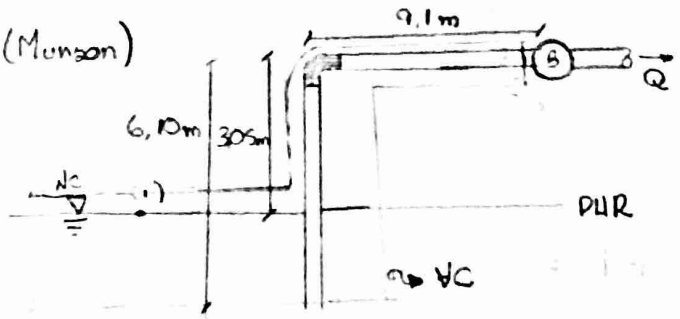
Lista 3 - Laboratório | Paulo Akira 2017.1

8.72) (Munson)



A pressão de vapor da água a 4°C é $\underbrace{8{,}722\ 10^2\ Pa}_{\text{valor abs}}$

Suponho regime permanente, fluido incompressível e escoamento é turbulento; da equação de energia:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \cancel{\frac{\alpha_1 \overline{V}_1^2}{2g}}^{0} + \cancel{z_1}^{0} + \cancel{h_B}^{0} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \overline{V}_2^2}{2g} + z_2 + \cancel{h_T}^{0} + h_L + h_m$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\overline{V}_2^2}{g} + z_2 + f\frac{L}{D_H}\cdot\frac{\overline{V}_2^2}{2g} + (\overset{0{,}8}{K_c} + \overset{1{,}5}{K_b} + K_{cot})\frac{\overline{V}_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{100\cdot 10^3}{10^4} = \frac{8{,}722\ 10^2}{10^4} + \frac{\overline{V}_2^2}{2\cdot 9{,}8} + 3{,}05 + 0{,}02\frac{15{,}2}{76{,}2\cdot 10^{-3}}\frac{\overline{V}_2^2}{2\cdot 9{,}8} + 3{,}3\frac{\overline{V}_2^2}{2\cdot 9{,}8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = 0{,}08722 + 0{,}05\overline{V}_2^2 + 3{,}05 + 0{,}2\overline{V}_2^2 + 0{,}17\overline{V}_2^2$$

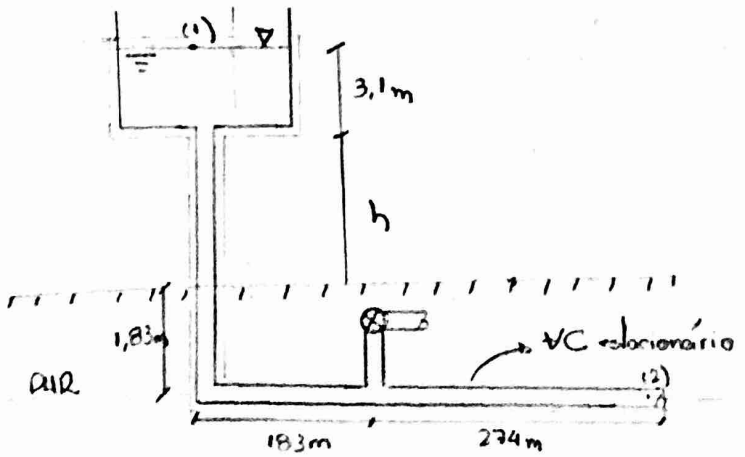
$$\Rightarrow 0{,}42\overline{V}_2^2 = 6{,}86 \Rightarrow \overline{V}_2^2 = 16{,}34 \Rightarrow \overline{V}_2 = 4{,}04\ m/s$$

Cálculo da vazão:

$$A = \frac{(76{,}2\cdot 10^{-3})^2\pi}{4} = 4{,}56\ 10^{-3}\ m^3$$

$$Q = \overline{V}_2 A = 4{,}04\cdot 4{,}56\cdot 10^{-3} = 0{,}02\ m^3/s$$

8.77) a) Para que tentemos a altura mínima devemos ter a máxima velocidade.



Suponho regime permanente, fluido incompressível e escoamento turbulento com perfil plenamente desenvolvido

$$Q = 2{,}83\ 10^{-2}\ m^3/s \Rightarrow \overline{V}\frac{\pi(152\ 10^{-3})^2}{4} = 2{,}83\ 10^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{V} = \frac{4\ 2{,}83\ 10^{-2}}{\pi(152\ 10^{-3})^2} \Rightarrow \overline{V} = 1{,}56\ m/s$$

Considerando água a 20°C temos $\nu = 1{,}004\ 10^{-6}\ (N s/m^2)$

$$Re = \frac{\overline{V}D}{\nu} = \frac{1{,}56\cdot 152\ 10^{-3}}{1{,}004\ 10^{-6}} = \underbrace{2{,}36\ 10^5}_{\text{O escoamento é turbulento!}}$$

$$\therefore f = 1{,}5\ 10^{-2}$$

Da equação de energia no VC:

$$\cancel{\frac{P_1}{\gamma}}^{0} + \cancel{\frac{\alpha_1\overline{V}_1^2}{2g}}^{0} + z_1 + \cancel{h_B}^{0} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2\overline{V}_2^2}{2g} + \cancel{z_2}^{0} + \cancel{h_T}^{0} + h_{L_T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4{,}93 + h = 41{,}9 + 0{,}12 + h_{L_T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 37{,}09 + h_{L_T} \Rightarrow h = 37{,}09 + h_L + \cancel{h_B}^{0} \quad (1)$$

$$h = 37{,}09 + \frac{0{,}015\,(461{,}93 + h)\,1{,}56^2}{152\cdot 10^{-3}\ 2\ 9{,}8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 37{,}09 + 0{,}012\,(461{,}93 + h) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 42{,}6 + 0{,}012h \Rightarrow 0{,}988h = 42{,}6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 43{,}1\ m$$

b) Considerando que o cotovelo é de raio normal com curvatura de 90° e flangeado temos $K_{cot} = 0{,}3$

Temos uma entrada de canto vivo, logo $K_{ent} = 0{,}5$

Note que há também uma bocal: $K_{bocal} = 0{,}2$

$$h_L = (K_{ent} + 15K_{cot} + K_{bocal})\frac{\overline{V}^2}{2g} = \text{escoamento alinhado}$$

$$= (0{,}5 + 15\ 0{,}3 + 0{,}2)\frac{1{,}56^2}{2\ 9{,}8} = 0{,}65\ m$$

Da equação (1):

$$0{,}988h = 42{,}6 + 0{,}65 \Rightarrow h = 43{,}77$$

8.92) (Munson)

Consideramos o ar a 25°C e que este se comporta como um fluido incompressível. Dessa forma temos $\nu = 1{,}56\cdot 10^{-5}\ (m^2/s)$ e $\gamma = 11{,}61\ kg/m^3$

Cálculo do número de Reynolds:

$$Re = \frac{\bar{V}D}{\nu} = \frac{120}{1{,}56 \cdot 10^{-5}} = \underbrace{7692307{,}69231}_{\text{escoamento turbulento}}$$

Como os tubos podem ser considerados lisos então $\varepsilon/D = 0$. Logo $f = 8{,}42 \cdot 10^{-3}$

Supondo que o regime é permanente e que o escoamento é plenamente desenvolvido, da equação da energia obtemos:

$$h_v = h_{LT} \Rightarrow h_v = 4\,0{,}3\,\frac{40^2}{2\,9{,}8} + \frac{8{,}42\,10^{-3} \cdot 60 \cdot 40^2}{3\,2 \cdot 9{,}8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_v = 111{,}7\,m \qquad \frac{\dot{W}_v}{\gamma Q} = 111{,}7 \Rightarrow \dot{W}_v = 111{,}7\;11{,}61\;10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{W}_v = 366{,}672\,kW$$

8.90) (Munson)

Supondo regime permanente, fluido incompressível e escoamento plenamente desenvolvido, da equação de energia:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \cancel{\frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g}}^{\,0} + \cancel{z_1}^{\,0} + \cancel{h_B}^{\,0} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g} + \cancel{z_2}^{\,0} + \cancel{h_T}^{\,0} + h_L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma} = \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + h_L \quad (1)$$

Calculo da velocidade:

$$Q = \bar{V}_2 \cdot A \Rightarrow 0{,}065 = \bar{V}_2 \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \bar{V}_2 = \frac{0{,}083}{D^2} \quad (2)$$

Calculo da perda de carga:

$$h_L = (\underbrace{K_{ent}}_{\text{supor entrada de canto vivo}} + 6 \cdot K_{cot}) \frac{\bar{V}_2^2}{2g} = (0{,}5 + 6 \cdot 1{,}5)\left(\frac{0{,}083}{D^2}\right)^2 \frac{1}{2g}$$

$$= \frac{3{,}34\,10^{-3}}{D^4}$$

$$h_L = f\,\frac{61}{D}\,\frac{\bar{V}^2}{2g} = \frac{2{,}14 \cdot 10^{-3}}{D^5} \quad \therefore h_{LT} = \frac{1}{D^4}\left(\frac{2{,}14\,10^{-3}}{D} + 3{,}34\,10^{-3}\right) \quad (3)$$

De (2) e (3) em (1):

$$\frac{2\,10^{-5}}{10^{-4}} = \underbrace{3{,}51\,10^{-4}}_{\text{desprezar}} + \frac{1}{D^4}\left(\frac{2{,}14\,10^{-3}}{D} + 3{,}34\,10^{-3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{1}{D^4}\left(\frac{2{,}14\,10^{-3}}{D} + 3{,}34\,10^{-3}\right) \quad (4)$$

Calculo do número de Reynolds:

$$Re = \frac{\bar{V}_2 D}{\nu} = \frac{0{,}083}{D^2} \cancel{D} \frac{1}{1{,}009\,10^{-6}} = \frac{82669{,}32}{D} \quad (5)$$

Calculo da rugosidade relativa:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}15\,10^{-3}}{D} \leftarrow \text{ferro galvanizado} \quad (6)$$

Agora basta realizar o processo interativo, propondo valores de D para calcular f na equação (4), Re na equação (5) e ε/D na equação 6. O processo deve ser realizado até ser encontrado um f que coincida com o f calculado anteriormente. Dessa forma, obteremos o diâmetro aproximado.

8.93) (Munson)

$$h_B = \frac{\dot{W}_B}{10^4 \frac{\pi D^2}{4} \bar{V}} = \frac{272 \cdot 4}{10^4 \pi (31\,10^{-3})^2 \bar{V}} = \frac{36}{\bar{V}} \quad (1)$$

Da equação de energia:

$$\cancel{\frac{p_1}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g}}^{\,0} + \cancel{z_1}^{\,0} + h_B = \cancel{\frac{p_2}{\gamma}} + \cancel{\frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g}}^{\,0} + \cancel{z_2}^{\,0} + \cancel{h_T}^{\,0} + h_{LT} \quad (2)$$

Calculo das perdas de carga:

$$h_{LT} = \frac{f L \bar{V}^2}{2Dg} + (K_{válvula} + 5\,K_{curva} + K_{ent} + K_{saída}) \frac{\bar{V}^2}{2g} =$$

$$= \frac{0{,}01\,61\,\bar{V}^2}{2\,(31\,10^{-3})\,9{,}8} + (12 + 5 \cdot 1{,}5 + 0{,}8 + 1)\frac{\bar{V}^2}{2\,9{,}8} =$$

$$= \bar{V}^2 + 1{,}09\bar{V}^2 = 2{,}09\bar{V}^2 \quad (3)$$

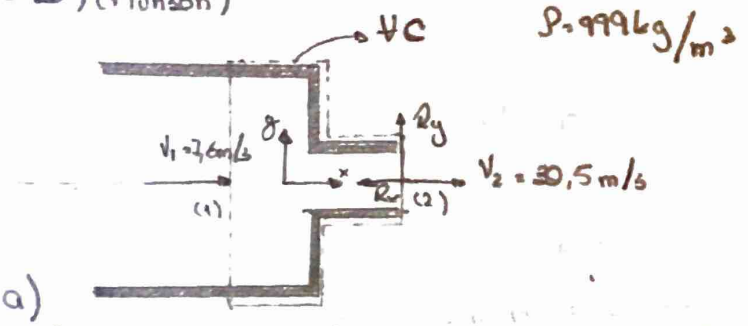
De (1) e (3) em (2):

$$\frac{36}{\bar{V}} = 2{,}09\bar{V}^2 \Rightarrow \bar{V}^3 = 17{,}22 \Rightarrow \bar{V} = 2{,}58\,m/s$$

$$\therefore Q = 2{,}58\,\pi \frac{(31 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1{,}94\;10^{-3}\,m^3/s$$

Lista 3 - Teoria

5 30) (Munson)



a)

Note que o VC é estacionário. Suponha que trata-se de um regime permanente, que o fluido é incompressível e que o escoamento é turbulento ($\beta \cong 1$).

Pela Conservação de Massa:

$$0 = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho_{vc} \cdot d\forall}^{\,0} + \int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A} \Rightarrow \cancel{\rho} Q_1 = \cancel{\rho} Q_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2 \Rightarrow 7,6 \cdot \frac{\pi \cdot (76 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 30,5 A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{7,6\pi (76 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 30,5} = 1,13 \cdot 10^{-3} m^2 \quad (1)$$

Pela ECQM$_x$:

$$F_{R_x} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u \rho d\forall}^{\,0} + \int_{SC} u \rho d\vec{A} \cdot \vec{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_x + P_1 A_1 - P_2 A_2 = -u_1 \rho \bar{V}_1 A_1 + u_2 \rho \bar{V}_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_x + P_1 A_1 - P_2 A_2 = -\bar{V}_1^2 \rho A_1 + \bar{V}_2^2 \rho A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = A_1 (P_1 + \bar{V}_1^2 \rho) - A_2 (P_2 + \bar{V}_2^2 \rho) \quad (2)$$

Calculo de A_1:

$$A_1 = \frac{\pi (76 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 4,54 \cdot 10^{-3} m^2 \quad (3)$$

De (1) e (3) em (2):

$$R_x = 4,54 \cdot 10^{-3} (5,17 \cdot 10^5 + 7,6^2 \cdot 999) - 1,13 \cdot 10^{-3} (30,5^2 \cdot 999)$$

$$R_x = 1559 N \quad \vec{R}_x = -1559 \vec{i} \, N$$

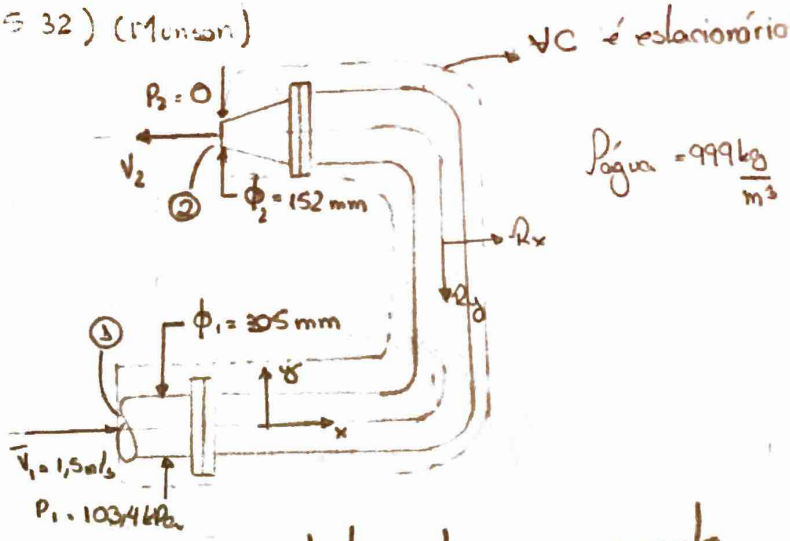
b) Pela ECQM$_x$:

$$R_x = A_1 (P_1 - \bar{V}_1^2 \rho) - \cancel{A_2 P_2}^{\,0} =$$

$$= 4,54 \cdot 10^{-3} (5,17 \cdot 10^5 + 7,6^2 \cdot 999) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = 2609,15 N$$

5 32) (Munson)



Suponhamos que trata-se de um escoamento em regime permanente, com fluido incompressível e escoamento turbulento ($\beta = 1$).

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0,305)^2}{4} = 0,0731 m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0,152)^2}{4} = 0,0181 m^2$$

Da conservação da massa:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \Rightarrow \cancel{\rho_{água}} \bar{V}_1 A_1 = \cancel{\rho_{água}} \bar{V}_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{V}_2 = \frac{\bar{V}_1 A_1}{A_2} = \frac{1,5 \cdot 0,0731}{0,0181} = 6,058 m/s$$

ECQM$_x$

$$F_{s,x} + \cancel{F_{ex}}^{\,0} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u \rho d\forall}^{\,0} + \int_{SC} u \rho \vec{V} d\vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x + P_1 A_1 - \cancel{P_2 A_2}^{\,0} = -u_1 \rho \bar{V}_1 A_1 + u_2 \rho \bar{V}_2 A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x + P_1 A_1 = -\bar{V}_1^2 \rho A_1 - \bar{V}_2^2 \rho A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -\bar{V}_1^2 \rho A_1 - \bar{V}_2^2 \rho A_2 - P_1 A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -1,5^2 \cdot 999 \cdot 0,0731 - 6,058^2 \cdot 999 \cdot 0,0181 - 103,473,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -8386,445 N$$

ECQM$_y$: (como o conjunto está montado na horizontal não há força peso na direção y)

$$R_y = -v_1 \rho \bar{V}_1 A_1 + v_2 \rho \bar{V}_2 A_2 \Rightarrow R_y = 0$$

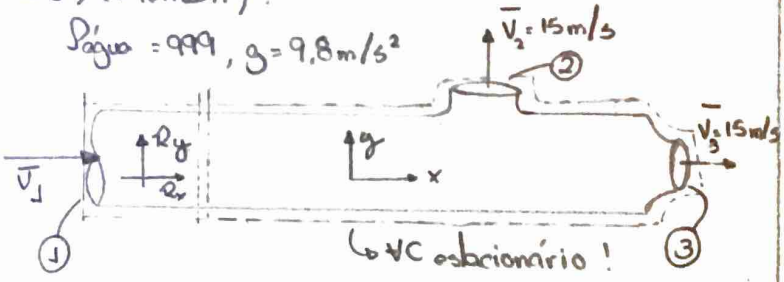
As forças aplicadas no conjunto são:

$$\vec{R}_x = 8386,445 \vec{i} \, N \quad e \quad \vec{R}_y = \vec{0}$$

Note que admitimos também que as forças viscosas são desprezíveis.

5.33) (Munson).

$\rho_{água} = 999$, $g = 9{,}8\,m/s^2$



Suponhamos regime permanente, fluido incompressível, escoamento turbulento. Também vamos desconsiderar as forças gravitacionais e as forças viscosas.

Pela conservação da massa

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \Rightarrow Q_1 = Q_2 + Q_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2 + \bar{V}_3 A_3 \Rightarrow \bar{V}_1 = \frac{\bar{V}_2 A_2 + \bar{V}_3 A_3}{A_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{V}_1 = 15\,0{,}3 + 15\,0{,}5 \Rightarrow \bar{V}_1 = 12\,m/s$$

Consideramos as perdas de carga desprezíveis:

$$\dot{m}_1\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \bar{V}_1^2}{2g} + \cancel{z_1}\right) = \dot{m}_2\left(\cancel{\frac{P_2}{\gamma}} + \frac{\alpha_2 \bar{V}_2^2}{2g} + \cancel{z_2}\right) +$$

$$+ \dot{m}_3\left(\cancel{\frac{P_3}{\gamma}} + \frac{\alpha_3 \bar{V}_3^2}{2g} + \cancel{z_3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{144}{2\cdot 9{,}8}\right) = 4{,}5 \cdot \frac{15^2}{2\,9{,}8} + 7{,}5\,\frac{15^2}{2\,9{,}8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{144}{2\,9{,}8}\right) = 51{,}66 + 86{,}1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} + \frac{144}{2\,9{,}8} = 11{,}48 \Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} = 4{,}13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = 4{,}13 \cdot 999 \cdot 9{,}8 \Rightarrow P_1 = 40433{,}526\,Pa$$

ECQMx:

$$F_{s,x} + \cancel{F_{B,x}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall} + \int_{SC} u\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x + P_1 A_1 = -u_1 \rho \bar{V}_1 A_1 + \cancel{u_2 \rho \bar{V}_2 A_2} + u_3 \rho \bar{V}_3 A_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -\bar{V}_1^2 \rho A_1 + \bar{V}_3^2 \rho A_3 - P_1 A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -12^2 \cdot 999 + 15^2\, 999\; 0{,}5 - 40433{,}526 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -71902{,}026\,N \therefore \vec{R}_x = -71902{,}026\,\vec{i}\,N$$

ECQMy:

$$F_{s,y} + \cancel{F_{B,y}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v\rho\, d\forall} + \int_{SC} v\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

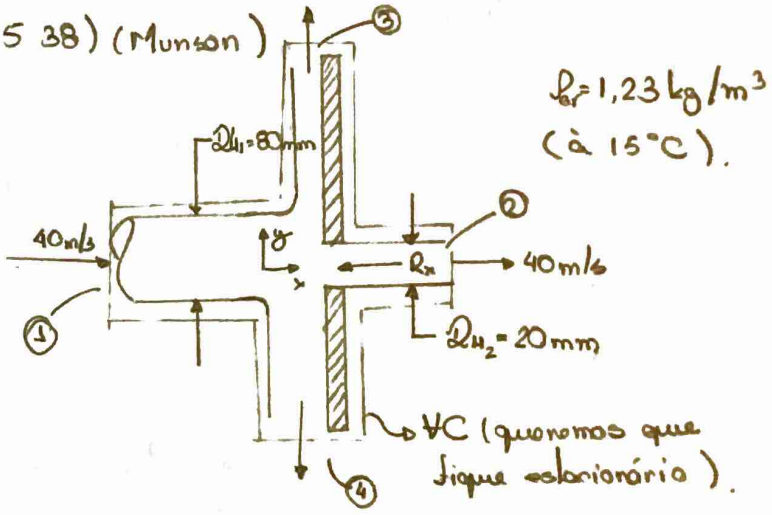
$$\Rightarrow R_y = v_2 \rho \bar{V}_2 A_2 \Rightarrow R_y = \bar{V}_2^2 \rho A_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_y = 15^2 \cdot 999 \cdot 0{,}3 \Rightarrow R_y = 67432{,}5\,N$$

$$\therefore \vec{R}_y = 67432{,}5\,\vec{j}\,N$$

As forças que atuam no tubo são $\vec{R}_x = 71902{,}026\,\vec{i}\,N$ e $\vec{R}_y = -67432{,}5\,\vec{j}\,N$.

5.38) (Munson)



Suponhamos regime permanente, com fluido incompressível e escoamento turbulento ($\alpha \cong 1$, $\beta \cong 1$).

Vamos desprezar a ação das forças viscosas.

Como todo volume de controle está submetido a mesma distribuição de pressão então $\int_A P\,dA = 0$.

$$A_1 = \frac{\pi D_{H_1}^2}{4} = \frac{\pi\,(0{,}08)^2}{4} = 5{,}026\;10^{-3}\,m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi D_{H_2}^2}{4} = \frac{\pi\,(0{,}02)^2}{4} = 0{,}3142\;10^{-3}\,m^2$$

ECQMx:

$$F_{s,x} + \cancel{F_{B,x}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, d\forall} + \int_{SC} u\rho \vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_x = -U_1 \rho \overline{V_1} A_1 + U_2 \rho \overline{V_2} \cdot A_2 \Rightarrow$

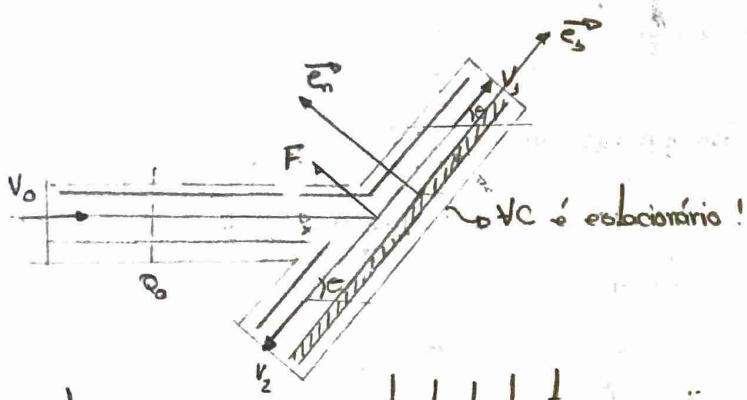
$\Rightarrow R_x = -\overline{V_1}^2 \rho A_1 + \overline{V_2}^2 \rho A_2$

$\overline{V_1} = \overline{V_2} = \overline{V} \therefore -R_x = \rho \overline{V}^2 (A_2 - A_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow R_x = 1{,}23 \; 40^2 (5{,}026 \cdot 10^{-3} - 0{,}3142 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow R_x = 9{,}273 \, N \therefore \vec{R_x} = 9{,}273 \vec{i} \, N$

6.1) (Ap 6)



Suponhamos um escoamento turbulento, em regime permanente e com fluido incompressível. Vamos desconsiderar a ação de forças viscosas e a ação de forças gravitacionais. Também desprezaremos o atrito.

Da conservação da massa:

$Q_0 = Q_1 + Q_2 \quad (I)$

Note que todo volume de controle está submetido a uma mesma distribuição de pressão, portanto, $\int_A p \, dA = 0$.

ECQM (em $\vec{e_s}$):

$$F_{0,es} + \cancel{F_{s,es}}^{=0} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}_{es} \rho \, d\forall}^{=0} + \int_{SC} \vec{v}_{es} \rho \vec{v} \, d\vec{A} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 = -\cancel{\rho} V_0 \cos\theta V_0 A_0 + \cancel{\rho} V_1 V_1 A_1 - \cancel{\rho} V_2 V_2 A_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -\cancel{V_0} Q_0 \cos\theta + \cancel{V_1} Q_1 - \cancel{V_2} Q_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_1 - Q_2 = Q_0 \cos\theta \quad (II)$

Do (I) e (II):

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q_0 \\ Q_1 - Q_2 = Q_0 \cos\theta \end{cases}$$

$2Q_1 = Q_0 (1 + \cos\theta) \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_0 (1 + \cos\theta)}{2}$

$Q_2 = Q_0 - Q_1 \Rightarrow Q_2 = Q_0 - \frac{Q_0 (1 + \cos\theta)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_2 = \frac{Q_0 (1 - \cos\theta)}{2}$

ECQM (em $\vec{e_n}$):

$$F_{0,en} + \cancel{F_{s,en}}^{=0} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}_{en} \rho \, d\forall}^{=0} + \int_{SC} \vec{v}_{en} \rho \vec{v} \, d\vec{A} \Rightarrow$$

$\Rightarrow F = V_0 \operatorname{sen}\theta \, \rho \, V_0 A \Rightarrow R = V_0 \operatorname{sen}\theta \, \rho \, Q_0$

6.2) (Ap 6)

Para que o conjunto se mantenha em equilíbrio (estacionário) devemos ter que $V_{rel} = 0 \therefore V_{xz} = V_{xyz}$.

Como o jato tem direção restrita a $\vec{e_x}$, vamos desconsiderar que o conjunto possa se desgrudar do chão. Suponemos também que trata-se de um fluido incompressível, regime permanente e escoamento turbulento ($\alpha \cong 1$ e $\beta \cong 1$).

ECQM (em $\vec{e_x}$):

$$\vec{F_{s,x}} + \cancel{\vec{F_{0,x}}}^{0} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}_{ex} \rho \, dA}^{0} + \int_{SC} \vec{v}_{ex} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_x - P_2 A_2 = V_2 \cdot \rho \cdot V_2 \cdot A_2 \Rightarrow R_x = V_2^2 \rho A_2 + P_{atm} A_2$

$\Rightarrow R_x = \frac{2(P_1 - P_{atm})}{\cancel{\rho}} \cancel{\rho} A_2 + P_{atm} \cdot A_2 \Rightarrow$

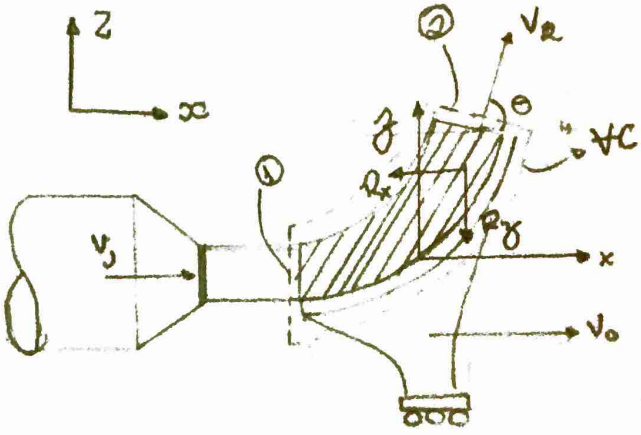
$\Rightarrow R_x = (2P_1 - P_{atm}) A_2$ (direção de $\vec{e_x}$)

$\therefore \vec{R_x} = (2P_1 - P_{atm}) A_2 \cdot \vec{e_x}$

A força que o fluido aplica no barquinho é:

$\vec{R_x'} = -(2P_1 - P_{atm}) A_2 \cdot \vec{e_x}$

6.4) (Ap 6)



Supondo escoamento turbulento, fluido incompressível e regime permanente

Da conservação da massa:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho\, d\forall}^{\,0} + \int_{SC}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\rho}Q_1 - \cancel{\rho}Q_2 \Rightarrow \underbrace{\bar{V}_1 S_1 = \bar{V}_2 S_2}_{\text{Supondo que } S_1 = S_2 = S} \Rightarrow \bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}$$

$\bar{V} = |V_j - V_0|$ (velocidade vista pela SC)

Todo volume de controle está submetido a mesma distribuição de pressão. Logo $\int_A p\, dA = 0$.

ECQM$_x$

$$F_{S,x} + \cancel{F_{B,x}}^{\,0} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, dA}^{\,0} + \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_x = U_2\cos\theta\,\rho|V_j - V_0|\cdot S - U_1\rho|V_j - V_0|S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_x = |V_j - V_0|^2\cos\theta\,\rho S - |V_j - V_0|^2\rho S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -|V_j - V_0|^2\rho S(\cos\theta - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = |V_j - V_0|^2\rho S(1 - \cos\theta)$$

ECQM$_z$:

$$F_{S,z} + F_{B,z} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v\rho\, dA}^{\,0} + \int_{SC} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_y + F_{B,z} = v_2\,\mathrm{sen}\theta\,\rho|V_j - V_0|S + \cancel{-v_1\rho|V_j - V_0|S}^{\,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_y - m_{VC}\,g = |V_j - V_0|^2\,\mathrm{sen}\theta\,\rho S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_y = -m_{VC}g - |V_j - V_0|^2\,\mathrm{sen}\theta\,\rho S \Rightarrow$$

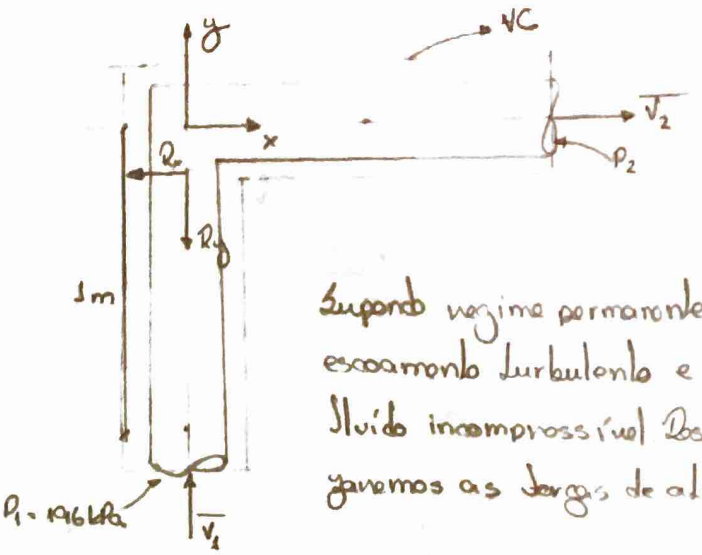
$$\Rightarrow R_y = -\left[m_{VC}g + |V_j - V_0|^2\,\mathrm{sen}\theta\,\rho S\right]$$

6.10) (Ap6)

$A = 20\,cm^2 = 20\cdot 10^{-4}\,m^2$

$Q = 20\,L/s = 20\cdot 10^{-3}\,m^3/s$

$h_L = 1\,m$



Supondo regime permanente, escoamento turbulento e fluido incompressível desprezamos as perdas de atrito

Da equação de energia

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1\bar{V}_1^2}{2g} + \cancel{z_1}^{\,0} + \cancel{h_B}^{\,0} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2\bar{V}_2^2}{2g} + \cancel{z_2}^{\,0} + \cancel{h_T}^{\,0} + h_L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{\gamma} = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\bar{V}_1^2}{2g} - \frac{\bar{V}_2^2}{2g} - h_L \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{\rho\bar{V}_1^2}{2} - \frac{\rho\bar{V}_2^2}{2} - \gamma h_L \quad (I)$$

Da conservação da massa:

$$\rho Q_1 = \rho Q_2 \Rightarrow \bar{V}_1\cancel{A_1} = \bar{V}_2\cancel{A_2} \Rightarrow \bar{V}_1 = \bar{V}_2 \quad (II)$$

De (II) em (I):

$$P_2 = P_1 - \gamma h_L \Rightarrow P_2 = 196\cdot 10^3 - 10^4 = 186\,kPa$$

ECQM$_x$:

$$F_{S,x} + \cancel{F_{B,x}}^{\,0} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u\rho\, dA}^{\,0} + \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_x - P_2 A = U_2\,\rho\,U_2 A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_x - 186\cdot 10^3\cdot 2\cdot 10^{-3} = \bar{V}_2^2\rho A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -186\cdot 2 - \bar{V}_2^2\rho A \quad (III)$$

De (II): $Q = A\cdot\bar{V} \Rightarrow 20\cdot\cancel{10^{-3}} = 2\cdot\cancel{10^{-3}}\bar{V} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{V} = 10\,m/s \quad (IV)$$

De (IV) em (III):

$$R_x = -372 - 100\cdot 1000\cdot 2\cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = -372 - 200 \Rightarrow R_x = -572\,N$$

ECQM$_y$:

$$F_{S,y} + \cancel{F_{B,y}}^{\,0} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} v\rho\, dA}^{\,0} + \int_{SC} v\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R_y + P_1 A = -v_1\rho v_1 A \Rightarrow$$

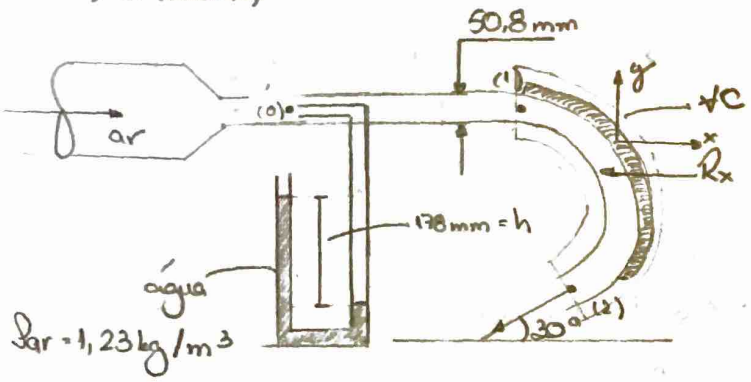
$\Rightarrow R_y = 196 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 10^2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow R_y = 392 + 200 \Rightarrow R_y = 592\,N$

A força causada pelo escoamento no tubo é:

$\vec{F} = -572\,\vec{i} + 592\,\vec{j}\ N$.

5.62) (Munson)



$\rho_{ar} = 1{,}23\,kg/m^3$

Supondo um escoamento turbulento, com fluido incompressível e em regime permanente. Vamos desconsiderar as perdas por atrito e as trocas de calor e realização de trabalho na linha de corrente que liga (0) e (1).

Pela Lei de Stevin:

$p_0 = \gamma_{água} \cdot h$

Pela Equação de Bernoulli entre (0) e (1):

$$\frac{p_0}{\rho_{ar}} + \cancel{z_0} + \cancel{\frac{V_0^2}{2}} = \cancel{\frac{p_1}{\rho_{ar}}} + \cancel{z_1} + \frac{V_1^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2} = \frac{\gamma_{água}\, h}{\rho_{ar}} \Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{2h\,\gamma_{água}}{\rho_{ar}}}$$

Todo o VC está sob a mesma distribuição de pressão

Logo $\int_A p\,dA = 0$.

Da conservação da massa:

$\rho_{ar} Q_2 - \rho_{ar} Q_1 = 0 \Rightarrow Q_2 = Q_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = V_2$

$$A = \frac{\pi (50{,}8 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 2{,}03 \cdot 10^{-3}\,m^2$$

<u>ECQMx</u>:

$$F_{s,x} + \cancel{F_{b,x}} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} u \rho\, dA} + \int_{SC} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \Rightarrow$$

$$-R_x = -V_2 \cos 30 \cdot \rho_{ar} V_2 A - V_1 \rho_{ar} V_1 A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_x = V_2^2 \cdot \cos 30° \cdot \rho_{ar} A + V_1^2 \rho_{ar} A \quad (I)$$

Calculo da velocidade:

$$V_1 = V_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 178 \cdot 10^{-3} \cdot 10000}{1{,}23}} = \sqrt{289{,}4}\ m/s \quad (II)$$

De (II) em (I):

$$R_x = 289{,}4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1{,}23 \cdot 2{,}03 \cdot 10^{-3} + 289{,}4 \cdot 1{,}23 \cdot 2{,}03 \cdot 10^{-3}$$

$R_x = 13{,}5\,N$

6.1) (Munson)

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} =$$

$$= (2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}) + 2xt\,2t\,\vec{i} + (-2yt) \cdot (-2t)\,\vec{j} =$$

$$= (2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j}) + 4xt^2\,\vec{i} + 4yt^2\,\vec{j} =$$

$$= (2x + 4xt^2)\,\vec{i} + (4yt^2 - 2y)\,\vec{j}$$

Aceleração Local: $\begin{cases} a_{xL} = 2x \\ a_{yL} = -2y \end{cases}$

Aceleração Convectiva: $\begin{cases} a_{xc} = 4xt^2 \\ a_{yc} = 4yt^2 \end{cases}$

No ponto $(x, y) = (1, 1)$ em $t = 0$:

$\vec{V} = \vec{0}$

$\vec{a} = 2\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$

6.4) (Munson)

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2x + x + z - 3x - z$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ ∴ trata-se de um escoamento de fluído incompressível.

b) $$\vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{2\omega_x}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{2\omega_y}\vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{2\omega_z}\vec{k}$$

$2\omega_x = 0 - y - 2z = -y - 2z$

$2\omega_y = 2z - 3z = -z$ ∴ $\vec{\xi} = (-y - 2z)\,\vec{i} + z\,\vec{j} + (-y)\,\vec{k}$

$2\omega_z = y - 2y = -y$

Como $\vec{\xi} \neq \vec{0}$ o escoamento não é irrotacional fora da origem do sistema de coordenadas

6.5) (Munson)

$u = -xy^3$; $v = y^4$; $w = 0$

$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 3xy^2\right) = \frac{3}{2}xy^2$

$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$

$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$

$\vec{\xi} = 2\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\xi} = 3xy^2\vec{k}$

Como $\xi \neq 0$ então o escoamento não é irrotacional

6.6) (Munson)

$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}^{0} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}(a + 2by)$

$\omega_y = \omega_x = 0$

$\vec{\xi} = -(a + 2by)\vec{k}$ o escoamento não é irrotacional

$\dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = a + 2by$ não há valores para $a \neq 0$ e $b \neq 0$ para que haja deformação angular nula.

6.7) (Munson)

$\vec{\nabla}\,\vec{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + e = 0 \Leftrightarrow a = -e$ para que o escoamento seja de um fluído incompressível.

6.8) (Munson)

a) $\vec{\nabla}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (fluído incompressível)

b) $\omega_x = \omega_y = 0$

$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{U}{2b}$ $\vec{\omega} = -\frac{U}{2b}\vec{k}$

c) $\vec{\xi} = 2\vec{\omega} = -\frac{U}{b}\vec{k}$ (não é irrotacional)

d) $\dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{b}$

6.11) (Munson)

$\omega_z = \frac{1}{2}(2x - 2x) = 0$

$\omega_y = \frac{1}{2}(0 - 0) = 0 = \omega_x$

$\vec{\xi} = 2\vec{\omega} = \vec{0}$ o escoamento é irrotacional

Supondo que trata-se de regime permanente:

$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}^{0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{2y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{-2y} = 0$ a equação da conservação da massa é respeitada.

6.69) (Munson)

Para glicerina a 20°C temos $\mu = 1{,}5\ Ns/m^2$

$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \sigma_{xx} = -p + 3(12y^2 - 18x^2)$

$\Rightarrow \sigma_{xx} = -p + 36y^2 - 64x^2$

$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \sigma_{yy} = -p + 3(18x^2 - 12y^2)$

$\Rightarrow \sigma_{yy} = -p + 64x^2 - 36y^2$

$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 1{,}5(24xy + 36xy) \Rightarrow$

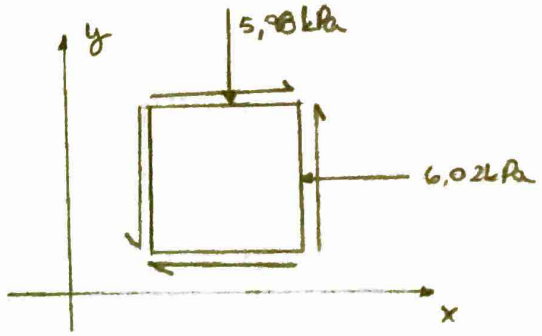
$\Rightarrow \tau_{xy} = 90xy$

No ponto $(0{,}5; 1{,}0)$ m

$\sigma_{xx} = -6000 + 20 = -5{,}98\ kPa$

$\sigma_{yy} = -6000 - 20 = -6{,}02\ kPa$

$\tau_{xy} = 45\ Pa$



6.72) (Munson)

a) Supondo que trata-se de regime permanente e sabendo que o fluído é incompressível, temos da conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

b) $$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \cancel{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}^{0} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}}^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}^{0}\right)\vec{i} + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\vec{j} \quad (1)$$

Na direção x: $a_x = x^2 \cdot 2x = 2x^3$

c) Da Equação de Navier-Stokes na direção x:

$$\rho a_x = \cancel{\rho g_x}^{0} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x} \Rightarrow \rho x^3 = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 2\mu - 2\rho x^3$$

6.71) (Munson)

Lembrando que $\xi_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

Tratando-se de um escoamento bidimensional no plano xy então $w = 0$.

As equações de Navier-Stokes são:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (2)$$

Derivando (1) em relação a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (3)$$

Derivando (2) em relação a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (4)$$

Subtraindo (3) de (4):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] \Rightarrow$$

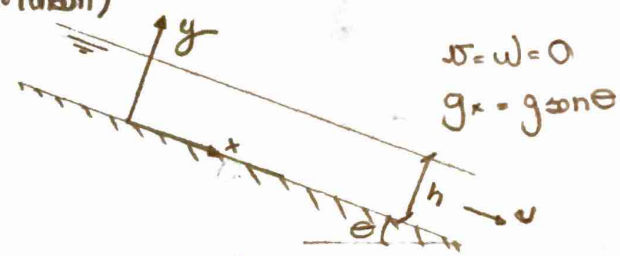
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial t} + u\frac{\partial \xi_z}{\partial x} + v\frac{\partial \xi_z}{\partial y} = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\xi_z\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{D\xi_z}{Dt} = \nu\nabla^2\xi_z$$

6.76) (Munson)



$v = w = 0$

$g_x = g\,\text{sen}\,\theta$

Considerando que trata-se de regime permanente, pela Conservação da Massa

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Calculo da aceleração na direção x:

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{0} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0} = 0$$

Pela equação de Navier-Stokes na direção x:

$$0 = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{0} + \rho g_x + \mu\nabla^2 u = \rho g_x + \mu\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{0}$$

0 (superfície livre)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu} \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}\cdot y + C_1 \quad (1)$$

Condição de contorno:

$$\tau_{xy}(h) = \mu\frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 0$$

$$0 = -\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}h + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}h$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}y + \frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}h \quad (2)$$

Integrando (2):

$$u(y) = -\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{2\mu}\cdot y^2 + \frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}\cdot hy + C_2 \quad (3)$$

Condição de Contorno:

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\therefore u(y) = -\frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{2\mu}y^2 + \frac{\rho g\,\text{sen}\,\theta}{\mu}hy$$

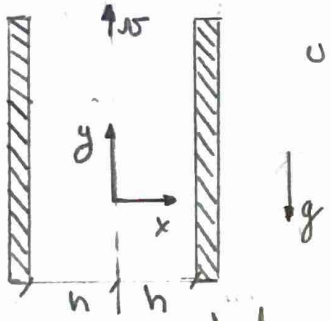
Seja l o comprimento do plano inclinado.

$$Q = \int_{SC} v(y)\, dA \Rightarrow Q = \int_0^h \left(-\frac{\rho g \sin\theta}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} h y\right) l\, dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} \int_0^h h y - \frac{y^2}{2}\, dy = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu}\left[\frac{h y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_0^h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{\rho g \sin\theta}{\mu} \frac{h^3}{3}, \text{ onde } q = \frac{Q}{l}$$

6.77) (Munson)



$u = 0,\ w = 0$

Vamos supor que trata-se de regime permanente.

Conservação da Massa:

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equação de Navier-Stokes na direção y:

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}^{0} + \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}}^{0} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}}^{0} + \cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}^{0}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g + \mu \nabla^2 v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \nabla^2 v = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \Rightarrow \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}^{0} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}^{0}\right) =$$

$$= \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right) \quad (1)$$

0 (placas infinitas)

Integrando (1):

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right) x + C_1 \quad (2)$$

Condição de contorno (velocidade máxima)

Por simetria temos que $x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = C_1$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right) x \quad (3)$$

Integrando (3):

$$v(x) = \int \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right) x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)\frac{x^2}{2} + C_2$$

Condição de contorno:

$$x = h \Rightarrow v(h) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)\frac{h^2}{2} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)\frac{h^2}{2}$$

$$\therefore v(x) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)(x^2 - h^2)$$

Seja l o comprimento da placa.

$$Q = \int_{SC} v(x)\, dA \Rightarrow q = \int_{-h}^{h} \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)(x^2 - h^2)\, dx$$

$$\Rightarrow q = \left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)\left(\frac{x^3}{3} - h^2 x\right)\right]_{-h}^{h} =$$

$$= \left[\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right)\left(\frac{h^3}{3} - h^3\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{3\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right) 2h^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{2hl} = -\frac{1}{3\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g\right) h^2 \Rightarrow \frac{-3\bar{v}\mu}{h^2} = \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{3\bar{v}\mu}{h^2} - \rho g$$

6.80) (Munson)

Supondo que trata-se de regime permanente e escoamento laminar, então pela Conservação da Massa

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$w = v = 0$

Eq. de Navier Stokes na direção x:

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}^{0} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0}\right) = \cancel{\rho g}^{0} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{0}\right)$$

0 (placas infinitas)

Do enunciado, sabemos que o gradiente de pressão na direção x é 0. Então $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (1)

A solução de (1) tem forma: $u(y) = Ay + B$ (Integrar (1) duas vezes)

Condições de Contorno:

do Princípio de Aderência Completa.

$y=0 \Rightarrow u(0) = -U_2 \therefore -U_2 = B$

$y=b \Rightarrow u(b) = U_1 \therefore U_1 = A \cdot b + (-U_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{U_1 + U_2}{b}$

O perfil de velocidades do escoamento é:

$$u(y) = \left(\frac{U_1+U_2}{b}\right) y - U_2 .$$

6.81) (Munson)

Supondo escoamento em regime permanente, então pela Conservação de massa:

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}^{0} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}^{0} = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (perfil de velocidades só depende de y)

Sabendo que o gradiente de pressão na direção x é zero e que as placas são infinitas; pela Equação de Navier Stokes na direção x:

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}^{0} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}^{0} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0}\right) = \cancel{\rho g_x}^{0} - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}}^{0} + \mu_i \nabla^2 u, \text{ com } i=1,2$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1).$$

Integrando duas vezes: $\begin{cases} u_1(y) = A_1 y + B_1 \\ u_2(y) = A_2 y + B_2 \end{cases}$

Condições de Contorno:

para $y=0$: $u_2(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$

para $y=2h$: $u_1(2h) = U \Rightarrow 2A_1 h + B_1 = U \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1 = U - 2A_1 h$

para $y=h$: $u_1 = u_2 \Rightarrow A_1 h - 2A_1 h + U = A_2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow -A_1 h + U = A_2 h \Rightarrow A_2 = -A_1 + \frac{U}{h}$

Note que na interface as tensões de cisalhamento são contínuas:

$\tau_{xy_1} = \mu_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} = A_1 \mu_1$

$\tau_{xy_2} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = A_2 \cdot \mu_2$

$\therefore A_1 \mu_1 = A_2 \mu_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = A_2 \frac{\mu_2}{\mu_1}$

$\therefore A_2 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} A_2 + \frac{U}{h} \Rightarrow A_2 = \frac{U/h}{(1+\mu_2/\mu_1)}$

$\therefore u(h) = \frac{U/h}{(1+\mu_2/\mu_1)} \cdot h \Rightarrow u(h) = \frac{U}{(1+\mu_2/\mu_1)}$