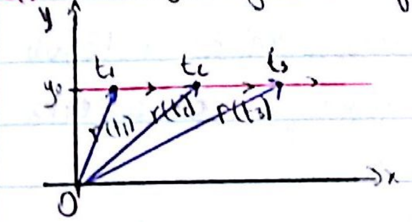
Física I

Momento Angular $\vec{l}$

- Momento angular de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ com vetor posição $\vec{r}$ em relação a uma origem O.
- O momento angular da partícula em relação a O ⇝ $\boxed{\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}}$

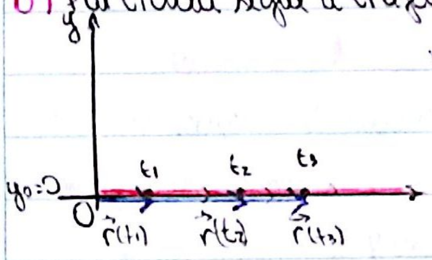
Exemplos

a) Partícula segue a trajetória $y = y_0 > 0$



$\vec{r}(t)$ "gira" em torno de O $\Rightarrow \vec{l} \neq \vec{0}$ em relação a O

b) Partícula segue a trajetória $y = y_0 = 0$



$\vec{r}(t)$ "não gira" em torno de O $\Rightarrow \vec{l} = \vec{0}$ em relação a O

- $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$

$|\vec{l}| = |\vec{r}||\vec{p}| \operatorname{sen}\theta = r_\perp |\vec{p}| = |\vec{r}| p_\perp$

θ ⇝ menor ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{p}$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

pois $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é paralelo a $\vec{p}$ $(\vec{p} = m\vec{v})$

- $\frac{d\vec{l}}{dt} = r \times \frac{d\vec{p}}{dt}$ e pela 2ª lei de Newton

$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_R$

Torque realizado por uma força $\vec{F}$ em relação ao ponto O

$\boxed{\vec{\tau}_R = \vec{r} \times \vec{F}_R}$ e $\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}_R}$

Se $\vec{\tau}_R = 0$, então $\vec{l}$ é conservado (constante no tempo)

- No S.I. $[\vec{l}] = kg\,m^2/s$

$[\vec{\tau}] = Nm$

- Analogamente ao que ocorre no momento linear, em um sistema de n partículas, o momento angular do centro de massa somado ao momento angular das partículas em relação ao centro de massa

$$\vec{L} = \left(\sum_i m_i\right)(\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}) + \vec{r}_{cm} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}'_i\right) + \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i\right) \times \vec{v}_{cm} + \sum_i \vec{r}'_i \times (m_i \vec{v}'_i)$$

Onde: $\vec{r}'_i$: posição relativa ao CM

$\vec{v}'_i$: velocidade relativa ao CM

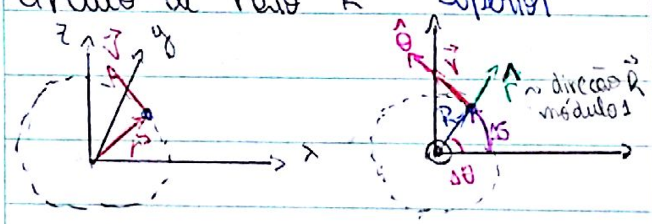
em relação a O: $\vec{r}_{cm}$: posição do CM; $\vec{v}_{cm}$: velocidade do CM

Momento Angular e Rotações

- Tamanho e forma são importantes
- Corpo rígido: o tamanho e a forma do objeto NÃO mudam durante o movimento
- Objeto: sistema de partículas onde a distância entre elas NÃO muda
- Movimentos básicos:
  - Translação: movimento ao longo de uma trajetória, SEM girar
  - Rotação: giro entorno de um eixo (pode mudar com o tempo)
    ↳ As partículas que formam o sólido descrevem um círculo
  - Combinado: translação + rotação
    ↳ Rotação entorno de um *eixo fixo
    * NÃO muda a direção nem a posição

Exemplo: partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ (→ não precisa ser constante) que descreve um círculo de raio R

Superior



- $S = R\theta$
- Velocidade: $v_r = 0$ $\quad v_\theta = \frac{ds}{dt} = R\cdot\frac{d\theta}{dt} = R\omega$*

* $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ~ velocidade angular

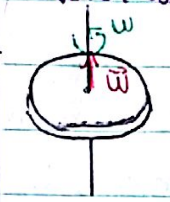
- Aceleração: $a_r = -\frac{|\vec{v}|^2}{R} = \omega^2 R$ $\quad a_r$

$a_\theta = \frac{dv_\theta}{dt} = R\cdot\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$ $\quad a_\theta$

* $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ ~ aceleração angular

* Se o movimento for com $|\vec{v}|$ constante, ω é constante e $\alpha = 0$

- Caso corpo extenso: ω e α são vetores
- Vetor $\vec{\omega}$: tem a direção do eixo de rotação, módulo igual ao da velocidade angular e a relação entre a direção e sentido de $\vec{\omega}$ e o da rotação é dada pela regra da mão direita
- Vetor $\vec{\omega}$:
  - direção: eixo de rotação
  - módulo: |vel. angular|
  - relação sentido - rotação: regra da mão direita

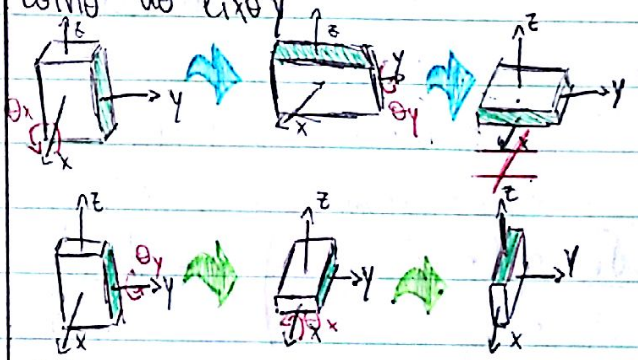


- Vetor $\vec{\alpha}$: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

se $\vec{\alpha} = cte$, $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(t_0) + \vec{\alpha}\Delta t$

- O que acontece com o ângulo de giro θ? Podemos associá-lo a um vetor?

Exemplo: Rotação de ângulo θ_x em torno do eixo x e uma de θ_y em torno do eixo y



$\vec{\theta} \overset{?}{=} \theta_x\hat{i} + \theta_y\hat{j}$

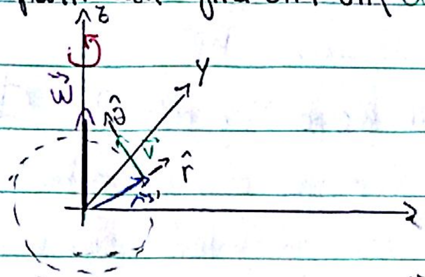
1º caso: $\theta_x\hat{i} + \theta_y\hat{j}$
2º caso: $\theta_y\hat{j} + \theta_x\hat{i}$
} DIFERENTES!

Em geral as rotações NÃO são comutativas => NÃO podemos associar θ a um vetor, MAS! para rotações infinitesimais $d\vec{\theta} = d\theta_x\hat{i} + d\theta_y\hat{j} + d\theta_z\hat{k}$

e $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$

Momento angular

- partícula gira em um círculo



$\vec{l}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$

$\vec{r} = r'\hat{r}$, $\vec{v} = v_\theta \hat{\theta}$

$v_\theta = r' w$

$v_\theta = r' w_z$

$\vec{l}_{o'} = I_z \vec{w}$

Então: $\vec{l}_{o'} = m v_\theta r' (\hat{r} \times \hat{\theta})$

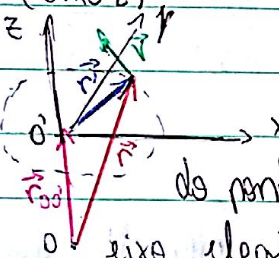
$= m r' v_\theta \hat{k}$

$l_{o'} = m r'^2 w_z \hat{k}$

$= m r'^2 \vec{w} = I \vec{w}$

$I_z = m r'^2$

I_z ⤳ momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação (eixo z)



O momento angular depende do ponto ao longo do eixo elegido

$\vec{l}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = (\vec{r}_{oo'} + \vec{r}') \times (m\vec{v})$

$= \vec{r}_{oo'} \times m\vec{v} + \vec{r}' \times (m\vec{v})$

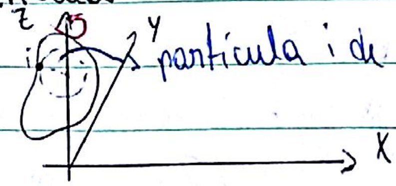
$\vec{l}_o = r_{oo'} \times \vec{p} + \vec{l}_{o'}$

$\vec{l}_o = \underbrace{(\vec{r}_{oo'} \times \vec{p})} + I_z \vec{w}$

É perpendicular ao eixo de rotação z (não pode ter componente z)

- Se o eixo passa pelo centro de massa do sistema e a distribuição de massa é simétrica a ambos os lados, então o eixo z é um eixo de simetria. Deste modo, o momento angular será paralelo ao $\vec{w}$

- Caso sólido rígido: sistema de partículas



A componente z de $\vec{L}$ é independente do ponto considerado no eixo z

$L_z = \sum_i \Delta m_i r_i'^2 w_z = I_z w_z$

onde $I_z = \sum_i \Delta m_i r_i'^2$

Limite ao contínuo ⤳ distribuição contínua de massa

$I_z = \int r_i'^2 \, dm$

$L_z = I_z w_z$ ∴ momento angular do sistema em relação a um ponto A

$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\tau}_{ext\,R,A}$

Pegamos, por exemplo o ponto O:

$\vec{\tau}_{ext\,R,O} = \sum_i \vec{r}_i \times F_{ext\,R,i}$

$= \sum_i (\vec{r}_{oo'} + \vec{r}'_i) \times F_{ext\,R,i}$

$= \vec{r}_{oo'} \times (\sum F_{ext\,R,i}) + \sum_i r_i \times \vec{F}_{ext\,R,i}$

$\vec{\tau}_{ext\,R,O} = \vec{r}_{oo'} \times F_{ext\,R} + \vec{\tau}_{ext\,R,O'}$

Perpendicular a $\vec{r}_{oo'}$, logo, perp. ao eixo z

$\vec{\tau}_{ext\,R,O'} = \tau_{ext\,R,O}\hat{k}$

A componente z de $\vec{\tau}_{ext\,R}$ é independente do ponto considerado no eixo z

$L_z = I_z w_z$ $\tau_{ext\,R,z} = \frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{dw}{dt}$

$\tau_{R,z} = I_z \alpha_z$ $\vec{\alpha} = \alpha_z \hat{k}$

1) $\vec{F}_{ext\,R} = \vec{0}$, τ não depende do ponto (ponto escolhido)

2) Se pegarmos O', ou se z for eixo de simetria

$\vec{L} = I_z w_z \hat{k}$ ⤳ $\vec{\tau}_{ext\,R} = \tau_{ext\,R}\hat{k}$ e $\vec{\tau}_{ext\,R} = I_z \vec{\alpha}$

$\vec{\alpha} = \alpha_z \hat{k} = \frac{d\vec{w}}{dt}$

Física I

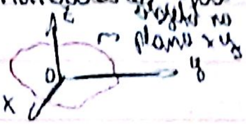
■ TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

- Conhecemos para para UM objeto I_{CM}
- Eixo paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa separados por uma distância d

$$\boxed{I_{eixo} = I_{cm} + Md^2}$$

■ TEOREMA DOS EIXOS PERPENDICULARES

- Objetos em um plano
- Três eixos perpendiculares que passam pelo mesmo ponto



$I_z = I_x + I_y$

Exercício:

1) Barra pivoteada: barra fina e homogênea de massa M e comprimento L é largada do repouso de uma posição horizontal. Desprezando forças de atrito, determine

a) Vetor aceleração angular da barra.

b) Vetor velocidade angular da barra quando ela passa pela posição vertical

c) Instante de tempo em que a barra passa pela posição vertical.

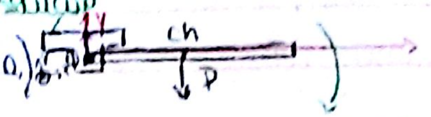
2) Uma barra fina de massa M e comprimento l está pendurada verticalmente de um pivô em uma de suas extremidades. Um pedaço de massa de modelar de massa m, que se move horizontalmente com velocidade $\vec{v}$ constante atinge a barra a uma distância d do pivô e se prende a ela.

a) Vetor velocidade angular logo após a massa de modelar se prender a ela.

b) Determine a razão entre energias cinéticas do sistema barra + massa de modelar antes e logo após a colisão.

Resolução

1) a)



$\tau_{ext,z} = I_z \alpha_z$

$\sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = I_z \vec{\alpha}_z$

$\alpha_z = \dfrac{+\frac{L}{2}\hat{i} \times -Mg\hat{j}}{\frac{ML^2}{3}} = -\dfrac{LMg\hat{k}}{2} \cdot \dfrac{3}{ML^2}$

$\alpha_z = -\dfrac{3g}{2L}\hat{k}$ rad/s²

b) Energia mecânica no sistema se conserva, então

$T_{hor} + U_{hor} = T_{vert} + U_{vert}$

$\dfrac{I_z|\vec{\omega}_i|^2}{2} + Mg y_{cm}^{0} = \dfrac{I_z|\vec{\omega}|^2}{2} + Mg y_{cm}$

$\dfrac{ML^2}{6}|\vec{\omega}|^2 + Mg\left(-\dfrac{L}{2}\right) = 0$

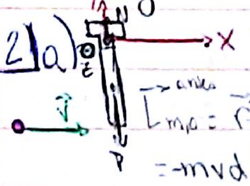
$|\vec{\omega}| = \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$ rad/s $\quad \vec{\omega} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\hat{k}$

c) $\vec{\omega}_z = \cancel{\vec{\omega}_i} + \alpha t$

$+\sqrt{\dfrac{3g}{L}}\cancel{\hat{k}} = +\dfrac{3g\cancel{\hat{k}}}{2L} t$

$t = \dfrac{2L}{3g}\sqrt{\dfrac{3g}{L}} = \sqrt{\dfrac{4g}{3l}}$ s

2) a)



$\vec{L}_{o,antes}^{sistema} = \vec{L}_{m,o}^{antes} + \cancel{\vec{L}_{barra,o}^{antes}}$

$\vec{L}_{mp} = \vec{r}_{mp} \times (m\vec{v}) = (x\hat{i} - d\hat{j}) \times (mv\hat{i})$

$= -mvd(\hat{j}\times\hat{i}) = mvd\hat{k}$

$\vec{L}_{o,após}^{sistema} = \vec{L}_{mp}^{após} + \vec{L}_{barra}^{após} = I_z^{sistema}\,\omega_z\hat{k}$

$= \left(\frac{1}{3}Ml^2 + md^2\right)\omega_z\hat{k}$

$\vec{L}_{o,antes}^{sistema} = \vec{L}_{o,após}^{sistema} \Rightarrow mvd\hat{k} = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + md^2\right)\omega_z\hat{k}$

$\vec{\omega}_z = \dfrac{mvd}{\frac{1}{3}Ml^2 + md^2}$

Mov. Plano de um Sólido

- Translação + rotação:

- Translação: $\vec{F}_{extR} = M \cdot \vec{a}_{cm}$

(referencial inercial)

- Rotação: $\vec{\tau}'_{extR} = \frac{d\vec{L}'}{dt}$

(eixo que passa pelo CM do objeto e é perpendicular ao plano de mov.)

* objetos homogêneos e simétricos (I) em relação ao eixo que passa pelo CM

(I) é um eixo de simetria

$\vec{L}' = I_{cm} \cdot \vec{\omega}$

$\vec{\tau}'_{extR} = I_{cm}\vec{\alpha}$

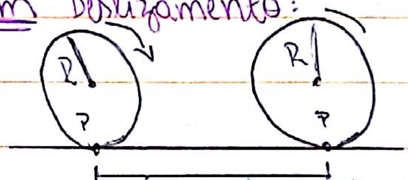
* Equilíbrio estático

$\vec{F}_{extR} = \vec{0}$

$\vec{\tau}_{extR} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\tau}_{extR} = \vec{0}$ p/ QUALQUER PONTO

* Rolamento

- Sem Deslizamento:



Período de Revolução

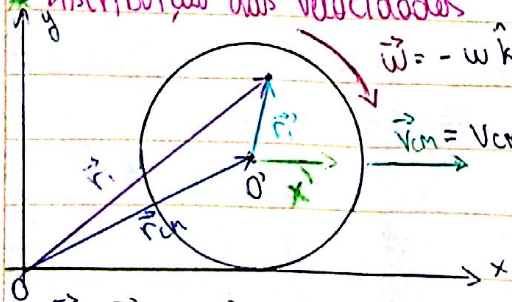
* Objeto gira dθ em um dt

$ds = R\,d\theta$

* O cm do objeto é transladado ds

$v_{cm} = \left|\frac{ds}{dt}\right| = R\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = R|\vec{\omega}|$

* Distribuição das velocidades



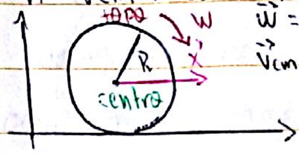
$\vec{\omega} = -\omega\hat{k}, \omega > 0$

$\vec{v}_{cm} = v_{cm}\hat{i}, v_{cm} > 0$

$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'_i$

$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i$

$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i$



$\vec{\omega} = -\omega\hat{k}, \omega > 0$

$\vec{v}_{cm} = v_{cm}\hat{i}, v_{cm} > 0$

Se o objeto rola SEM deslizar

$\vec{v}_{topo} = 2\omega R\hat{i}$

$\vec{v}_{centro} = \omega R\hat{i}$

$\vec{v}_p = \vec{0}$

$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_{cm}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'_p = \vec{0}$

$\boxed{\vec{v}_{cm}(t) = -\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'_p}$

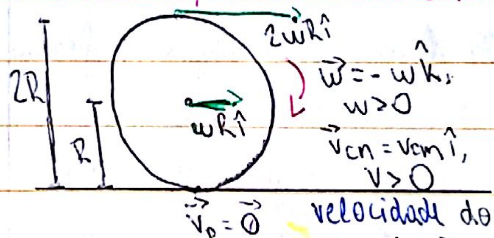
No caso:

$\vec{v}_{cm}(t) = v_{cm}(t)\hat{i}$ $\quad \vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$

Então, $\vec{v}_{cm}(t) = -\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'_p$

$\Rightarrow v_{cm}(t) = -\omega(t)R$

* Distribuição das velocidades



$V_i = \omega \times \vec{r}'_{ip}$

$\vec{\omega} = -\omega\hat{k}, \omega > 0$

$\vec{v}_{cm} = v_{cm}\hat{i}, v > 0$

$\vec{v}_p = \vec{0}$ velocidade do ponto de contato em relação ao chão

* $\vec{v}_p = \vec{0}$ ⇝ NÃO TEMOS deslizamento

↳ força de atrito estático

* $\vec{v}_p \neq \vec{0}$ ⇝ TEMOS deslizamento (#)

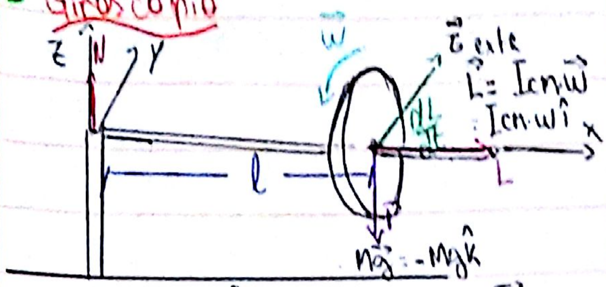
↳ força de atrito

(#) oposta a $\vec{v}_p$

↳ $|\vec{v}_{cm}| > R|\vec{\omega}|$ ou $|\vec{v}_{cm}| < R|\vec{\omega}|$

carro derrapando — roda girando em falso

Giroscópio



$\vec{\tau}_{extR,O} = \cancel{\vec{\tau}_{N,O}}^{\,0} + \vec{\tau}_{P,O} = \vec{r}_{P,O} \times \vec{P}$

$= (\ell\,\hat{i}) \times (-Mg\hat{k}) = Mg\ell\,\hat{j}$

* $\vec{\tau}_{extR}$ é perpendicular ao momento angular inicial. Em um tempo dt

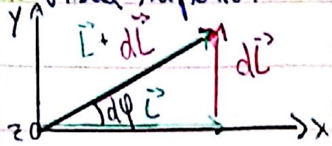
$d\vec{L} = \vec{\tau}_{extR}\,dt = Mg\ell\,dt\,\hat{j}$

$d\vec{L}$ é perpendicular a $\vec{L}$

$\vec{L} \cdot d\vec{L} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$

$\frac{d(\vec{L}^2)}{dt} = \vec{0}$ $|\vec{L}|$ não muda, só a direção.

* Vista superior



eixo gira $d\varphi$ em dt

vel. de giro: $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Ω ⇝ velocidade angular de precessão

Da figura:

$\text{sen}(d\varphi) = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|} \simeq d\varphi$

$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{|\vec{L}|} \cdot \frac{|d\vec{L}|}{dt} = \frac{Mg\ell}{|\vec{L}|} = \frac{Mg\ell}{I_{cm}|\vec{\omega}|}$

$$\boxed{\Omega = \frac{Mg\ell}{I_{cm}|\vec{\omega}|}}$$

Neste caso

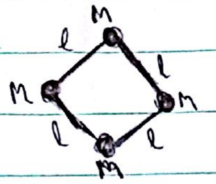
$\vec{\Omega} = \Omega\,\hat{k} = \frac{Mg\ell}{I_{cm}|\vec{\omega}|}\,\hat{k}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}}$$

Exercícios

SFísica

Lista 3

4. 

$\vec F$ cte durante um Δt

impulso linear $\vec I$

* Teorema impulso - momento linear p/ $\Delta t = t_f - t_i$

$\vec P(t_f) - \vec P(t_i) = \vec J_{extR} = \int_{t_i}^{t_f} \vec F_{extR} \, dt$

em t_i, $\vec v_{cm}(t_i) = \vec 0$, $\vec v_{cm}(t_f) = \vec v_{cmf}$

$M\vec v_{cmf} = \vec J_{extR}$ $\qquad \vec N + \vec P = \vec 0$

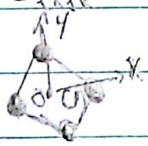
$M\vec v_{cmf} = \int_{t_i}^{t_f} \vec F \, dt = \vec J$, com $\vec F$ cte $\vec J = \vec F \Delta t$

$M = 4m \Leftrightarrow 4m\vec v_{cmf} = \vec J \Rightarrow \vec v_{cmf} = \vec J / 4m$

p/ $t > t_i$, $\vec F_{ext} = \vec 0 \Rightarrow v_{cmf}$ é cte

* Movimento de rotação // ao eixo z

$\vec\tau_{extR} = I_{cm}\vec\alpha = \cancel{\vec\tau_{N,O'}}^{\,0} + \cancel{\vec\tau_{P,O'}}^{\,0} + \vec\tau_{F,O'}$



$\vec\tau_{F,O'} = \vec r_{F,O'} \times \vec F = \frac{\ell\sqrt2}{2}\hat j \times F\hat i = -\frac{\ell\sqrt2}{2}F\hat k$

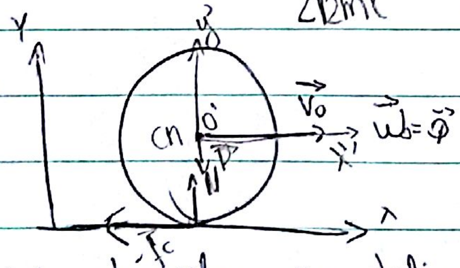
Considerando os discos como massas pontuais

$I_{cm} = 4m\left(\frac{\ell\sqrt2}{2}\right)^2 = 2m\ell^2$ $\qquad \alpha = -\frac{F}{2\sqrt2\, m\ell}$

$\vec\tau_{extR} = -\frac{\ell\sqrt2}{2}F\hat k = 2m\ell^2\vec\alpha$

em um Δt: $\vec\omega(t_f) = \cancel{\vec\omega(t_i)}^{\,0} + \vec\alpha\Delta t$

$\vec\omega_f = \vec\alpha\Delta t = \frac{F\Delta t}{2\sqrt2\, m\ell}\hat k = \frac{\sqrt2\,|\vec J|}{4m\ell}\hat k$

16. 

bola de boliche esférica

massa M, raio R

a) Δs até rolar sem deslizar $\qquad$ c) v neste t

b) tempo t em que para de deslizar

$\vec F_{ext} = M\vec a_{cm}$

$\vec\tau_{extR} = I_{cm}\vec\alpha$ (simétrica ao eixo CM)

$\vec a_{cm} = a_{cm}\hat i$, $\alpha = \alpha_z\hat k$ $\qquad \vec N + \vec P + \vec f_c = M\vec a_{cm}$

$N = Mg$ $\qquad -f_c = Ma_{cm} \Leftrightarrow a_{cm} = \frac{-f_c}{M}$

$f_c = \mu_c N \Rightarrow f_c = \mu_c Mg$ $\qquad \vec a_{cm} = -\mu_c g\hat i$

$\vec\tau_{extR,O'} = \cancel{\vec\tau_{N,O'}}^{\,0} + \cancel{\vec\tau_{P,O'}}^{\,0} + \vec\tau_{f_c,O'} = \vec r_{f_c,O'} \times \vec f_c = Rf_c\hat k$

Usando que $I_{cm} = MR^2\beta$ onde $\beta = \frac{2}{5}$

$-Rf_c\hat k = \beta MR^2\alpha_z\hat k$ $\qquad f_c = \mu_c Mg$

$\alpha_z = -\frac{\mu_c g}{\beta R}$

Quando rola sem deslizar?

$\vec{v}_p(t_R) = \vec{0}$

$\vec{v}_{CM}(t_R) = -\vec{\omega}(t_R) \times \vec{r}_p$

$v_{CM}(t_R)\hat{i} = -(\omega(t_R)\hat{k} \times (-R\hat{j})) = -\omega(t_R)R\hat{i}$

$v_{CM}(t_R)\hat{i} = -\omega(t_R)R\hat{i}$

$\Leftrightarrow t_R = \dfrac{1}{\mu_c g} \cdot \dfrac{(v_0 + \omega_0 R)}{1 + 1/\beta}$