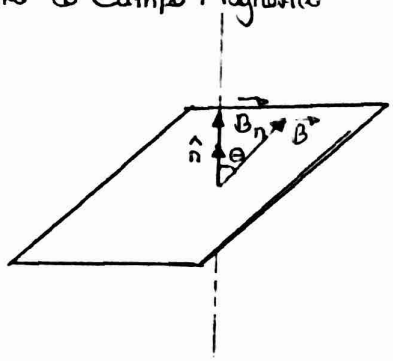
Física 3 - Resumo P3 2017.1

1) Fluxo do Campo Magnético



$d\vec{B} = \vec{B} \cdot d\vec{A}$, $d\vec{A} = dA\,\hat{n}$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}}$$

$[\phi_B]$ = Weber = Wb

- se a superfície for fechada aponta para fora da superfície
- se a superfície for aberta deve ser definido
- se a superfície for aberta ou fechada com corrente então o sentido de $\hat{n}$ é dado pela regra da mão-direita em que o polegar indica $\hat{n}$ e os demais dedos a corrente.

→ Lei de Faraday: se um condutor forma um circuito fechado e se existe um fluxo magnético dependente do tempo que atravessa o circuito será induzido uma corrente elétrica.

Faraday observou que:

(1) a intensidade da corrente não depende do modo como o fluxo varia mas sim da velocidade de variação:

$$I \sim \frac{d\phi}{dt};$$

(2) se a derivada $\frac{d\phi}{dt}$ muda de sinal, então a corrente induzida muda de sentido;

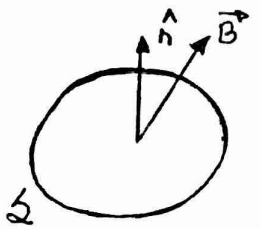
(3) a corrente induzida é proporcional a variação temporal do fluxo de $\vec{B}$ e não de $\vec{H}$.

<u>Lei de Lens</u>: o sentido da corrente induzida é aquele que se opõe a variação do fluxo do campo magnético.

↳ a corrente surge para gerar um campo de forma a compensar a variação do campo magnético.

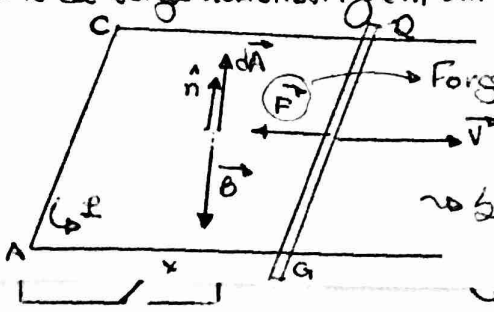
↳ surge uma força contrária ao movimento.

Supondo $\vec{B}$ atravessando uma superfície S determinada por um circuito elétrico, e que a resistência elétrica desse circuito é R:



$$I = -\frac{1}{R} \cdot \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow I \cdot R = -\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}}$$ ← Corrente Induzida

→ Surgimento da força eletromotriz em um condutor em movimento.

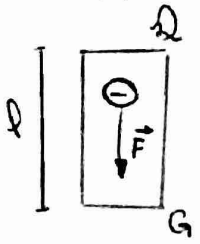


→ Força de Ampère: se opõe ao movimento

↳ Surge um campo contrário para compensar o aumento do fluxo.

↳ força eletromotriz ...

Na barra DG:



$$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B}, \quad \vec{E_n} = \vec{F}/q = \vec{v}\wedge\vec{B}$$

$$\mathcal{E}_{DG} = \int_G^D \vec{E_n}\cdot d\vec{l} = \int_G^D \vec{v}\wedge\vec{B}\cdot d\vec{l} = vBl \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{DG} = VBL}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_{DG} = \frac{dx}{dt}\cdot B\cdot l = \frac{d}{dt}(xBl)$$

Definindo $\phi = (-)xBl \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{DG} = -\frac{d\phi}{dt}}$ → responsável pelo surgimento de uma corrente induzida.

$\vec{n}$ e $\vec{B}$ têm sentidos opostos

Note que o surgimento da corrente induzida (e consequentemente o campo magnético) se deve basicamente ao movimento do condutor e ao campo $\vec{B}$. No entanto, se o condutor estiver em repouso podemos variar o campo magnético no tempo que resultará na indução de um campo ~~magné~~ elétrico no condutor e consequentemente surgirá uma corrente induzida. Caso não houvesse condutor mas existisse variação de campo magnético no tempo, ainda sim haverá variação ~~do fluxo~~ ~~em~~ produção do campo elétrico, mostrando que a Lei de Faraday é universal e nos da uma relação entre campo magnético e elétrico.

<u>Obs</u> (gerador elétrico): seja um rotor que contém N espiras de áreas iguais a A que gira em um campo magnético com velocidade angular ω constante. Seja ainda θ o ângulo entre B e A.

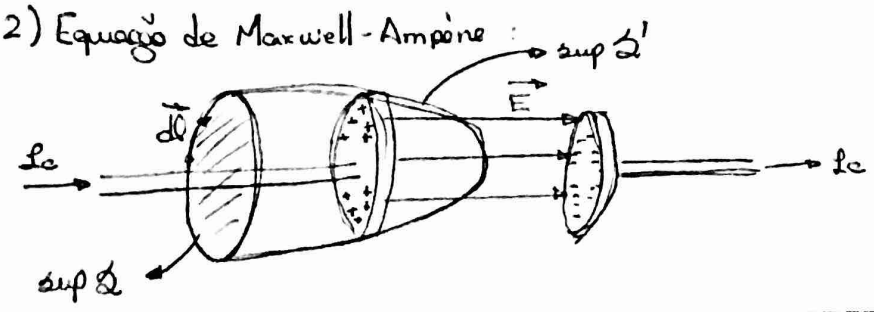
$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\theta = BA\cos(\omega t)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -NAB\cdot\frac{d}{dt}(\cos\omega t) \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = NAB\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}(\omega t)}$$

O campo elétrico que surge devido a variação do campo magnético é de origem não eletrostática. Portanto, possui linhas fechadas (é um campo de vórtice) e assim consegue manter o movimento contínuo das cargas tal que a corrente se torna estacionária. Temos:

$$\underbrace{\oint \vec{E_n}\cdot d\vec{A} = 0}_{\text{Linhas fechadas}} \quad e \quad \underbrace{\oint \vec{E_n}\cdot d\vec{l} \neq 0}_{\text{Depende da trajetória}}$$

2) Equação de Maxwell-Ampère:



Maxwell acreditava que como campo magnético variando no tempo produz campo elétrico o contrário também deveria ser verdadeiro. Ao aplicarmos a Lei de Ampère na sup S' é como se não houvesse campo elétrico, ~~que~~

o que leva a crer que a Lei de Ampère depende da superfície escolhida (o que em teoria é falso)

Lei de Ampère - Maxwell:

$$\boxed{\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \mu_0 I_c + \mu_0 \frac{d}{dt}\Phi_D}$$

, onde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ = corrente de deslocamento e $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ = densidade da corrente de deslocamento.

3) Auto indutância

def: crescimento lento da corrente no circuito devido ao surgimento de uma corrente induzida (a circulação da corrente induz um campo magnético que induz uma outra corrente).

$\hookrightarrow \phi \propto B \propto I \Rightarrow \varepsilon_{ind} \propto \frac{dI}{dt} \therefore$ $\boxed{\varepsilon_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}}$, onde L = indutância (constante de proporcionalidade da força eletromotriz induzida com a variação de corrente) $[L]$ = henry = H

Obs: L é uma constante positiva que só depende da geometria do circuito: $\boxed{L = -\frac{\varepsilon_{ind}}{dI/dt}}$

4) Indutância mútua:

def: a variação temporal do fluxo magnético em ~~uma corrente~~ circuito fechado ocorre devido a variação temporal da corrente (auto indutância). Assim, parte das linhas de campo deste ~~corrente~~ circuito podem atravessar um circuito vizinho, induzindo uma força eletromotriz.

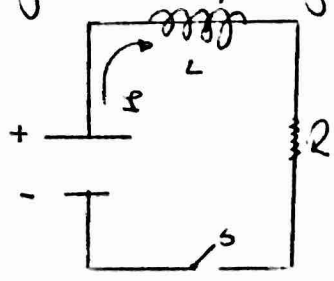
Seja I_1 e N_1, a corrente e o número de espiras no circuito ①. Suponha que parte das linhas de campo criado por ① cruzam o circuito ② que possui N_2 espiras e que $\Phi_{1,2}$ é o fluxo magnético criado por ① que atravessa ②.

$$\boxed{M_{1,2} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{1,2}}{I_1}}$$

Supondo que I_1 varia no tempo: $\varepsilon_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi_{1,2}}{dt} \Rightarrow \varepsilon_2 = -\cancel{N_2} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{M_{1,2} \cdot I_1}{\cancel{N_2}}\right) = -M_{1,2} \cdot \frac{dI_1}{dt}$

Analogamente, $\varepsilon_1 = -M_{2,1} \cdot \frac{dI_2}{dt}$. Porém $M_{1,2} = M_{2,1}$: $\boxed{\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}}$ e $\boxed{\varepsilon_1 = -M \cdot \frac{dI_2}{dt}}$, $[M]$ = H

5) Energia do Campo Magnético:



Ao ligar a chave, a corrente começa a crescer e com isso surgirá uma força eletromotriz induzida ε_{ind}.

$$\boxed{\varepsilon_0 = R \cdot I - \varepsilon_{ind}}$$

$\hookrightarrow$ força eletromotriz da bateria

O trabalho realizado pela bateria para fazer com que a corrente cresça é $\boxed{W_{bat} = \frac{LI^2}{2}}$

A energia armazenada no campo magnético será, portanto: $\boxed{U_B = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\cdot V}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow u_B = \frac{U_B}{V} \Rightarrow \boxed{u_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{\mu_0}}$, onde u_B = densidade volumétrica da energia.

Para o caso em que $\vec{B}$ não é uniforme: $\boxed{U_B = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{B^2}{\mu_0}\, dV}$

6) Fluxo de um vetor através de uma superfície e Circulação de um vetor ao longo de um caminho

$$\text{div}(\vec{A}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Phi_A}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V}\oint \vec{A}\cdot d\vec{A}$$, onde $\vec{A}$ é um campo vetorial qualquer

$$\text{div}(\vec{A}) = \nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}$$

↳ o divergente caracteriza a densidade volumétrica do fluxo de um vetor através de uma superfície fechada ≅ ele nos dá a informação de ~~cada partícula~~ quanto cada partícula contribui para o fluxo na superfície

↳ o divergente nos dá a informação de fontes ou sumidouros da grandeza vetorial $\vec{A}$.

$$\text{rot}(\vec{A})_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\oint \vec{A}\, d\vec{l}}{\Delta A} \quad \therefore \text{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \wedge \vec{A}$$

↳ o rotacional de um campo vetorial caracteriza o grau de vorticidade deste campo. Isto significa que se o rotacional é diferente de zero, então esse campo vetorial apresenta tendência de rotação.

Teorema de Stokes: $\oint \vec{A}\, d\vec{l} = \int_S \text{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{A}$; Teorema de Gauss: $\oint \vec{A}\, d\vec{A} = \int_V \text{div}\,\vec{A}\, dV$

<u>Equações de Maxwell</u> na forma integral:

$$\begin{cases} \underbrace{\oint \vec{E}\, d\vec{l}}_{E_{ind}} = -\underbrace{\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{A}}_{\frac{d\Phi}{dt}} \quad (1) \\ \oint \vec{B}\, d\vec{A} = 0 \quad (2) \\ \oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\, d\vec{A} + \mu_0 \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\vec{A} \quad (3) \\ \oint \underbrace{\vec{D}}_{\varepsilon_0 \vec{E}}\cdot d\vec{A} = \int_V \rho\, dV \quad (4) \end{cases}$$

→ Lei da indução de Faraday: fontes de campo elétrico são as variações temporais do campo magnético

→ Lei de Gauss para o Magnetismo: não existem monopolos magnéticos

→ Lei de Maxwell-Ampère: fontes de campo magnéticos

→ Lei de Gauss para a Eletricidade: fontes de campos elétricos são as cargas elétricas

Aplicando Stokes em (1) e (3):

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = \int_S \text{rot}\,\vec{E}\, d\vec{A} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{A} \Rightarrow \int_S \text{rot}\,\vec{E}\, d\vec{A} + \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \text{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1a)$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_S J\, d\vec{A} + \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\vec{A} = \int_S \text{rot}\,\vec{B}\, d\vec{A} \Leftrightarrow \text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \quad (3a)$$

Aplicando Gauss em (4) e (2):

$$\oint \vec{D}\, d\vec{A} = \int_V \text{div}\,\vec{D}\, dV = \int_V \rho\, dV \Rightarrow \int_V (\text{div}\,\vec{D} - \rho)\, dV = 0 \Leftrightarrow \text{div}\,\vec{D} = \rho \quad (4a)$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{A} = \int_V \text{div}\,\vec{B}\, dV = 0 \Leftrightarrow \text{div}\,\vec{B} = 0 \quad (2a)$$

De (1a), (2a), (3a) e (4a) temos as <u>Equações de Maxwell na forma diferencial</u>:

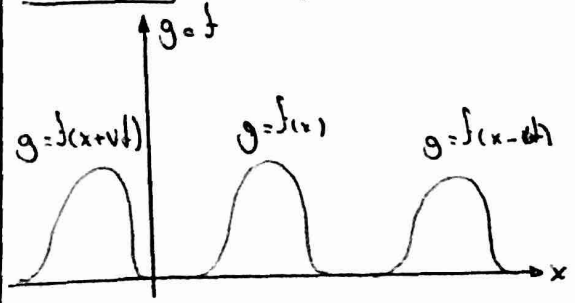
$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \\ \text{div}\,\vec{D} = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \text{Lei de Faraday} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \text{Lei de Gauss para o magnetismo} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \longrightarrow \text{Lei de Maxwell-Ampère} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \longrightarrow \text{Lei de Gauss} \end{cases}$$

<u>Obs</u>: relações importantes para a resolução das Equações de Maxwell:

(1) $\vec{D} = k\, \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ (2) $\vec{B} = k_m \cdot \mu_0 \vec{H}$ (3) $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

(7) Ondas Eletromagnéticas

<u>Lembrando</u> (ondas):



$\longrightarrow g(x,t) = f(x \pm vt)$

v = velocidade de fase

t = tempo

Se as ondas tivessem uma mudança no perfil então teríamos uma dispersão

Se a onda se desloca tanto para a esquerda quanto para a direita, então $g(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$. Mas f_1 e f_2 dependem das condições iniciais do problema. Para tirar esta dependência e obter uma equação para qualquer perturbação que varia no espaço, vamos derivar $g(x,t) = f(x - vt)$ em relação a x e a t. Daí obtemos:

toda função que satisfaça essa eq. é uma onda.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0,$$ Se a perturbação se propaga no espaço:

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \left(-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right) = 0}$$

eq. da onda

Ondas eletromagnéticas planas e monocromáticas no vácuo:

Supondo $\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$ → vácuo ⇒

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1) \\ \nabla \vec{B} = 0 & (2) \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (3) \\ \nabla \vec{D} = 0 & (4) \end{cases}$$

← Lei de Faraday

← Lei de Maxwell-Ampère → $\nabla \wedge \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

De (1): $\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = -\nabla(\nabla \vec{E}) + (\nabla \cdot \nabla)\vec{E} = \nabla^2 \vec{E} \therefore \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \wedge \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (5)

De (3): $\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \vec{H}) = \dfrac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla \wedge \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (6)

De (6) em (5): $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$.

Mas $\boxed{v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$: $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \dfrac{1}{v} \cdot \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$ (7) ⇒ Equação da onda para o campo ~~magnético~~ elétrico

$\cong 3 \cdot 10^8 m/s = c$

Analogamente, para o campo magnético: $\nabla^2 B - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$ (8) ⇒ Equação da onda para o campo magnético

Uma solução para (7) é: $E(\vec{r}, t) = E_0 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi)$

E_0 → amplitude; ϕ → fase inicial (não depende do tempo nem posição → cte).

fase de onda = cte. ⇒ plano perpendicular a $\vec{k}$

$\vec{k}$ ≡ vetor onda que indica a direção de propagação da onda harmônica.

$\|\vec{k}\|$ = número de onda

$v = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{k = \dfrac{v}{\omega}}$ → velocidade do movimento dos planos

$\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{k} \Rightarrow v = \dfrac{2\pi}{\omega} = \lambda \Rightarrow \lambda = vT}$, onde $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

λ → comprimento de onda → período espacial

$\boxed{\omega = \dfrac{v \cdot 2\pi}{\lambda}}$

Obs: quando trabalhamos na forma exponencial:

$\dfrac{\partial}{\partial t} E(\vec{r}, t) = -i\omega E_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = i\omega E(\vec{r}, t)$

$\dfrac{\partial}{\partial x} \vec{E}(\vec{r}, t) = i k_x E(\vec{r}, t)$

$$\therefore \begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} = -\dfrac{\omega}{c^2} \vec{E} \\ \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \end{cases}$$

$\vec{E}$ é perpendicular a $\vec{B}$.

$\boxed{k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}}$

$\boxed{E = cB}$ ⇒ $E \gg B$

⇒ Energia da onda eletromagnética:

$\boxed{\dfrac{du}{dt} = -\nabla \cdot \vec{S}}$, onde $\boxed{\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \cdot \vec{E} \wedge \vec{B}}$

$\vec{S}$ → Vetor Poyting

$\vec{S}$ → densidade de fluxo de energia do campo eletromagnético

$\dfrac{d}{dt} \int_V u \, dV = -\int_V \operatorname{div} \vec{S} \, dV$ ⇒ Lei de Gauss

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_V u \, dV = -\oint \operatorname{div} \vec{S} \, d\vec{A}}$$

⇒ Lei da conservação de energia da onda eletromagnética.

$\int_V u \, dV$ → energia contida no volume V

$\oint \operatorname{div} \vec{S} \, d\vec{A}$ → fluxo que atravessa a superfície que determina o volume V.