE}{dt} = -m\dot{x}^2\gamma = \underbrace{\rho\dot{x}}_{\text{força}} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{\text{velocidade}}$ ⇝ Potência

- Expressão $E(t) = ?$

~~$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$, $x(t) =$~~

COMPLEXO!

~~$\dot{x}^2 = A^2 e^{-\gamma t} \left[\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma\omega}{2} \sin(2(\omega t + \varphi)) \right] = A^2 e^{-\gamma t} \cos^2(\omega t + \varphi)$~~

- Valor médio em um ciclo τ

$\langle E \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} E(t')\,dt' = \frac{m\langle \dot{x}^2 \rangle}{2} + \frac{k\langle x^2 \rangle}{2}$ (*)

- Consideramos o caso onde $\gamma \lll \omega_0$

$e^{-\gamma t} \simeq e^{-\gamma t}$, como

$\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$

$\langle \sin(2(\omega t + \varphi)) \rangle = 0$

Assim, $\langle \dot{x}^2 \rangle = A^2 e^{-\gamma t} \left[\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \omega^2 \frac{1}{2} \right]$

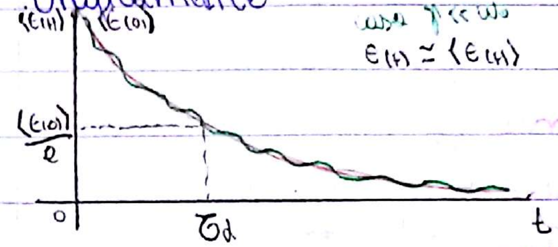
Como $\gamma \lll \omega_0$, $\omega^2 \simeq \omega_0^2$ e $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \lll \omega_0^2$

$\langle \dot{x}^2 \rangle = A^2 e^{-\gamma t} \cdot \frac{1}{2}\omega_0$ ⟺ $\langle x^2 \rangle = A^2 e^{-\gamma t} \cdot \frac{1}{2}$

$\langle E \rangle = \langle (*) \rangle = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{2} \omega_0^2 A^2 e^{-\gamma t} + \frac{1}{2} k \frac{1}{2} A^2 e^{-\gamma t}$

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{kA^2}{2} e^{-\gamma t}} \qquad \boxed{\langle E \rangle = \langle E(0) \rangle e^{-\gamma t}}$$

Graficamente



caso $\gamma \ll \omega_0$
$E(t) \simeq \langle E(t) \rangle$

Tempo de decaimento τ_d: $\boxed{\tau_d = \frac{1}{\gamma}}$

Também $\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\gamma \langle E(t) \rangle$

Energia dissipada em um ciclo τ

$\langle \Delta E \rangle = -\int_t^{t+\tau} \frac{d\langle E(t') \rangle}{dt'}\,dt' = \gamma \int_t^{t+\tau} \langle E(t') \rangle\,dt'$

$\langle \Delta E \rangle = -\langle E(0) \rangle e^{-\gamma t} \Big|_t^{t+\tau} = \langle E(0) \rangle e^{-\gamma t} \left[1 - e^{-\gamma\tau} \right]$

Como $\gamma \ll \omega_0$, tal que $\gamma\tau \ll 1$, $e^{-\gamma\tau} \simeq 1 - \gamma\tau$

$$\boxed{\langle \Delta E \rangle = \gamma\tau \langle E(0) \rangle e^{-\gamma t} = \gamma\tau \langle E(t) \rangle}$$ energia dissipada

- Fator de qualidade ou mérito

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{\langle E(t) \rangle}{\langle \Delta E \rangle}}$$ ↑Q ⇝ ↑ qualidade ⇝ ↓ perda de energia

$\frac{2\pi}{\gamma\tau} = \frac{\omega}{\gamma} \simeq \frac{\omega_0}{\gamma}$ se $\gamma \ll \omega_0$

Amortecimento supercrítico: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

$p_+ = -\frac{\gamma}{2} + \beta$, $\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$

$p_- = -\frac{\gamma}{2} - \beta$

$$\boxed{x(t) = a e^{p_+ t} + b e^{p_- t}} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{x(t) = a e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t} + b e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)t}}$$

↳ domina para t grandes

- SEM oscilações
- Volta à posição inicial

Amortecimento Crítico $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$

$p_1 = p_2 = -\frac{\gamma}{2}$

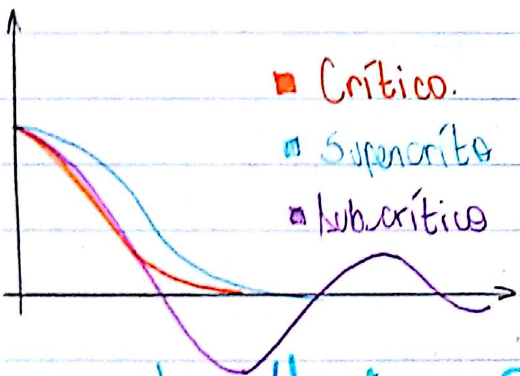
· Uma solução é $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

· Em geral:

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a+bt)$, a e b determinados pelas condições iniciais

Em suma:

* Subcrítico: $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$; $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$
* Supercrítico: $e^{-(\frac{\gamma}{2}-\beta)t}$, $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$
* Crítico: $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ ⤳ retorna ao equilíbrio sem oscilar e do jeito mais rápido possível



Oscilador Harmônico Forçado

· Temos uma força externa agindo no sistema bloco-mola.

$F(t) = F_0\cos(\omega t)$

· Caso mais simples:

$\delta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

· Equação do movimento:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0\cos(\omega t)}{m} \quad (1)$$

$\cos(\omega t) \rightsquigarrow e^{i\omega t}$

$x(t) \rightsquigarrow z(t) = x(t) + iy(t)$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \quad (2)$$

$\cos(\omega t) = Re(e^{i\omega t})$. $x(t) = Re(z(t))$

Resolvendo (2)

$z(t) = z_0 e^{i\omega t} = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}$ (3)

$\ddot{z} = -\omega^2 Ae^{i\varphi}e^{i\omega t}$

$(\omega_0^2-\omega^2)Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m} \Rightarrow (\omega_0^2-\omega^2)A(\cos\varphi) = \frac{F_0}{m}$ $\in \mathbb{R}$

$\sin\varphi = 0$ (4) $\Rightarrow (\omega_0^2-\omega^2)A\cos\varphi = \frac{F_0}{m}$ (5) $\sqrt{1-\sin^2\varphi}$

De (5):

· Se $\omega < \omega_0 \rightsquigarrow \cos\varphi > 0$

$\left.\begin{array}{l}\sin\varphi = 0\\ \cos\varphi = 1\end{array}\right\} \varphi = 0 \Rightarrow A = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}$

· Se $\omega > \omega_0 \rightsquigarrow \cos\varphi < 0$

$\left.\begin{array}{l}\sin\varphi = 0\\ \cos\varphi = -1\end{array}\right\} \varphi = -\pi$ ou $\varphi = \pi \Rightarrow A = \frac{(F_0/m)}{\omega^2-\omega_0^2}$

Nos DOIS casos:

$$A\cos\varphi = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, onde

$A(\omega) = \frac{(F_0/m)}{|\omega_0^2-\omega^2|}$ $\quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega < \omega_0 \\ -\pi, & \text{se } \omega > \omega_0 \end{cases}$

$x(t) = A\cos\varphi\cos(\omega t) - A\cancel{\sin\varphi}^{\,0}\sin(\omega t)$

$$x(t) = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$$

* Limite para baixas frequências ($\omega \ll \omega_0$)

$x(t) \simeq \frac{(F_0/m)\cos(\omega t)}{(\omega_0^2)\sim(\frac{k}{m})} = \frac{F_0\cos(\omega t)}{k}$

$x(t) \simeq \frac{F(t)}{k}$

$F(t) = kx(t) = -F_{elástica}$

* Limite para altas frequências ($\omega \gg \omega_0$)

$x(t) \simeq -\frac{(F_0/m)}{\omega^2}\cos(\omega t)$

$x(t) \simeq -\frac{F(t)}{m\omega^2}$

· Se $\omega \to \omega_0$

$A(\omega) = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2} \to \infty$!

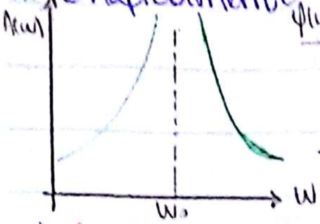
↳ Ressonância

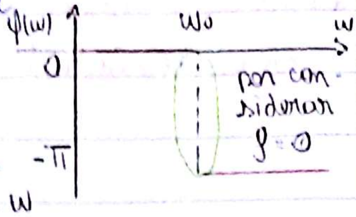
Se $\omega \to \infty$

$A(\omega) = \frac{(F_0/m)}{|\omega_0^2-\omega^2|} \simeq \frac{(F_0/m)}{\omega^2} \to 0$!

tilibra
Scanned by CamScanner

* Graficamente





· Solução geral:

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$ é uma eq. inomogênea

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ → sol. particular da eq. inomogênea

sol. da eq. homogênea

Neste caso $x_p(t) = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$

Equação homogênea → $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$x_h(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$, então

$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t)$

onde a e ϕ são determinados pelas condições iniciais

Osc. Harm. Forçado e Amortecido

Equação do movimento:

$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$ (1)

· Solução de (1)

$x(t) \to z(t) = x(t) + i y(t)$ $\quad \cos(\omega t) \to e^{i\omega t}$

$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$ (2), $\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\, e^{i\omega t}$, $x(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$

· Solução de (2)

$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$ (3) há de verificar (2)

$\dot{z} = i\omega z_0 e^{i\omega t}$ $\quad \ddot{z} = -z_0\omega^2 e^{i\omega t}$

$(-\omega^2 + \gamma i\omega + \omega_0^2) z_0 = \frac{F_0}{m}$

$z_0 = \frac{(F_0/m)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$ (4)

Também $z_0 = Ae^{i\varphi} = A\cos\varphi + iA\sin\varphi$ (5)

Comparamos (4) e (5)

$A\cos\varphi = \mathrm{Re}\{z_0\} = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$ (6)

$A\sin\varphi = \mathrm{Im}\{z_0\} = -\frac{F_0}{m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$ (7)

$(6)^2 + (7)^2$ e $(7)/(6)$

$A^2 = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \Rightarrow A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$

$\tan\varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

$z(t) = z_0 e^{i\omega t} = Ae^{i\varphi}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

· Valor de ω p/ A(ω) é máximo?

Corresponde ao valor de ω p/ o qual o denominador é mínimo

$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$ frequência de ressonância

* Caso $\omega_0 \gg \gamma \to \omega_R \simeq \omega_0$

$\frac{A(\omega_R)}{A(0)} \simeq \frac{A(\omega_0)}{A(0)} = \frac{(F_0/m\gamma\omega_0)}{(F_0/m\omega_0^2)}$

$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ fator de qualidade

$A^2(\omega) = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$ com ω perto de ω_0

↳ $\omega - \omega_0 \ll \omega_0$

$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega) = (2\omega_0 + \underbrace{\omega-\omega_0}_{\ll\omega_0})(\omega_0-$

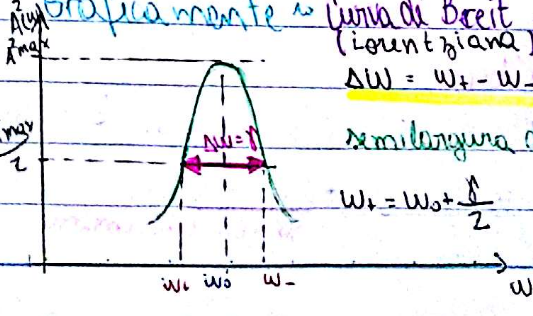
$\omega_0^2 - \omega^2 \simeq 2\omega_0(\omega_0-\omega)$

$\gamma\omega = \gamma(\underbrace{\omega-\omega_0}_{\ll\omega_0} + \omega_0) \simeq \gamma\omega_0$

$A^2(\omega) \simeq \frac{(F_0/m)^2}{4\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2\omega_0^2} = \left(\frac{F_0}{2m\omega_0}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$

$\tan[\varphi(\omega)] \simeq -\frac{\gamma\omega_0}{2\omega_0(\omega_0-\omega)} = \frac{-\gamma}{2(\omega_0-\omega)}$

Graficamente → Curva de Breit-Wigner (lorentziana)



$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \gamma$

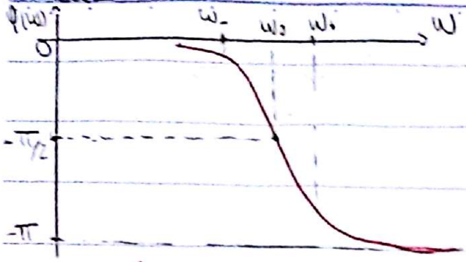
semilargura da ressonância

$\omega_+ = \omega_0 + \frac{\gamma}{2}$ $\quad \omega_- = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}$

tilibra

Scanned by CamScanner

Física II



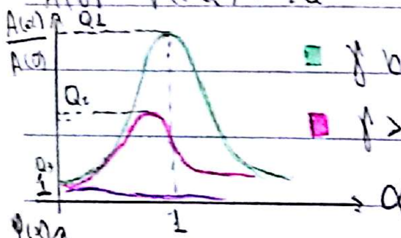
· Como $\hat{A}(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ mudam com γ (ou com Q)

$A(\omega) = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$ $tg(\varphi(\omega)) = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_0}{Q}$

$\alpha = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \omega = \omega_0\alpha$

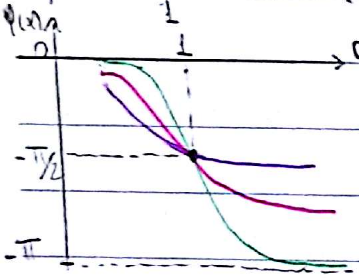
$\frac{A(\alpha)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2+\alpha^2/Q^2}}$ $tg[\varphi(\omega)] = -\frac{\alpha/Q}{1-\alpha^2}$



■ γ bem pequeno

■ $\gamma > \gamma$

■ γ grande



· Solução geral:

$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$

$x(t) = x_h(t)+x_p(t)$ $x_p(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$

$A(\omega) = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}$, $tg(\varphi(\omega)) = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

$x_h(t)$ = ? equação homogênea

$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x = 0$

Ex: Subcrítico a e ϕ ← condições iniciais

$x_h(t) = a e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega' t+\phi)$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$

$x(t) = \underbrace{a e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega' t+\phi)}_{\text{solução transiente (transitória)}} + \underbrace{A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]}_{\text{solução estacionária}}$

homogênea particular

* Energia mecânica e balanço de energia

· Energia Mecânica (sistema bloco-mola)

$E = T+U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

d/dt: $\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = m\dot{x}(\ddot{x}+\omega_0^2x)$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

· Para $t \gg \tau_d = \frac{1}{\gamma}$

$x(t) = A(\omega)\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$ e $\ddot{x} = -\omega^2x$

$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = m(\omega_0^2-\omega)x\dot{x}$

· Valor médio em um ciclo

$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle = m(\omega_0^2-\omega^2)\langle x\dot{x}\rangle$

$x \sim \cos(\omega t+\varphi)$, $\dot{x} \sim sen(\omega t+\varphi)$

$x\dot{x} \sim sen[2(\omega t+\varphi)] \rightsquigarrow \langle x\dot{x}\rangle = 0$!

$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle = 0$

Da equação do movimento

$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x = \frac{F_0\cos(\omega t)}{m}$

$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}(\ddot{x}+\omega_0^2x) = -m\gamma\dot{x}^2 + F(t)\dot{x}$

$\frac{dE}{dt} = P_d + P$ { $P_d(t)$ ~ pot. associada à força dissip.
$P(t)$ ~ pot. associada à força $F(t)$: $F(t)\cdot\dot{x}$

Como $\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle = 0$ para $t \gg \tau_d$, $\langle P\rangle + \langle P_d\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle P\rangle = -\langle P_d\rangle = m\gamma\langle\dot{x}^2\rangle$

Para $t \gg \tau_d$:

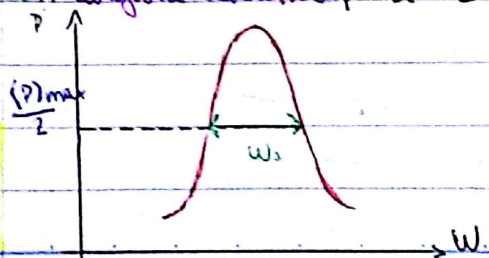
$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t+\varphi(\omega))$, $\langle\dot{x}^2\rangle = \frac{A^2\omega^2}{2}$

$\Rightarrow \langle P\rangle = \frac{m\gamma}{2}A^2\omega^2$, como $A^2(\omega) = \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$

$\langle P\rangle = \frac{F_0^2\gamma}{2m}\cdot\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$

* Há um máximo em $\omega=\omega_0$

* A largura da curva para $\frac{\langle P\rangle_{max}}{2}$ é γ



tilibra

Scanned by CamScanner

Física II

Caso $\omega_0 \gg \gamma$:

- $A(\omega)$ tem uma ressonância em ω_0
- $\omega_0^2 - \omega^2 \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ para ω na região de ω_0

Também $\gamma\omega \simeq \gamma\omega_0$, então,

$$\langle P \rangle \simeq \frac{F_0^2 \gamma}{2m} \frac{\omega_0^2}{4\omega_0^2(\omega_0-\omega)^2 + \gamma^2\omega_0^2}$$

$$\langle P \rangle \simeq \frac{F_0^2 \gamma}{8m} \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2 + \frac{\gamma^2}{2}}$$ é uma Breit-Wigner

$P(t) = F(t)\dot{x}$, para $t \gg \tau_d$

$x(t) = A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]$

$\dot{x} = -A\omega \,\mathrm{sen}[\omega t + \varphi]$

$P(t) = \underbrace{[F_0 \cos(\omega t)]}_{\text{força}} \cdot \underbrace{[-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)]}_{\text{velocidade}}$ então

$$\langle P \rangle = \frac{-A\omega F_0}{2} \mathrm{sen}\varphi$$

Se $\omega_0 \gg \gamma$, ressonância em ω_0 e $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Então, a diferença de fase entre $F(t)$ e $\dot{x}$

$[\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}] - \omega t = \varphi + \frac{\pi}{2} = 0$ neste caso

Então $\langle P \rangle$ é MÁXIMO na ressonância e $F(t)$ está em fase com a velocidade

- Fator de qualidade

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia armazenada}}{\text{Energia dissipada num ciclo}}$$ energia média

$$Q = 2\pi \frac{\langle E(t) \rangle}{\langle \Delta E \rangle}$$

Como $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$\langle E \rangle = \frac{1}{2}m\langle \dot{x}^2 \rangle + \frac{1}{2}k\langle x^2 \rangle$

Para $t \gg \tau_d$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{x} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$

$\langle x^2 \rangle = \frac{A^2}{2}$, $\langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{A^2\omega^2}{2}$

Assim,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} m A^2 (\omega^2 + \omega_0^2), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Para obter $\langle \Delta E \rangle$, caso onde $F(t) = 0$

$\langle \Delta E \rangle = \langle E(t) \rangle - \langle E(t+\tau) \rangle$

$$\langle \Delta E \rangle = -\frac{\langle E(t+\tau) \rangle - \langle E(t) \rangle}{\tau} \cdot \tau \simeq -\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \tau$$

Vemos que $\langle \Delta E \rangle$ está associada ao valor médio da potência

Neste caso, como potência da força dissipativa

$$\langle \Delta E \rangle = -\langle P_d \rangle \tau = \langle P \rangle \tau = \frac{m\gamma A^2 \omega^2}{2} = \langle \Delta E \rangle$$

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\frac{1}{4} m A^2 (\omega^2 + \omega_0^2)}{m\gamma A^2 \pi \omega}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Se $\omega_0 \gg \gamma$, ressonância em ω_0, $\omega \to \omega_0$

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{\gamma}$$

Ondulatória

- A onda é uma perturbação no meio
- A perturbação é propagada de uma região a outra do meio

- Classificação das ondas

- Transversais: mov. das partículas é perpendicular à propagação da onda
- Longitudinais: mov. das partículas é paralelo à propagação da onda
- Mecânicas: precisam de um meio para se propagarem
- Eletromagnéticas: NÃO precisam de um meio para se propagar.

tilibra

Scanned by CamScanner

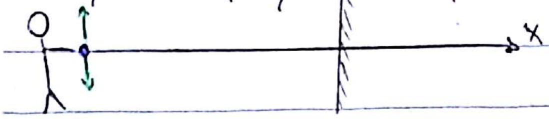
/ /

Vamos considerar ondas mecânicas:

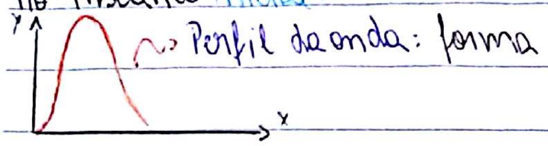
- Eq. da onda (1D)

- Exemplo: corda uniforme esticada

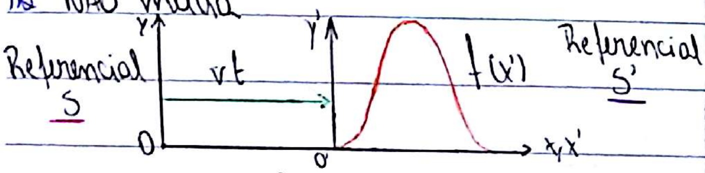
* Deslocamento transversal medido em relação à posição de equilíbrio: $y(x,t)$



No instante inicial:



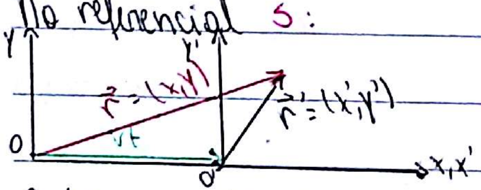
Em um instante t posterior: o pulso é deslocado uma certa distância com velocidade constante v e a forma do pulso NÃO muda



Em $t=0$, $O \equiv O'$

No referencial S': $y'(x',0) = y'(x',t) = f(x')$

No referencial S:



Então: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t$ ou $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$

assim, $x' = x - vt$ e $y = y'$

$y(x,t) = f(x') = f(x-vt)$

- Representa uma onda progressiva no sentido $+x$

- Onda progressiva no sentido $-x$: $y(x,t) = g(x+vt)$

* Velocidade e aceleração (transversais) de um ponto qualquer x

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \qquad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Exemplo: onda no sentido $+x$

$$y(x,t) = f(x') = f(x-vt)$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t}$$

$$v_y = -v\frac{df}{dx'} \equiv h(x')$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} = \left(-v \cdot \frac{d^2 f}{dx'^2}\right)(-v)$$

$$a_y = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2} \quad (1)$$

Também

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx} \cdot 1 = \frac{df}{dx'} \equiv z(x)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{dz}{dx} \cdot 1 = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

Propriedades de (3):

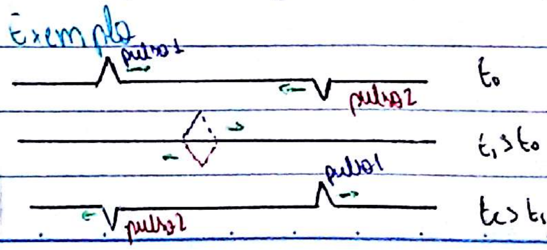
- Solução mais geral:

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

- Princípio da superposição:

se $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ são soluções, a solução mais geral é $y(x,t) = a y_1(x,t) + b y_2(x,t)$

Exemplo



tilibra

Scanned by CamScanner

Física II

- Ondas Harmônicas

$y(x,t) = A\cos(k(x \pm vt) + \delta)$

A: amplitude da onda

δ: constante de fase

k: número de ondas ($k > 0$)

- Representação da função

- Para um valor de t fixo ($t=0$):

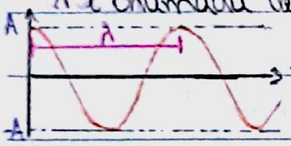
$y(x,0) = A\cos(kx + \delta)$ ~ função periódica em x

Então, se λ é o período espacial,

$y(x,0) = y(x+\lambda, 0) \Rightarrow \cos(kx+\delta) = \cos(kx+\delta+k\lambda)$

Assim, $k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- λ é chamada de comprimento de onda



$\delta = 0$

Em um instante t_1

$y(x,t_1) = A\cos(kx + \underbrace{\delta \pm kvt_1}_{\delta'})$

- Para um valor de x fixo ($x=0$)

$y(0,t) = A\cos(\pm kvt + \delta) \Rightarrow$ função periódica em t

Então, se τ é o período temporal,

$y(0,t) = y(0, t+\tau)$, novamente temos

$kv\tau = 2\pi$, como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $v = \frac{\lambda}{\tau}$

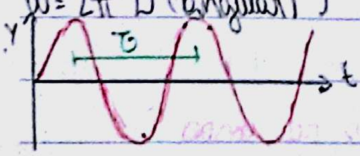
Frequência

$\nu = \frac{1}{\tau}$

$\omega = 2\pi\nu$ (angular)

$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\lambda} v = kv$

$v = \frac{\omega}{k}$



$\delta = 0$

- Fase da onda: argumento do cosseno

$\varphi(x,t) = kx \pm \omega t + \delta$

- Se considerarmos pontos de fase cte

$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow k\frac{dx}{dt} \pm \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\frac{\omega}{k}$ vel. de propagação da onda ou vel. de fase

- Velocidade de propagação de ondas transversais em uma corda

- Depende das propriedades do meio (corda)

- Tensão na corda

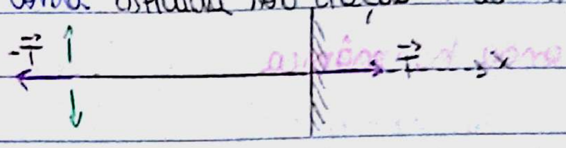
- Densidade linear da corda

$v = C\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

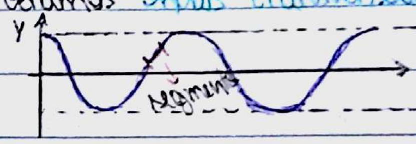
- Da 2ª Lei de Newton: $C = 1 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

- Energia no movimento ondulatório

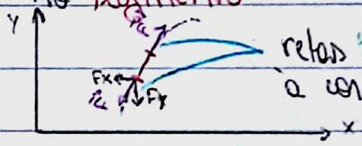
- Corda esticada sob tração $\vec{T}$ ao longo de x



Geramos ondas transversais



- No segmento



retas tangentes à corda no ponto

$\frac{\|\vec{F}_y\|}{\|\vec{F}_x\|}$ = inclinação da curva no ponto x e no instante t = $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x,t)}$

- "Partículas" com movimento transversal

$F_x \simeq -T \Rightarrow F_y(x,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}$

- O ponto x no instante t tem uma velocidade transversal $\vec{v}_y = v_y(x,t)\hat{j}$, onde $v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$

e a força $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$ agindo no ponto

$\vec{F}$ produz um TRABALHO

Potência associada a $\vec{F}$

$P(x,t) = \vec{F}\cdot\vec{v}_y = F_y \cdot v_y \Rightarrow P(x,t) = -T \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

- Na onda harmônica:

$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$, então

$P(x,t) = TA^2k\omega\, \text{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$

· Intensidade: valor médio de P num tempo

$I = \langle P \rangle = \frac{1}{2} T k \omega A^2$, como:

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow T = \mu v^2 = \mu v \frac{\omega}{k}$

$I = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2$

· Segmento infinitesimal de massa $dm = \mu dx$

- Densidade linear da energia cinética

$$\frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

- Na onda harmônica

$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$

$\frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t + \delta)$

$\left\langle \frac{dE_c}{dx} \right\rangle = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2$

- Densidade de energia potencial elástica

↳ Temos um MHS no eixo y no caso de ondas harmônicas

$$\left\langle \frac{dU}{dx} \right\rangle = \left\langle \frac{dE_c}{dx} \right\rangle = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2$$

· Energia mecânica: $E = E_c + U$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \left\langle \frac{dE_c}{dx} \right\rangle + \left\langle \frac{dU}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2$$

- Em um intervalo dt, a onda é deslocada uma distância $dx = v dt$

$I = \langle P \rangle = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt} \right\rangle \Rightarrow I = v\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$

- Interferência

· Superposição de ondas na MESMA região

· Onda resultante ⇒ princípio de superposição

(a) Mesma frequência e sentido de propagação

$y_1(x,t) = A_1\cos(kx - \omega t + \delta_1) = A_1\cos[\varphi_1(x,t)]$

$y_2(x,t) = A_2\cos(kx - \omega t + \delta_2) = A_2\cos[\varphi_2(x,t)]$

$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}$

$\delta_{12} = \delta_1 - \delta_2$

δ:

· Intensidade $\propto A^2$

$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos\delta_{12}$

$\cos\delta_{12} = 1 \Rightarrow \delta_{12} = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$A = A_{máx} = A_1 + A_2$

$I = I_{máx} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \delta_{12} = 2n\pi$

· Cristas e vales de y_1 alinhadas com cristas e vales de y_2 ⇒ ondas em fase

↳ Interferência construtiva

$\cos\delta_{12} = -1 \Rightarrow \delta_{12} = (2n+1)\pi$

$A = A_{min} = |A_1 - A_2|$

$I = I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \delta_{12} = (2n+1)\pi \Rightarrow$ oposição de fase

↳ Interferência destrutiva

(b) Mesmo ω e sentidos opostos de propag.

$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$

$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$

$y(x,t) = y_1 + y_2 = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

· NÃO é uma onda ~~progressiva~~, é estacionária

· Há valores de x onde $y(x,t) = 0$ para QUALQUER t ⇝ nós da onda

· Entre dois nós consecutivos uma crista ou um vale ⇝ ventre ou anti nó

$P(x,t)$ quando $y(x,t)$

$P(x,t) = A\cos(kx)\cos(\omega t)$

tilibra

Scanned by CamScanner

Física II

(c) Mesmo sentido e frequência diferente

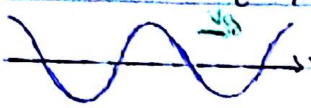
$y_1(x,t) = A\cos(k_1x - \omega_1t) \Rightarrow v_1 = \omega_1/k_1$

$y_2(x,t) = A\cos(k_2x - \omega_2t) \Rightarrow v_2 = \omega_2/k_2$

$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2} - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

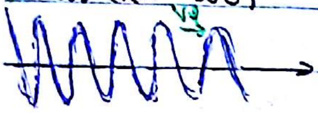
* Caso $k_1 > k_2$, $k_1 \sim k_2$: $\Delta k \ll \bar{k}$, $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$

↳ $\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega t}{2}\right)$ velocidade de grupo



$v_g = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

↳ $\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$



$v_\varphi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$ velocidade de fase

$v_g \equiv$ vel. de translação de um ponto da envoltória com $a(x,t) = cte$

$v_\varphi \equiv$ vel. de translação de um ponto onde $\varphi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t$

↳ $y(x,t) = a(x,t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$

$a(x,t) = 2A\cos\left(\Delta k/2\, x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$

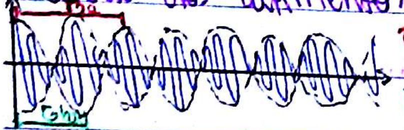
· Se $v_g \neq v_\varphi$, o meio é dispersivo

· Temos batimentos

↳ Intensidade $\propto$ (Amplitude)^2

↳ Tem máximos e mínimos

· Período dos batimentos



$\tau_a \equiv$ período temporal $a(x,t)$

$\tau_{bat} \equiv$ período temporal de batimento

$\tau_{bat} = \frac{\tau_a}{2}$, onde $\tau_a = \frac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{4\pi}{\Delta\omega}$

$\tau_{bat} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2\pi}{2\pi(\nu_1 - \nu_2)}$

$\tau_{bat} = \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} = \frac{1}{\nu_{bat}}$

$\nu_{bat} = \nu_1 - \nu_2 \quad (\nu_1 > \nu_2)$

· Em geral, para um meio

$\omega = \omega(k) \Rightarrow$ relação de dispersão do meio

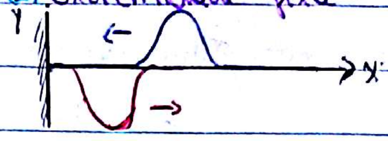
$\omega(k) = v_\varphi(k)\, k$

$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv_\varphi}{dk}k + v_\varphi(k)$

Reflexão de Ondas

* Ondas transversais em uma corda uniforme

↳ (1) Extremidade fixa



· Antes de chegar a $x = 0$

$y(x,t) = g(x + vt)$

· Onda chega em $x = 0$

$y(x,t) = g(x+vt) + f(x-vt)$ (1)

* Condição: extremidade $x = 0$ é fixa

$y(0,t) = 0 \quad \forall t$ (2) ↝ condição de contorno

De (1) e (2) ↝ $f(-vt) + g(vt) = 0$

$f(-vt) = -g(vt)$

Para onde f, $-vt$ é $x' = x - vt$ em $x = 0$

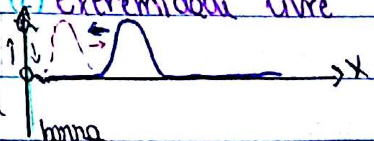
$f(x') = -g(-x') \Rightarrow f(x-vt) = -g(vt-x)$

$y(x,t) = g(vt+x) - g(vt-x)$

↳ mesma forma, sentido oposto

↳ há inversão

(2) Extremidade livre



$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(0,t)} = 0 \quad \forall t$ ↝ condição de contorno

Como $y(x,t) = g(x+vt) + f(x-vt)$

se $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $g' = \frac{\partial g}{\partial x}$,

$g'(vt) + f'(-vt) = 0 \Rightarrow g'(vt) = f'(vt)$

tilibra

Scanned by CamScanner

Para $f_1 - vt$ é $x' = x - vt$ em $x = 0$

$f'(x') = -g'(-x') \Rightarrow f(x') = g(-x')$

Então $f(x - vt) = g(vt - x)$

$y(x,t) = g(vt + x) + g(vt - x)$

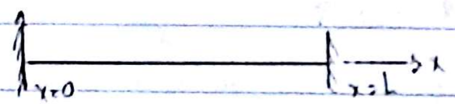
↳ mesma forma, sentido oposto

↳ NÃO há inversão

- Modos normais de vibração

- Corda uniforme (densidade μ e comprimento L) fixada nas duas extremidades

Exemplo:



* Extremidades fixas → reflexão com inversão

* Superposição das ondas ~ pode gerar ondas estacionárias

$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) - A\cos(kx + \omega t)$

$= 2A\,sen(kx)\,sen(\omega t)$

Condições de contorno: extremidades fixas

$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad \forall t$

↳ $sen(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi,\ n \in \mathbb{N}^*$

Temos ondas estacionárias para

$k_n = \frac{n\pi}{L},\ n = 1,2,3,\ldots = \frac{2\pi}{\lambda_n}$

$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$ e $L = \frac{n\lambda_n}{2}$

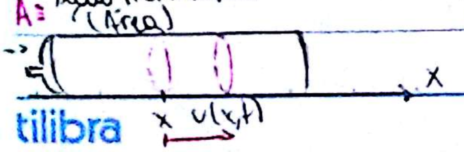
$\omega_n = k_n v = 2\pi\nu_n$ ~ harmônicos

$\nu_n = \frac{k_n v}{2\pi} = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}v = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Ondas Sonoras

- Onda mecânica longitudinal
- Caso de propagação: eixo x
- Fluido de densidade ρ_0 e uma pressão p_0 ~ valores no equilíbrio

A: seção transversal (Área)



- O deslocamento $u(x,t)$ produz mudanças na densidade e na pressão do fluido

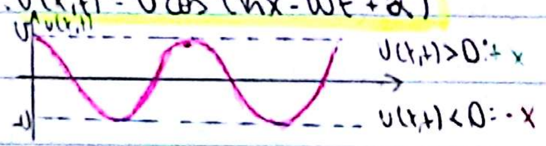
Pressão: $P(x,t) = p_0 + p(x,t)$

Densidade: $\rho(x,t) = \rho_0 + \delta(x,t)$ — variações

* $u(x,t)$, $p(x,t)$, $\delta(x,t)$ satisfazem a eq. de ondas com velocidade de propagação $v = v_{som}$ no meio

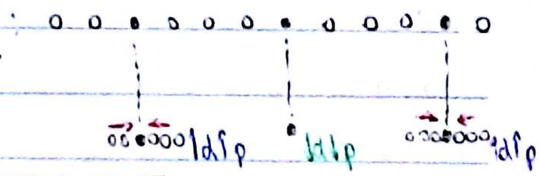
* Caso ondas harmônicas

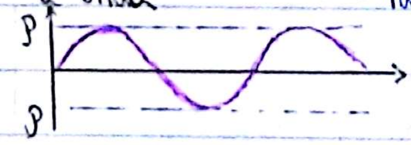
$u(x,t) = U\cos(kx - \omega t + \alpha)$



Antes de gerar a onda

Geramos a onda





Onda de pressão defasada em $\pi/2$ em relação a $u(x,t)$

$p(x,t) = \mathcal{P}\,sen(kx - \omega t + \alpha)$

Intensidade

$I = \left\langle \frac{Potência}{Superfície} \right\rangle = \left\langle \frac{F(x,t)}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle$

$I = \left\langle p(x,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\omega U\,sen^2(kx - \omega t + \alpha) \right\rangle$

$I = \frac{1}{2}\mathcal{P}\omega U$, $\mathcal{P} = \rho_0 v^2 k U$, $I = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{P}}{\rho_0 v}$

Ouvido humano

$I_{mín} \sim 10^{-12}\ W/m^2$ } intervalo ⇒ mudança

$I_{máx} \sim 10^{12}\ I_{mín}$ } muito grande de escala

* Definimos o nível de intensidade como

$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_{mín}}\right)$ dB

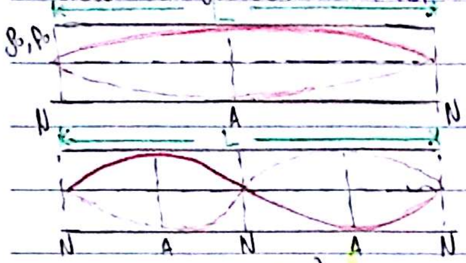
Assim, o intervalo é $\beta \sim 0 - 120$ dB

tilibra

Scanned by CamScanner

- Exemplo: tubo órgão

· Caso: tubo com extremidades abertas



N ~ nós de pressão
A ~ antinós "

$L = \frac{\lambda}{2}$

$L = \frac{2\lambda}{2}$

Em geral $L = \frac{n\lambda_n}{2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Usando $\omega_n = k_n v = \frac{2\pi v}{\lambda_n} \Rightarrow \omega_n = 2\pi \nu_n$

· Caso: tubo com uma extremidade aberta

$L = \frac{\lambda}{4}$

→ antinó de pressão
nó de deslocamento

$L = \frac{3\lambda}{4}$

Em geral, $L = \frac{n\lambda_n}{4}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$

Somente harmônicos ímpares

$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L}$

tilibra
Scanned by CamScanner