Modelos de Sistemas Dinâmicos

1) Definição

Um modelo matemático de um sistema dinâmico é um conjunto de eq. diferenciais que representam o comportamento temporal do sistema.

2) Utilização de modelos dinâmicos

- Simulação do seu comportamento
- Treinamento de operador
- Análise dinâmica
- Projeto de controlador
- Animação

3) Classificação dos modelos (tipos)

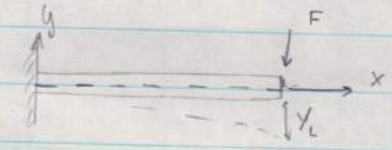
→ Existem várias formas de classificação

- Modelos estáticos
- Modelos dinâmicos

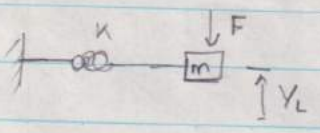
• Modelos estáticos são utilizados para projeto do sistema.

- Modelos de parâmetros distribuídos (viga)
- Modelos de parâmetros concentrados (suspensão)

Viga:



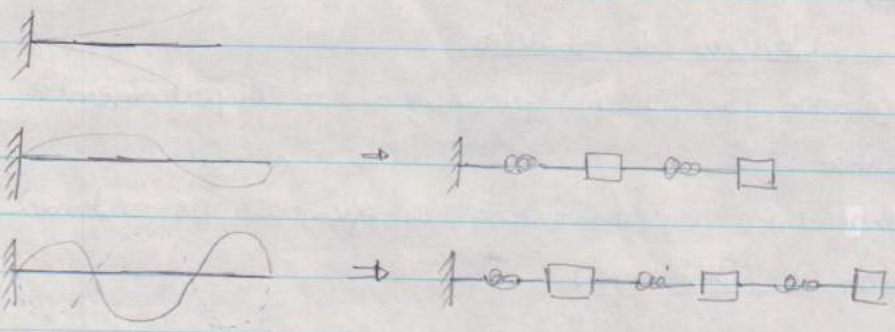
Deformação em função da posição ⇒ y(x)



(modelo de par. conc.)

16 / 02 / 16

PMR3302



→ Nessa disciplina (Sistemas de Controle)

Usaremos modelos de parâmetros concentrados para serem utilizados em análise dinâmica e projeto de controladores

→ Obtenção de modelo matemático de um sist. dinâmico depende para que será utilizado o modelo e a forma de operação do sistema.

4) Processo de obtenção de modelo de um sist. dinâmico

→ Determinação da aplicação do modelo e regime de operação de sistema.

→ Determinação de hipóteses simplificadoras.

→ Identificação dos elementos básicos do sistema (modelos de parâmetros concentrados)

→ Aplicação das leis físicas pertinentes à cada elemento de modelo ⇒ obtém-se um conjunto de equações diferenciais

→ Validação do modelo

⇒ Todo modelo tem limitação e é importante conhecer essas limitações

spiral

/ /

veremos isso

5) Formas de obtenção de modelos

* → Utilização das leis físicas que regem o comportamento do sistema dinâmico
→ Utilizando dados experimentais de operação do sistema (Identificação de Sistemas)

Tipo de modelo

- Modelo de parametros concentrados
- Modelos baseados nas leis da física
- Modelo para análise dinâmica e controle

18/02/16

Sistemas Mecânicos com Movimento em 1 única direção

→ Modelos de parâmetros concentrados para sistemas de controladores
→ Os sistemas mecânicos possuem os seguintes elementos:

1) Massa
2) Mola
3) Amortecidos
4) Fonte
5) Transformador

1) Massa ideal

→ Existem dois tipos de elementos massa:

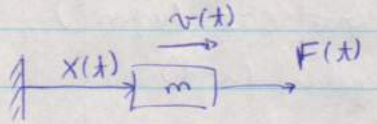
- Massa c/ movimento de translação
- " " " " rotação

→ Massa ideal é um elemento que armazena energia potencial e cinética

spiral

→ Massa ideal não se deforma e não dissipa energia

→ Massa em translação



P.R
↳ posição de referência

m = massa
x = posição da massa em relação à P.R
v = velocidade da massa
F = simetria de forças aplicada na massa

• Equação de movimento

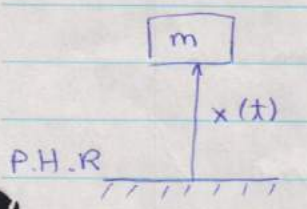
$$m\ddot{x}(t) = F(t)$$

$$m\dot{v}(t) = F(t)$$

• Energia cinética (T)

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

• Energia potencial (U)



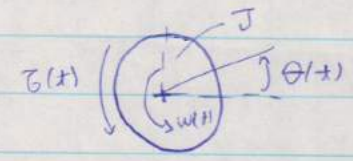
$$U = m g x(t)$$

→ Energia potencial de uma massa é descrita em função da sua altura em relação à uma posição horizontal de referência (P.H.R)

/ /

→ Massa em rotação

• Mov. em 1D



J = momento de inércia em relação ao eixo de rotação ($kg\,m^2$)

θ = posição angular (rad)

w = velocidade angular (rad/s)

τ = resultante de torque (N m)

• Equação de movimento

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau(t)$$

ou

$$J\dot{w}(t) = \tau(t)$$

• Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} J w^2$$

2) Mola ideal

→ Mola é um elemento mecânico que se deforma sob aplicação de algum esforço

→ Mola é um elemento que armazena energia potencial

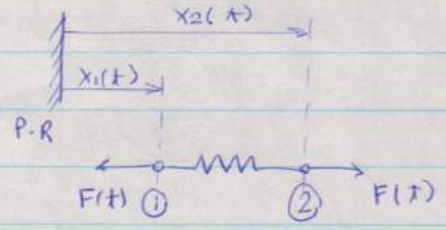
→ Mola ideal não tem massa e não dissipa energia

→ Mola real possui massa e pode dissipar energia

→ Existem 2 tipos de mola { Mola de tração/compressão
Mola de torção

spiral

→ Mola tração / compressão



x_1 = posição do terminal (1) (m)

x_2 = " " " (2) (m)

F = força resultante aplicada na mola (N)

K = coeficiente de rigidez da mola (N/m)

$\Delta x = x_2 - x_1$ ⇒ contração / expansão

• Equação de movimento (mola linear)

$$F(t) = K\,[x_2(t) - x_1(t) - L_0]$$

L_0 = comprimento da mola em repouso
(sem nenhuma força aplicada)

K = constante (mola linear)

• Equação de movimento (Mola não linear)

$$F(t) = f(K, x_1, x_2)$$

onde f = função qualquer
K = é variável

• Energia potencial (U)

$$U = \int_0^x F\,dx$$

↳ Força aplicada

Mola linear:

$$U = \frac{1}{2} K \Delta x^2$$

spiral

→ Mola de torção

θ_1 = posição angular do terminal ① (rad)

θ_2 = " " " " ② (rad)

τ = torque resultante aplicado na mola (Nm)

K_T = coeficiente de rigidez torsional (Nm/rad)

· Equação de movimento

Mola linear → $\boxed{\tau(t) = \underbrace{K_T}_{\text{constante}} \overbrace{[\theta_2(t) - \theta_1(t)]}^{\Delta\theta}}$

Mola não linear → $\tau(t) = f(K_T, \theta_1, \theta_2)$

↳ pode ser variável

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow$ deformação angular da mola

· Energia potencial

Mola linear → $\boxed{U = \frac{1}{2} K_T \Delta\theta^2}$

Mola não linear → $U = \int_0^{\Delta\theta} \tau \, d(\Delta\theta)$

→ Rigidez mecânica

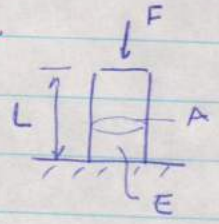
· Rigidez é a relação entre esforço aplicado e deformação do elemento

· Rigidez depende do material, da geometria e da direção de aplicação do esforço

5

Exemplos

1) Barra



L = comprimento (m)

A = área de seção transversal (m^2)

E = módulo de elasticidade do material (N/m^2)

· Tensão de tração / compressão

$\sigma = E \cdot \varepsilon$ (def. elástica)

$\sigma = \frac{F}{A}$ (tensão)

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ → deformação absoluta

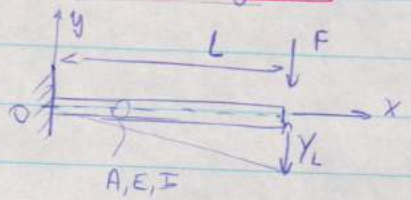
deformação relativa

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

$$F = \left(\frac{AE}{L}\right) \Delta L \quad (\Delta x)$$

K → rigidez da barra

2) Barra engastada



· Assumindo deformação elástica

· Equação da linha elástica

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$ → momento

A : área da seção transversal

I : momento de área da seção transversal

E : módulo de elasticidade

· Momento

$M(x) = F(L - x)$

spiral

/ /

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{-F(L-x)}{EI}$$

Condições de contorno

$$\begin{cases} y(x=0) = C & (1) \\ \frac{dy(x=0)}{dx} = 0 & (2) \end{cases}$$

Integrando 1 vez

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{FLx}{EI} + \frac{Fx^2}{2EI} + C_1$$

Usando C.C (1) → $\frac{dy}{dx}(x=0) = \underline{0 = C_1}$

Integrando novamente

$$y(x) = -\frac{FLx^2}{2EI} + \frac{Fx^3}{6EI} + C_2$$

Usando C.I (1) → $y(x=0) = \underline{0 = C_2}$

Equação da linha elástica

$$y(x) = -\frac{FLx^2}{2EI} + \frac{Fx^3}{6EI}$$

Para $x = L$

$$y(x=L) = Y_L = -\frac{FL^3}{2EI} + \frac{FL^3}{6EI}$$

$$Y_L = -\frac{FL^3}{3EI}$$

deformação contrária ao sentido colocado

Rearranjando

$$F = \left(\frac{3EI}{L^3}\right)(Y_L)$$

$\frac{3EI}{L^3}$ → k (rigidez)

Y_L → deformação da extremidade da barra

spiral

3) Fonte ideal

- Elemento que fornece energia ao sistema
- Uma fonte ideal não tem massa, não se deforma e não dissipa energia
- Uma fonte real possui massa, dissipa energia e se deforma
- Existem dois tipos de fontes nos sist. mecânicos:
  - Fonte de força / torque
  - Fonte de deslocamento

- Fonte de força / torque ideal
  ⇒ gera uma força / torque de forma independente do funcionamento do sistema

- Fonte de deslocamento ideal
  ⇒ gera um deslocamento em uma determinada posição do sist. independente do funcionamento do sist.

- Fontes são agentes externos ao sistema.

4) Amortecedor ideal

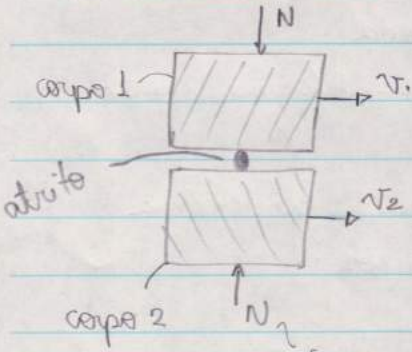
- Elemento que dissipa energia
- Um amortecedor ideal não tem massa e não se deforma
- Nos sistemas mecânicos o principal fenômeno que causa dissipação de energia é o atrito entre duas superfícies.

- Formas de atrito
  - Atrito estático
  - Atrito cinemático
  - Atrito viscoso

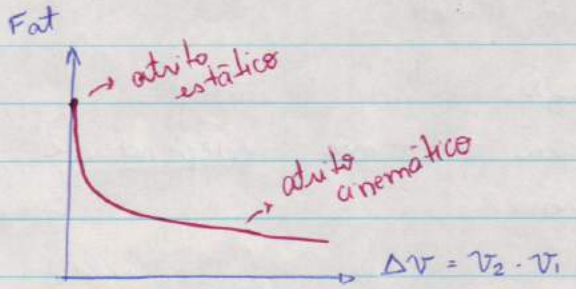
  { Atrito Coulombiano ($F = \mu N$)
    - Atrito de rolamento
    - Atrito dinâmico (arraste)

spiral

→ Atrito estático e cinemático



→ Ocorre quando duas superfícies estão em contato seco.



$$Fat_a = \begin{cases} -\mu_c N \, sinal(v_1) \text{ - p/ } v_1 \neq v_2 \text{ (atrito cinemático)} \\ \mu_E N \text{ . p/ } v_1 \neq v_2 \text{ (atrito estático)} \end{cases}$$

Função sinal

$$sinal(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

onde

μ_c = coeficiente de atrito cinemático

μ_E = " " " estático

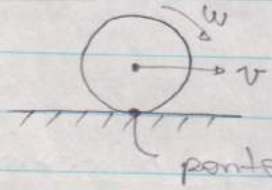
$\mu_E > \mu_c$

tabelados em função dos materiais

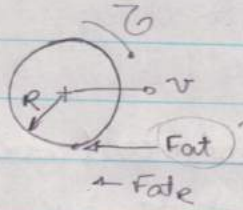
→ Atrito de rolamento

· Força de atrito que surge entre duas superfícies que rolam uma em relação à outra.

· Representada por uma expressão da forma de atrito Coulombiano



Cilindro gira sem deslizar



garante que o cilindro gire

→ Fat não dissipa energia se o cilindro girar sem deslizar

→ Fatr = força de atrito de rolamento dissipa energia

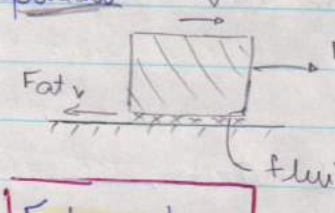
$$Fat_R = -\mu_R N \, sinal(v)$$

- N = força normal
- v: velocidade de translação do CM do cilindro
- μ_R: coeficiente de atrito de rolamento
  - ↳ tabelado em função dos materiais

$\mu_R << < \mu_E, \mu_C$

→ Atrito viscoso

Força de atrito que surge quando duas superfícies deslizam uma em relação à outra separadas por uma pequena camada de fluido.



$$Fat_v = b \cdot v$$

força de atrito viscoso

b = coeficiente de atrito viscoso

v = velocidade relativa na superfície entre os dois corpos.

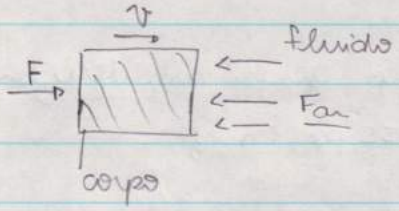
spirat

b = função da geometria da superfície em contato e das propriedades de fluido

→ Atrito viscoso ocorre somente quando escoamento do fluido é laminar.

→ Atrito dinâmico (arraste)

Força de atrito que surge quando um corpo se movimenta em relação à um fluido com escoamento turbulento.



Far = força de arraste

$F_{ar} = -C v^2 \text{sinal}(v)$

C = coeficiente de arraste que é função da geometria do corpo, do fluido e da velocidade

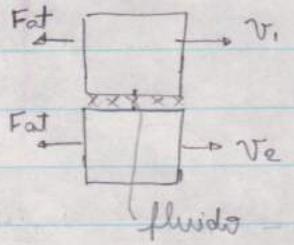
Amortecedor ideal

- Em relação ao movimento existem dois tipos de amortecedor:
  - Movimento de translação
  - Movimento de rotação

- Em relação ao tipo de equação existem dois tipos de amortecedores
  - Linear (atrito viscoso)
  - Não-linear (todas as outras formas de atrito)

Amortecedor linear (atrito viscoso)

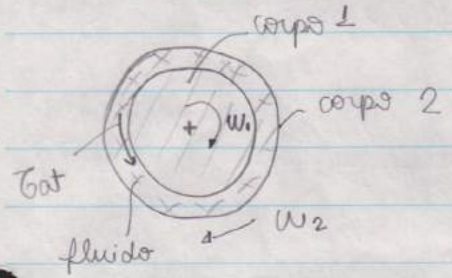
→ Translação



$$\boxed{\begin{aligned} F_{at_1} &= b\,\overbrace{(v_2 - v_1)}^{\Delta v} \\ F_{at_2} &= b\,(v_1 - v_2) \end{aligned}}$$

v_1 = velocidade do corpo 1 na superfície de contato (m/s)
v_2 = veloc. do corpo 2 na superfície de contato (m/s)
b = coef. de atrito viscoso (Ns/m)

→ Rotação



torque de atrito (Nm)

$$\boxed{\begin{aligned} \tau_{at_1} &= b(\omega_2 - \omega_1) \\ \tau_{at_2} &= b(\omega_1 - \omega_2) \end{aligned}}$$

ω_1 = veloc. angular do corpo 1 (rad/s)
ω_2 = veloc. " " " 2 (rad/s)
b = coef. de atrito viscoso (Nm s/rad)

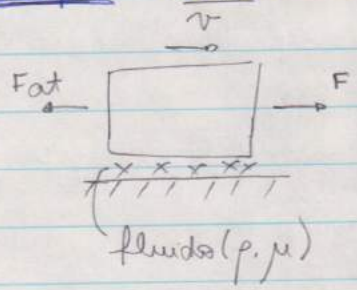
→ Potência: dissipada por atrito viscoso

$$D = \int_0^{\Delta v} \underbrace{F(\Delta v)}_{b\Delta v}\, d(\Delta v) \qquad \text{(watt)}$$

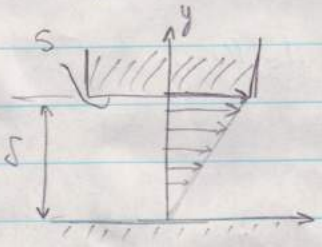
$$\boxed{D = \frac{1}{2}\, b\, (\Delta v)^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{D = \frac{1}{2}\, b\, (\Delta \omega)^2}$$

/ /

Exemplo: Cálculo do coef. de atrito viscoso



- Hipóteses
  - Escoamento laminar
  - Velocidade constante
  - Fluido Newtoniano
  - Fluido incompressível



Lei de viscosidade de Newton

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

τ = tensão de cisalhamento no fluido

μ = viscosidade de fluido

→ Escoamento laminar $v(y)$ - reta

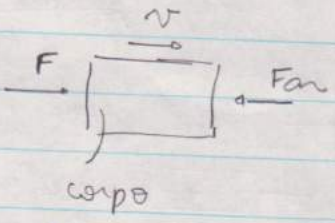
$$\frac{dv}{dy} = \frac{v - 0}{\delta} \qquad \frac{Fat}{S} = \mu \frac{v}{\delta} \rightarrow Fat = \frac{S\mu}{\delta} v$$

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{Fat}{S}$$

S = superfície do corpo em contato c/ fluido

spiral

→ Amortecedor não linear (Força de arrasto)
↳ escoamento turbulento



$F_{ar} = -Cv^2 \text{sinal}(v)$

v: velocidade relativa do corpo em relação ao fluido

· Equação do amortecedor

$$F_{ar} = -Cv^2 \text{sinal}(v)$$

· Potência dissipada

$$D = \int_0^v F_{ar}(v)\,dv$$

$$D = \int_0^v C v^2\,dv \Rightarrow \boxed{D = \frac{Cv^3}{3}}$$

4) Amortecedor ideal

→ Amortecedor não linear

Originado por atrito Coulombiano

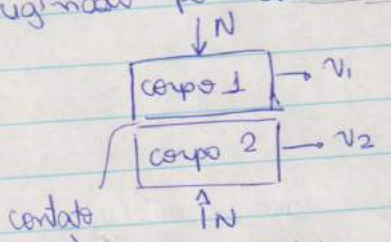
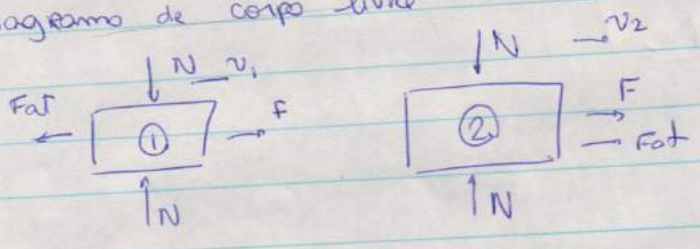


Diagrama de corpo livre



$Fat = -\mu N \, sinal(v_1 - v_2)$ ⇒ no corpo 1

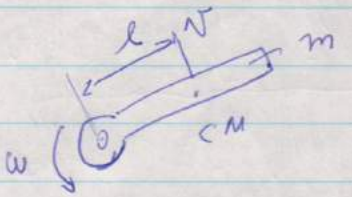
$Fat = -\mu N \, sinal(v_2 - v_1)$ ⇒ no corpo 2

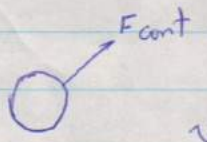
→ Potência dissipada

$$D = \int_0^v Fat \, dv$$

$$D = \int_0^{\Delta v} \mu N \, d(\Delta v) = \boxed{\mu N |\Delta v| = D}$$

assumindo μN constante





$v = \omega l$

$F_{at} = \mu F_{cent}$

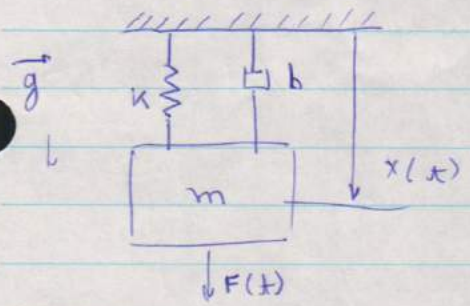
$F_{cent}: \frac{m v^2}{l} = m \omega^2 l$

Exemplos

1) Sistema massa-mola-amortecedor

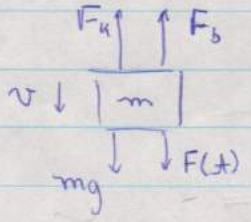
Hipóteses

- Massa pontual
- Mola ideal e linear
- Amortecedor ideal e linear
- Fonte de força ideal

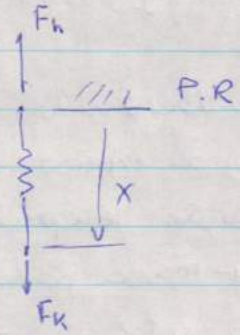


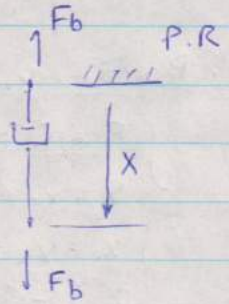
Diagramas de corpo livre

massa:



mola:





/ /

Aplicando 2ª Lei de Newton

- massa

$$m\ddot{x} = F + mg - F_k - F_b$$

- Força na mola

$$F_k = k(x - L_0)$$

onde L_0: comprimento da mola em repouso

- Força no amortecedor

$$F_b = b\dot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} = F + mg - k(x - L_0) - b\dot{x}}$$

→ Mudança de variável

$$\boxed{y = x - x_0}$$

x_0 = posição de equilíbrio da massa

y = variação da posição da massa em relação à sua posição de equilíbrio

$$y = x - x_0 \longrightarrow \begin{cases} \dot{y} = \dot{x} - \cancel{\dot{x}_0}^{0} = \dot{x} \\ \ddot{y} = \ddot{x} \end{cases}$$

subst. na eq. dinâmica (eq. 1)

$$m\ddot{y} = F + mg - k(\underbrace{y + x_0}_{x} - L_0) - b\dot{y} \quad (2)$$

- Posição de equilíbrio

$$\begin{cases} F_0 = 0 & \text{← força extrema nula} \\ x = x_0 & \text{← posição de equilíbrio} \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = \dot{y}_0 = C & \text{← massa parada} \end{cases}$$

$$m\cancel{\ddot{x}_0}^{0} = \cancel{F_0}^{0} + mg - k(x_0 - L_0) - b\cancel{\dot{x}_0}^{0} \Rightarrow \boxed{mg = k(x_0 - L_0)}$$

spirak

Rearranjando a eq.(2)

$$m\ddot{y} = F - mg - Ky - K(x - L_0) - b\dot{y}$$

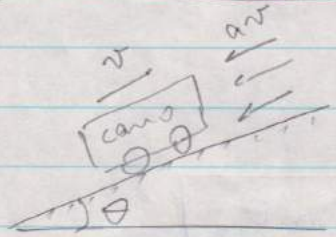
Resultando em:

$$m\ddot{y} = F - Ky - b\dot{y} \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} + b\dot{y} + Ky = F}$$

→ Conclusão

Em qualquer sist. mecânico onde os pesos das massas são "suportados" por molas na condição de equilíbrio, então se usarmos como variáveis de posição as posições relativas à posição de equilíbrio as forças peso são cancelados

2) Veículo em movimento longitudinal



$\vec{g}$

→ objetivo ⇒ modelo p/ projeto de controlador de velocidade

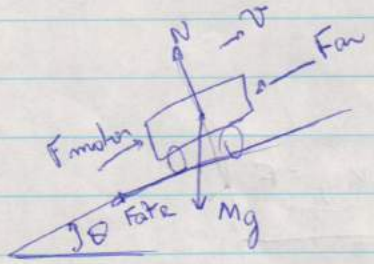
Hipóteses

- Massa pontual
- Atrito de rolamento entre rodas e pista
- Força de arrasto devido ao movimento do carro no ar
- Forças de atrito internas ao veículo desprezíveis
- Motor do carro é uma fonte de força ideal
- Relação rotação motor e velocidade do carro é constante (marcha fixa)

spirax

/ /

Elementos de sistema



→ 2ª Lei de Newton na direção de movimento

$$m\dot{v} = F_{mot} - F_{ar} - F_{atr} - mg\,sen\theta$$

onde

$$F_{ar} = C v^2 \qquad C = \frac{1}{2}\rho_{ar} C_d \cdot A$$

ρ_{ar} → massa específica do ar

C_d → coef. aerodinâmico

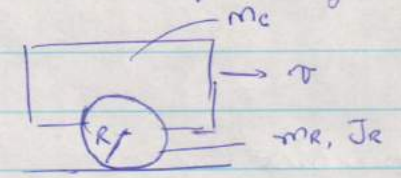
A → área frontal no escoamento

$$F_{atr} = \mu_r N = \mu_r mg\cos\theta$$

subst. F_{ar} e F_{atr}

$$\boxed{m\dot{v} = F_{mot} - Cv^2 - \mu_r mg\cos\theta - mg\,sen\theta}$$

massa total de veículo considerando o momento de inércia das partes girantes.



Movimentos:

Translação da carroceria → m_c com v

Translação do CM da roda → m_R com v

spiral

SISDIN

Rotação da roda → J_R com veloc. angular ω_R

Assumindo que roda gira sem deslizar

$$\omega_R = vR$$

Inércia total p/ mov. de translação

$$m_c + m_R + \frac{J_R}{R^2} \rightarrow \text{Lagrange}$$

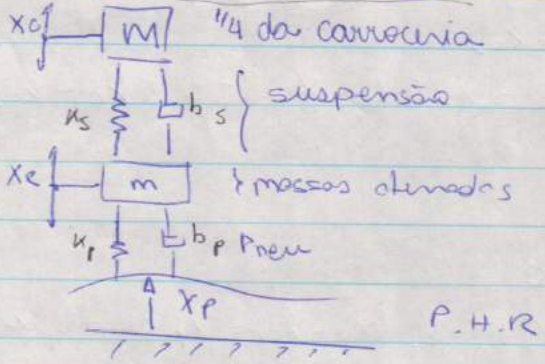
3) Suspensão de uma roda de um veículo

→ Objetivo: projeto da suspensão

→ Hipóteses

- Carroceria é massa pontual
- Massas aterradas é massa pontual
- Mola da suspensão é ideal e linear
- Amortecedor da suspensão é ideal e linear
- Pneu é mola e amortecedor ideais e lineares
- Pista é fonte de deslocamento ideal

→ Diagramas de elementos do sist.

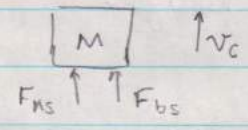


Na posição de equilíbrio: $x_c = x_R = x_0 = 0$

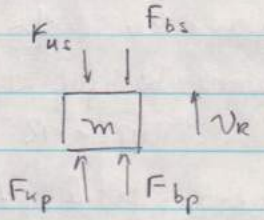
/ /

→ Diagramas de corpo livre

Carroceria:



Roda



→ Equações de movimento

Aplicando 2ª lei de Newton na carroceria e na "roda"

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = F_{ks} + F_{bs} \\ m\ddot{x}_R = F_{kp} + F_{bp} - F_{ks} - F_{bs} \end{cases}$$

→ Equações de molas e amortecedores

$F_{ks} = k_s(x_R - x_c)$

$F_{bs} = b_s(\dot{x}_R - \dot{x}_c)$

$F_{kp} = k_p(x_c - x_R)$

$F_{bp} = b_p(\dot{x}_c - \dot{x}_R)$

Subst. nas eq. de movimento:

$M\ddot{x}_c = k_s(x_R - x_c) + b_s(\dot{x}_R - \dot{x}_c)$

$m\ddot{x}_R = k_p(x_0 - x_R) + b_p(\dot{x}_0 - \dot{x}_R) - k_s(x_R - x_c) - b_s(\dot{x}_R - \dot{x}_c)$

Reagrupando

$M\ddot{x}_c + k_s(x_c - x_R) + b_s(\dot{x}_c - \dot{x}_R) = 0$

$m\ddot{x}_R + k_p x_R + b_p \dot{x}_R + k_s(x_R - x_c) + b_s(x_R - \dot{x}_c) = k_p x_0 + b_p \dot{x}_0$

ordem do sist. ⇒ $n = 4$

- Variáveis de estado ⇒ $x_c, \dot{x}_c, x_R, \dot{x}_R$
- Variável de entrada ⇒ V_0
- Variáveis de saída ⇒ $x_0, \dot{x}_c$

spiral

SISDIN

Transformador ideal

→ Transformador é um elemento que altera esforços (forças e torque) e velocidades (linear e angular)

→ Um transformador ideal não tem massa, não se deforma e não dissipa energia

→ Um transformador ideal não armazena nenhuma forma de energia.

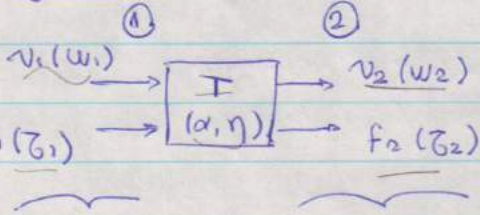
→ Tipos de transformadores

1) Translação - Translação
   Alavanca, sistema de polias

2) Rotação - rotação
   Par de engrenagens, sistema de polias e correia

3) Translação - rotação
   Biela - manivela, cremalheira - pinhão, parafuso de movimento.

→ Diagrama



/ /

• Lado primário

Entrada de movimento e energia

• Lado secundário

Saída de movimento e energia

→ Transformadores em geral são reversíveis, ou seja, lados primário e secundário se alteram.

$v_1(w_1)$ = velocidade linear (angular) no lado primário

$v_2(w_2)$ = " " " " " secundário

$f_1(\tau_1)$ = esforço (força / torque) no lado primário

$f_2(\tau_2)$ = " " " " secundário

α = relação de transformação (relação entre velocidades nos lados primário e secundário)

η = rendimento na eficiência do transformador ⇒ representa dissipação de energia.

→ Transformador ideal

$\eta = 1$ ⇒ não dissipa energia

→ Transformador real

$\eta < 1$ ⇒ dissipa energia

→ Equação

• Relação entre velocidades

- $v_2 = \alpha v_1$ - translação / translação
- $v_2 = \alpha w_1$ - rotação / translação
- $w_2 = \alpha v_1$ - translação / rotação
- $w_2 = \alpha w_1$ - rotação / rotação

spirab

/ /

SISDIN

→ Nessas expressões assume-se que não existe escorregamento.

•Relação de esforços

Usando princípio de conservação de energia

{Potência no lado secundário} = η {Potência no lado primário}

{Potência de entrada} − {Potência de saída}

- Translação / translação

$F_2 v_2 = \eta F_1 v_1$

$F_2 = \eta \frac{v_1}{v_2} F_1 \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{\eta}{\alpha} F_1}$

- Rotação / translação $\quad v_2 = \alpha \omega_1$

$F_2 v_2 = \eta \tau_1 \omega_1$

$F_2 = \eta \frac{\omega_1}{v_2} \tau_1 \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{\eta}{\alpha} \tau_1}$

$\frac{1}{\alpha}$

$[\alpha] = m/rad$

- Rotação / Rotação

$\tau_2 \omega_2 = \eta \tau_1 \omega_1$

$\tau_2 = \eta \frac{\omega_1}{\omega_2} \tau_1 \Rightarrow \boxed{\tau_2 = \frac{\eta}{\alpha} \tau_1}$

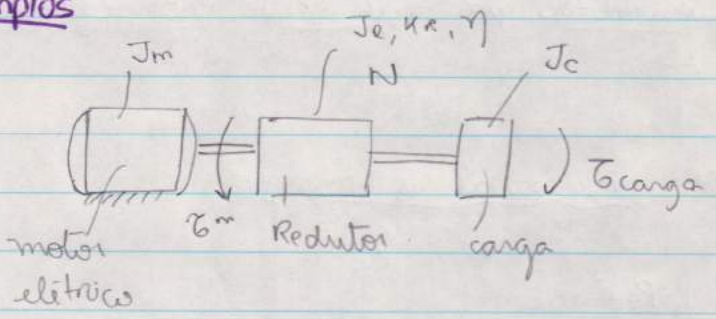
$\frac{1}{\alpha}$

spiral

/ /

Exemplos

1)



Jm = momento de inércia do motor

JR = momento de inércia do redutor visto pelo eixo de saída

KR = rigidez do redutor vista pelo eixo de saída

η = rendimento do redutor

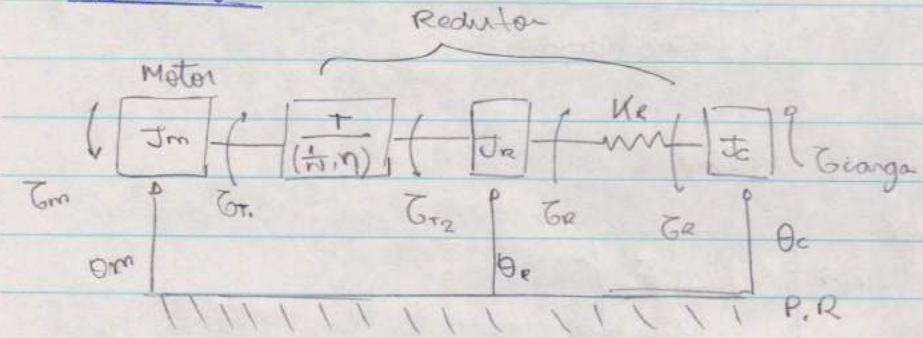
N = relação de redução de redutor (N>1)

Jc = momento de inércia da carga

→ Hipóteses

- Motor e carga são corpos rígidos
- Eixos rígidos e com momentos de inércia desprezíveis
- Atrito nos mancais dos eixos é desprezível
- τm e τcarga são esforços externos gerados por fontes ideais.

→ Elementos

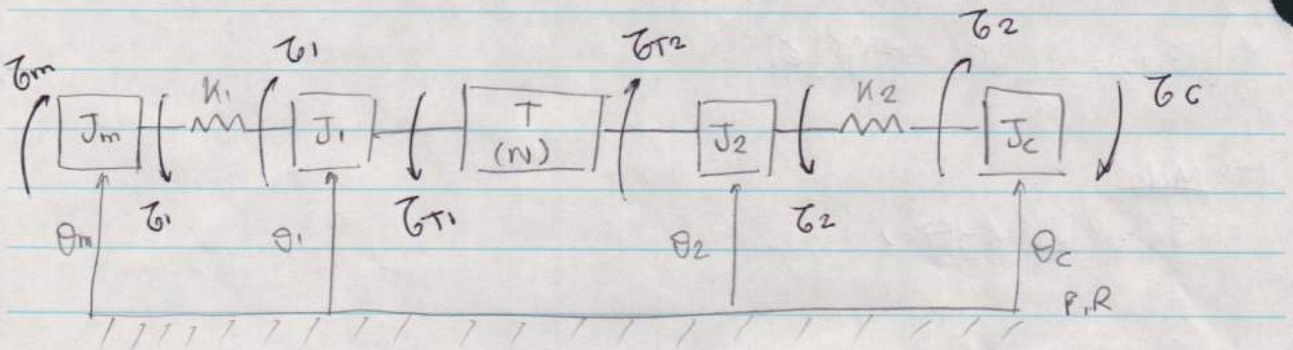


/ /

Hipóteses

- Motor, carga e engrenagens são corpos rígidos
- Deformação elástica dos eixos (molas lineares e ideais)
- Dinâmica do circuito elétrico do motor é desprezível (motor é fonte de torque ideal)
- Forças de atrito são desprezíveis

Elementos do sist



Equações de movimento

Motor $J_m \ddot{\theta}_m = \tau_m - \tau_1$ (1)

Engr. 1 : $J_1 \ddot{\theta}_1 = \tau_1 - \tau_{T_2}$ (2)

Engr. 2 $J_2 \ddot{\theta}_2 = \tau_{T2} - \tau_2$ (3)

Carga $J_c \ddot{\theta}_c = \tau_2 - \tau_c$ (4)

Equações constitutivas

Eixo 1 : $\tau_1 = K_1(\theta_m - \theta_1)$ 15)

Eixo 2 : $\tau_2 = K_2(\theta_2 - \theta_c)$ (6)

Engrenamento $\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 / N & (7) \\ \tau_{T2} = N \tau_{T1} & (8) \end{cases}$

spirab

transformadas

6 → Alteração rigidez e inércia

→ Variáveis de posição independentes

⇒ θ_m, θ_1 / θ_2, θ_c

→ Subst. eq (5), (6), (7) e (8) nas eq (1), (2), (3) e (4) eliminando θ_1 e τ_{T1}.

$$\begin{cases} J_m \ddot{\theta}_m = \tau_m - K_1(\theta_m - N\theta_2) & (9) \\ J_1 N \ddot{\theta}_2 = K_1(\theta_m - N\theta_2) - \tau_{T2}/N & (10) \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = \tau_{T2} - K_2(\theta_2 - \theta_c) & (11) \\ J_c \ddot{\theta}_c = K_2(\theta_2 - \theta_c) - \tau_c & (12) \end{cases}$$

Isolando τ_{T2} da eq. (11) e subst. na eq. (10)

$$J_1 N \ddot{\theta}_2 = K_1(\theta_m - N\theta_2) - \frac{1}{N}\left[J_2 \ddot{\theta}_2 + K_2(\theta_2 - \theta_c)\right]$$

Multiplicando por N e rearranjando

$$(J_1 N^2 + J_2)\ddot{\theta}_2 - K_1 N(\theta_m - N\theta_2) + K_2(\theta_2 - \theta_c) = 0$$

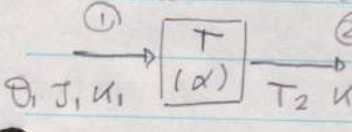
$$(J_1 N)^2 + J_2)\ddot{\theta}_2 - K_1 N^2\left(\frac{\theta_m}{N} - \theta_2\right) + K_2(\theta_2 - \theta_c) = 0 \quad (13)$$

$N^2 = 1/\alpha^2$ $\qquad$ $1/\alpha^2$

Modelo dinâmico do sist. é representado pelas eq. (5), (12), e (13)

→ Conclusão

Momento de inércia e rigidez são alterados por um transformador.



J_1 visto pelo lado secundário $= J_1/\alpha^2$

K_1 " " " " " $= K_1/\alpha^2$

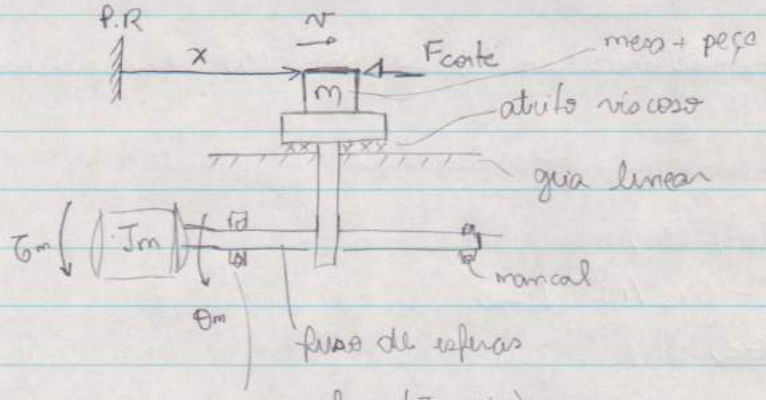
J_2 " " " primário $= J_2\alpha^2$

K_2 " " " " $= K_2\alpha^2$

spiral

/ /

Eixos de máquina CNC



Dados:

Motor: Jm

Furo: JF, KF, η, a (avanço)

Mancal: μR (coef. atrito de rolamento)

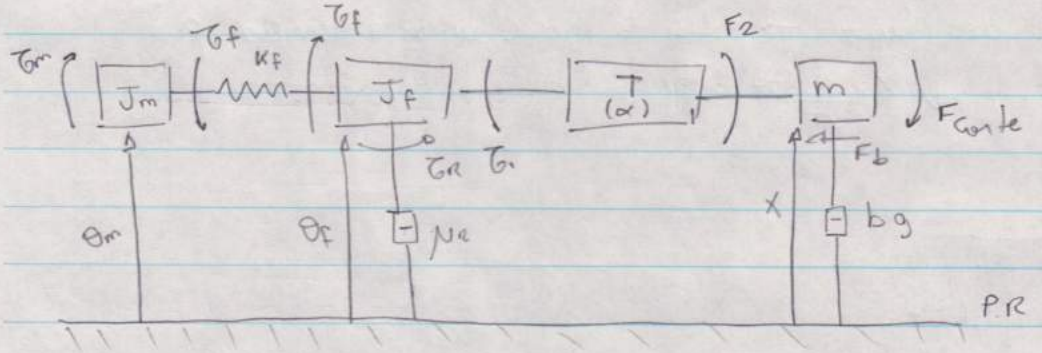
mesa + peça: m

guia linear: bg (coef. de atrito viscoso)

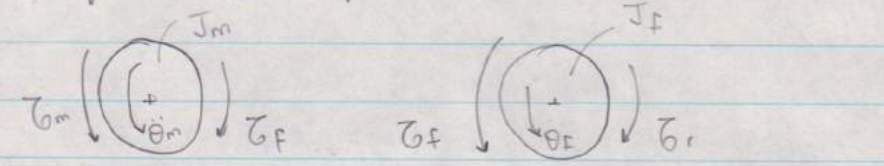
Hipóteses

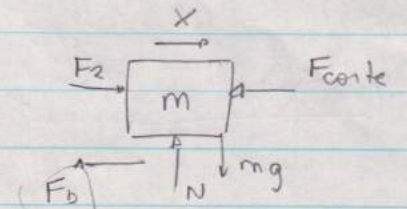
- Motor e mesa são corpos rígidos
- Mesa é massa pontual
- Deformação elástica do furo
- Atrito de rolamento nos mancais
- Atrito viscoso na guia linear
- Motor é fonte ideal de torque
- Força de corte é proveniente de uma fonte ideal

Elementos do sist



Diagramas de corpos livres





Equação de movimento

$J_m \ddot{\theta}_m = \tau_m - \tau_f$ - Motor (1)

$J_f \ddot{\theta}_f = \tau_f - \tau_r - \tau_R - F_{fuso}$ (2)

$m \ddot{x} = F_2 - F_b - F_{corte}$ (3)

Equações constitutivas

Rigidez do fuso: $\tau_f = K_f (\theta_m - \theta_f)$

Atrito nos mancais $\tau_R = \mu_R f(\dot{\theta}_f, F_{corte}, \tau_m, m, bg)$ (complicado)

Atrito no guia - $F_b = bg\,\dot{x}$

Deverão ser desprezados pelo fato de o atrito em mancal de rolamento

Fuso / Transformador

1 volta do fuso → mesa se move uma distância "a"

$$\left.\begin{matrix} 2\pi & - & a \\ \theta_f & - & x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \underbrace{\frac{a}{2\pi}}_{\alpha}\theta_f \quad (7)$$

Conservação de energia

$$F_2 \dot{x} = \eta \tau_1 \dot{\theta}_f$$

$$F_2 = \eta \frac{\dot{\theta}_f}{\dot{x}} \tau_1$$

$$F_2 = \eta \underbrace{\frac{2\pi}{a}}_{V_\alpha} \tau_1 \quad (8)$$

→ N.º de variáveis independentes

⇒ θ_m, θ_f, x

→ Subst. eq (4), (5), (6), (7), (8) nas eq. (1), (2), (3) e eliminando θ_f e τ_f

$$J_m \ddot{\theta}_f = \tau_m - K_f(\theta_m - 2\pi/a\, x) \quad (9)$$

$$J_f \frac{2\pi}{a}\ddot{x} = K_f\left(\theta_m - \frac{2\pi}{a}x\right) - \tau_R - a/2\pi\eta\, F_2 \quad (10)$$

$$m\ddot{x} = F_2 - bg\dot{x} - F_{corte} \quad (11)$$

Isolando F_2 da eq. (11) e subst. eq. (10)

$$J_f \frac{2\pi}{a}\ddot{x} = K_f\left(\theta_m - \frac{2\pi}{a}x\right) - \tau_R - \frac{a}{2\pi\eta}\left[a\ddot{x} + b\dot{x} + F_{corte}\right]$$

Multiplicando por $2\pi\eta/a$ e rearranjando

$$\left(J_f \frac{4\pi^2\eta}{a^2} + m\right)\ddot{x} + b\dot{x} - K_f \frac{2\pi}{a}\eta\left(\theta_m - \frac{2\pi}{a}x\right) = -F_{corte} - \frac{2\pi\eta}{a}\tau_R \quad (12)$$

Eq. (9) e (12) representam o modelo do eixo de uma máq. fresadora CNC

Dinâmica de Lagrange

→ Sist. mecânicos com corpos em movimento no plano

→ Plano ⇒ 3 graus de liberdade

Translação no plano + rotação em torno do eixo perpendicular ao plano.

→ Métodos de obtenção de equações de movimento de sist. mecânicos.

- Método de Newton-Euler
- Método de Lagrange

→ Método de Newton-Euler

· Baseado em diagramas de corpos livres dos elementos do sistema

· Eq. de mov. são obtidas aplicando-se 2ª Lei de Newton e o Teorema do Momento Angular em cada corpo

· Para mov. no plano cada corpo "gera" 3 eq. de movimento

· Forças internas são variáveis a serem calculadas pela solução das equações.

· Em geral tem-se um nº de eq. maior do que o nº de graus de liberdade do sist.

→ graus de liberdade de um sist. mecânico ⇒

· Nº de graus de liberdade de um sist. mecânico é igual ao nº de variáveis de posição necessárias p/ descrever a posição de todas as partes do sist.

· Método adequado para o projeto de sistema.

spiral

1) Coordenadas generalizadas

→ É um conjunto de variáveis de posição, sendo cada uma independente da outra.

→ Nº de coordenadas generalizadas é igual ao nº de graus de liberdade do sist.

→ Existem diversos conjuntos diferentes de coordenadas generalizadas p/ um mesmo sist.

→ As coordenadas generalizadas e sua primeira e segunda derivadas descrevem o movimento do sist.

→ Vetor de coordenadas generalizadas

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

onde n é o nº de graus de liberdade do sist.

q_i → é uma variável de posição linear ou angular

→ Derivada temporal do vetor $\vec{q}$

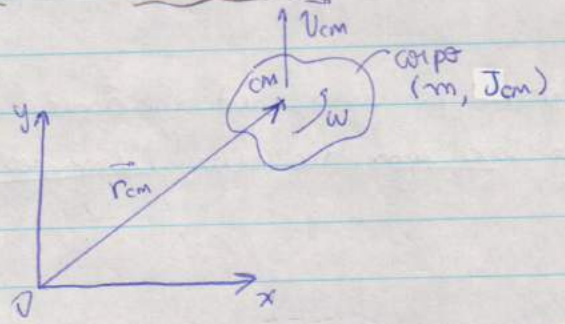
$$\frac{d}{dt}\vec{q} = \dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

onde $\dot{q}_i$ é uma velocidade linear ou angular.

spirax

3) Energia cinética

→ Energia cinética do sist é a soma das energias cinéticas armazenadas em cada massa do sist.



J_{cm} = momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação (eixo z) transladado para o CM do corpo.

→ Princípio da separação de movimento ⇒ o movimento de um corpo no espaço é descrito pelo movimento de translação do seu CM associado ao movimento de rotação do corpo em torno do seu CM.

→ Energia cinética do massa m em mov. no plano

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_{cm}^{\,t} \vec{V}_{cm} + \frac{1}{2} J_{cm} \omega^2$$

Energia cinética do mov. de translação do CM

Energia cinética do mov. de rotação em torno do C.M

Observação:

$$\vec{V}_{cm}^{\,t} \cdot \vec{V}_{cm} = |\vec{V}_{cm}|^2 = V_{cm_x}^2 + V_{cm_y}^2$$

→ Energia cinética total do sist.

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k$$

T_k = energia cinética do k-ésimo elemento de massa do sist.
m = nº de elementos de massa do sist.

4) Potência dissipada

→ A potência total dissipada por um sist. mecânico é a soma das potências dissipadas por cada um dos seus elementos amortecidos.

$$D = \sum_{k=1}^{m} D_k$$

D_k = potência dissipada pelo k-ésimo amortecedor
m = nº de elementos amortecidos do sist.

→ **Observação importante**

Energia cinética, potencial e potência dissipada do sist. devem estar descritas em função de $\vec{q}$ e $\dot{\vec{q}}$

5) Lagrangiano do Sistema

→ Lagrangiano de um sist. mecânico é definido por:

$$L = T - U$$

L = Lagrangiano do sist.
T = energia cinética total do sist.
U = energia potencial total do sist.

Devem estar expressas em termos de $\vec{q}$ e $\dot{\vec{q}}$

6) Equação de movimento

→ Dado um sist. mecânico com n graus de liberdade

→ Para cada coordenada generalizada tem uma eq. de movimento, que é dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad , \text{para } i = 1, \dots, n$$

onde Q_i = esforço externo não conservativo associado à coordenada generalizada q_i

Lembre que o nº de coordenadas generalizadas (q_i) é igual ao número de graus de liberdade do sist.

7) Esforços externos não conservativos

→ Esforços conservativos são provenientes de campos de força, tais como, campo gravitacional, eletromagnético e eletrostático.

→ No caso de sist. mecânicos em geral tem-se somente o campo gravitacional

→ Esforço externo não conservativo é uma força ou momento aplicado no sist. por um agente externo (fonte de força ou momento)

→ Vetor de esforços externos não conservativos

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \\ \vdots \\ \vec{f_m} \end{bmatrix}$$

Onde $\vec{f_i}$ é um vetor de força ou momento

m = nº de esforços externos não conservativos

spirab

→ Esforços externo associado à coordenada q_i (Q_i)

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{x}_j}{\partial q_i}$$

onde $\vec{x}_j$ = vetor que descreve duração de aplicação de esforço externo $\vec{f}_j$.

10/03/16

Exemplos

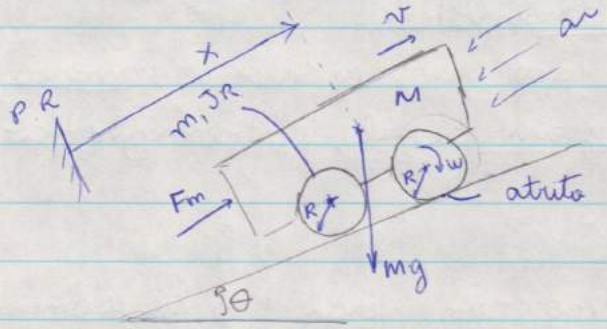
1) Movimento horizontal de um veículo

Dados

M = massa do veículo

m = massa das rodas

J_R = momento de inércia das rodas



μ_R: coef de atrito de rolamento

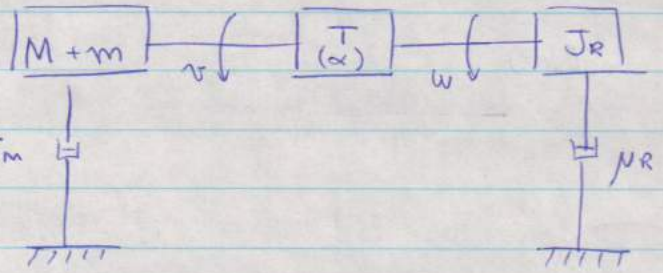
θ = ângulo de inclinação do piso.

→ Hipóteses

- Veículo (massa M) é pontual
- Rodas giram sem deslizar
- Atrito de rolamento entre roda e piso
- Ar aplica força de arraste no veículo
- Dinâmico do motor é desprezível

- Rodas são corpos rígidos
- Tração é feita em todas as rodas
- Todas componentes mecânicas são rígidas

→ Elementos do sistema



Transformador

$$w = \frac{v}{R} \rightarrow \alpha = \frac{1}{R}$$

→ Energia cinética

$$T = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2} J_R w^2$$

→ Nº de graus de liberdade = 1

Coordenada generalizada = x ($\dot{x} = v$)

Subst. $w = \frac{v}{R}$ na energia cinética

$$T = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}\frac{J_R}{R^2}v^2$$

$$M_T$$

$$T = \frac{1}{2}\left(M + m + \frac{J_R}{R^2}\right)v^2 = \frac{1}{2} M_T v^2 = T$$

spiral

→ Energia potencial

gravidade ⇒ $U = (m + M) g x \operatorname{sen}\theta$ (x: altura)

$$U = (m+M) g x \operatorname{sen}\theta$$

→ Potência dissipada

· Atrito de rolamento

$F_{at} = -\mu_R (M+m) g \cos\theta \operatorname{sinal}(v)$

$$D_R = \int_0^v |F_{at}| \, dv'$$

$$D_R = \mu_R (M+m) g \cos\theta \, |v|$$

· Força de arraste

$F_{ar} = -Cv^2 \operatorname{sinal}(v)$

$$D_{ar} = \int_0^v |F_{ar}| \, dv'$$

$$D_{ar} = \int_0^v Cv^2 \, dv$$

$$D_{ar} = \frac{C}{3} |v|^3$$

· Potência total dissipada

$D = D_R + D_{ar}$

$$D = \mu_R (M+m) g \cos\theta \, |v| + \frac{C}{3} |v|^3$$

→ Lagrangiano (L)

$$L = T - U = \frac{1}{2} M_T v^2 - (m+M) g x \operatorname{sen}\theta$$

→ Equação de movimento

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F_m$$

↓

$$\frac{\partial L}{\partial v} = M_T v$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = M_T \cdot \dot{v}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -(m+M) g \operatorname{sen}\theta$$

→ Derivada de $|x|$

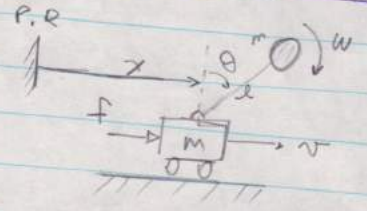
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d|x|}{dx} = \text{sinal}(x)$$

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \mu_e (M+m) g \cos\theta \, \text{sinal}(v) + C v^2 \, \text{sinal}(v)$$

$$(M+m+J_e/R^2)\dot{v} + (m+M) g \operatorname{sen}\theta + [\mu_e (M+m) g \cos\theta + C v^2] \, \text{Sinal}(v) = F_m$$

② Pêndulo invertido sobre um carro



→ Hipóteses

- Massa do pêndulo concentrada na ponta
- Haste do pêndulo rígida e com massa desprezível
- Atrito de rolamento entre rodas e piso

/ /

- Atrito na articulação é desprezível
- Força de arraste é desprezível
- Força aplicada no carro é proveniente de fonte ideal
- Carro é massa pontual

→ Dois graus de liberdade:
coordenadas generalizadas ⇒ x, θ

→ Posição dos CM:

carro → $\begin{cases} x_c = x \\ y_c = 0 \end{cases}$

Pêndulo → $\begin{cases} x_p = x + l\operatorname{sen}\theta \\ y_p = l\cos\theta \end{cases}$

→ Velocidades lineares dos CM

carro → $\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x} \\ \dot{y}_c = 0 \end{cases}$

pêndulo → $\begin{cases} \dot{x}_p = \dot{x} + l(\cos\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}_p = -l(\operatorname{sen}\theta)\dot{\theta} \end{cases}$

→ Módulo das velocidades lineares

carro → $|\vec{v}_c|^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = \dot{x}^2$

pêndulo → $|\vec{v}_p|^2 = \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2$

$|\vec{v}_p|^2 = (\dot{x} + l\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + l^2(\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}^2$

$|\vec{v}_p|^2 = \dot{x}^2 + 2l\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \underbrace{l^2(\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + l^2(\operatorname{sen}^2\theta)\dot{\theta}^2}_{l^2\dot{\theta}^2}$

spiral

Assumindo que a força normal é constante e somente devida à gravidade

$$N = (M+m)g$$

$$F_{at} = -\mu_R (M+m) g \, \text{sinal}(\dot{x})$$

$$D = |F_{at}| \cdot |\dot{x}|$$

$$D = \mu_R (M+m) g |\dot{x}|$$

→ Equação de movimento p/ x

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = f$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml(\cos\theta)\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} - ml\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \mu_R (M+m) g \, \text{sinal}(\dot{x})$$

$$(M+m)\dot{v} + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} - ml\,\text{sen}\theta\,\dot{\theta}^2 + \mu_R (M+m) g \, \text{sinal}(v) = f$$

→ Eq. de mov. p/ θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = +mgl\,\text{sen}\theta$$

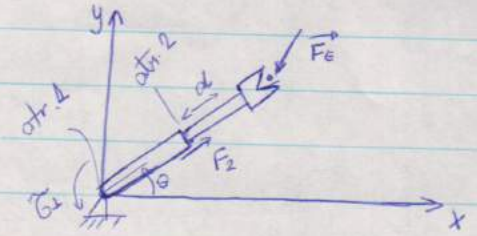
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\cos\theta\,\dot{x} \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml(\cos\theta)\ddot{x} - ml(\text{sen}\theta)\dot{x}\dot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml(\cos\theta)\ddot{x} - ml(\text{sen}\theta)\dot{x}\dot{\theta} - mgl\,\text{sen}\theta = 0$$

coriolis

Exemplo: Robô de 2 graus de liberdade RP



Hipóteses

- Corpos rígidos
- Atrito viscoso nas art.
- Dinâmica dos motores é desprezível
- Massa distribuída uniformemente nos ligamentos

Dados

Ligamento 1:

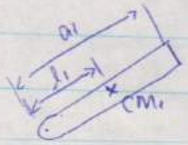
m_1 = massa

J_1 = momento de inércia em relação ao CM

l_1 = distância do CM à art. 1.

a_1 = comprimento do ligamento

b_1 = coef. de atrito viscoso na art. 1



Ligamento 2:

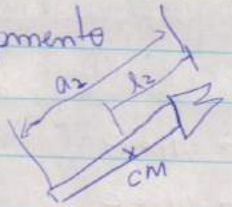
m_2 = massa

J_2 = momento de inércia em relação ao CM

l_2 = distância do CM à extremidade do ligamento

a_2 = comprimento total do ligamento

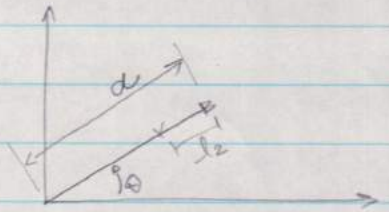
b_2 = coef. do atrito viscoso na art. 2



/ /

→ Nº de graus de liberdade = 2

coordenadas generalizadas → θ, d



→ Posição do CM

Lig. 1 → $\begin{cases} x_1 = l_1 \cos\theta \\ y_1 = l_1 \sin\theta \end{cases}$

Lig. 2 → $\begin{cases} x_2 = (d - l_2)\cos\theta \\ y_2 = (d - l_2)\sin\theta \end{cases}$

→ Velocidade linear dos c.m

Lig 1 → $\begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1(\sin\theta)\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_1 = l_1(\cos\theta)\,\dot{\theta} \end{cases}$ $\quad c$

Lig 2 → $\begin{cases} \dot{x}_2 = (\cos\theta)\,\dot{d} - \underbrace{(d - l_2)}(\sin\theta)\,\dot{\theta} \\ \dot{y}_2 = (\sin\theta)\,\dot{d} + \underbrace{(d - l_2)}(\cos\theta)\,\dot{\theta} \end{cases}$ $\quad c$

→ Módulo ao quadrado das veloc. dos cm

$|\vec{v}_1|^2 = l_1^2(\sin^2\theta)\,\dot{\theta}^2 + l_1^2(\cos^2\theta)\,\dot{\theta}^2 = l_1^2\,\dot{\theta}^2$

$|\vec{v}_2| = (\cos\theta\,\dot{d} - c\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + (\sin\theta\,\dot{d} + c\cos\theta\,\dot{\theta})^2$

$= \cos^2\theta\,\dot{d}^2 + c^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 2c\cancel{\cos\theta\sin\theta}\,\dot{d}\dot{\theta} + \sin^2\theta\,\dot{d}^2 +$

$+ c^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2c\cancel{\cos\theta\sin\theta}\,\dot{d}\dot{\theta}$

$|\vec{v}_2|^2 = \dot{d}^2 + (d - l_2)^2\,\dot{\theta}^2$

→ Velocidade angular dos ligamentos

Lig 1 → $w_1 = \dot{\theta}$

Lig 2 → $w_2 = \dot{\theta}$

spiral

→ Energia cinética

$$T = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}^2 + \frac{1}{2} m_2 (d - l_2)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \dot{\theta}^2$$

→ Energia Potencial

Lig 1 → $U_1 = m_1 g y_1 = m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta$

Lig 2 → $U_2 = m_2 g y_2 = m_2 g (d - l_2) \operatorname{sen}\theta$

$U = U_1 + U_2$ → $U = g[m_1 l_1 + m_2 (d - l_2)] \operatorname{sen}\theta$

→ Potência dissipada

Art 1 → $D_1 = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}^2$

Art 2 → $D_2 = \frac{1}{2} b_2 \dot{d}^2$

$D = D_1 + D_2$ → $D = \frac{1}{2} b_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{d}^2$

→ Eq. mov. p/ θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \Theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 l_1^2 + J_1 + J_2) \dot{\theta} + m_2 (d - l_2)^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = [m_1 l_1^2 + J_1 + J_2 + m_2 (d - l_2)^2] \ddot{\theta} + 2 m_2 (d - l_2) \dot{\theta} \dot{d}$$

spirab

/ /

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -g[m_1 l_1 + m_2 (d - l_2)] \cos\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = b_1 \dot{\theta}$$

Eq. movimento

$$[m_1 l_1^2 + J_1 + J_2 + m_2 (d - l_2)^2]\ddot{\theta} + 2m_2 (d - l_2)\dot{\theta}\dot{d} + g[m_1 l_1 + m_2 (d - l_2)]\cos\theta + b_1 \dot{\theta}_1 = \tau_1$$

→ Eq. mov. p/ d

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) - \frac{\partial L}{\partial d} + \frac{\partial D}{\partial \dot{d}} = \tau_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = m_2 \dot{d}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) = m_2 \ddot{d}$$

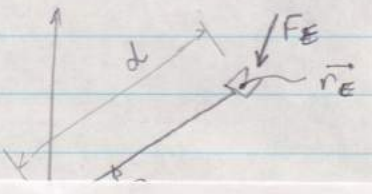
$$\frac{\partial L}{\partial d} = m_2 (d - l_2)\dot{\theta}^2 - m_2 g \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{d}} = b_2 \dot{d}$$

Eq. mov.

$$m_2 \ddot{d} - m_2 (d - l_2)\dot{\theta}^2 + m_2 g \operatorname{sen}\theta + b_2 \dot{d} = \tau_2$$

→ Esforço extremo na art. 1



$$\vec{F_E} = \begin{bmatrix} F_{Ex} \\ F_{Ey} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r_E} = \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\cos\theta \\ \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L d\cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \tau + F_E \cdot \frac{\partial r_E}{\partial \theta} = \tau - F_{Ex}\, d\operatorname{sen}\theta + F_{Ey} d\cos\theta = \tau_1$$

torque aplicado pelo motor da art 1.

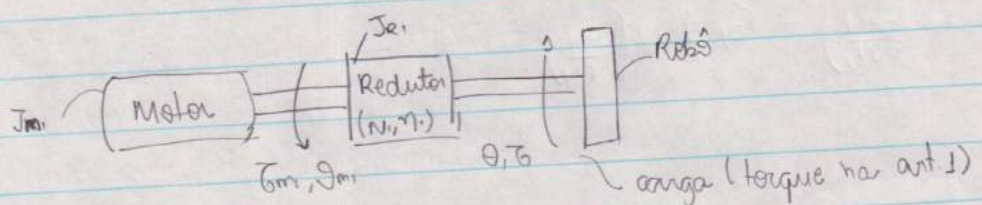
→ Esforço externo na art 2

$$Q_2 = F_2 + \vec{F_E} \cdot \frac{\partial \vec{r_E}}{\partial d}$$

$$\frac{\partial \vec{r_E}}{\partial d} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = F + F_{ex}\cos\theta + F_{ey}\sin\theta$$

→ Dinâmica do motor / transmissão da art 1



Hipóteses

- Corpos rígidos
- Motor e fonte de torque ideal

Redutor:

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\theta_{m_1}}{N} \\ \tau = \eta N_1 \tau_T \end{cases}$$

→ Eq. mov. do motor / transmissão da art. 1

$$(J_{m_1} + J_{e_1})\ddot{\theta}_{m_1} = \tau_{m_1} - \frac{\tau}{\eta N_1}$$

Isolando τ

$$\tau = \eta N_1 \tau_{m_1} - \eta N_1 (J_{m_1} + J_{e_1})\ddot{\theta}_{m_1}$$

/ /

Eq mov. art 1

$$[m_1 l_1^2 + J_1 + J_2 + m_2(d-l_2)^2]\ddot{\theta} + 2m_2(d-l_2)\dot{\theta}\dot{d} + g\cos\theta\,[m_1 l_1 + m_2(d-l_2)] + b_1\dot{\theta}_1 = \tau - F_{Ex}\, d\,\mathrm{sen}\,\theta + F_{Ey}\, d\cos\theta$$

$\ddot{\theta} \to \frac{\ddot{\theta}_{m1}}{N}$; $\dot{\theta} \to \frac{\dot{\theta}_{m1}}{N}$; $\theta \to \frac{\theta_{m1}}{N}$; $\ddot{\theta} \to \theta_{m2}\alpha_2$; $\dot{\theta} \to \theta_{m2}\alpha_2$

$$[m_1 l_1^2 + J_1 + J_2 + m_2(d-l_2)^2]\frac{\ddot{\theta}_{m1}}{N_1} + 2m_2(d-l_2)^2\frac{\dot{\theta}_{m1}}{N_1}\dot{d} +$$

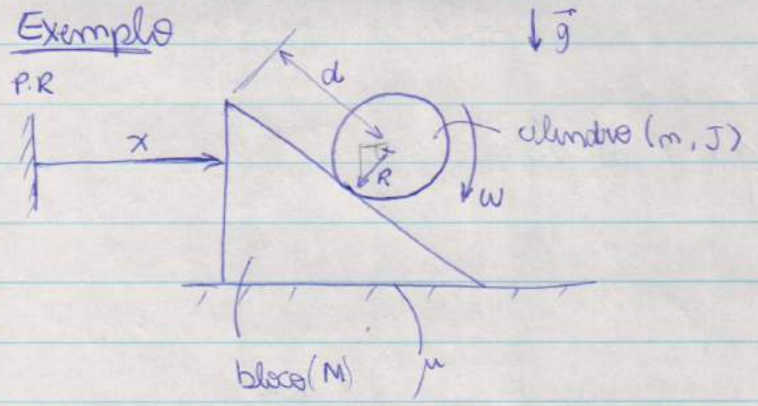
$$+ g\cos\left(\frac{\theta_{m1}}{N}\right)[m_1 l_1 + m_2(d-l_2)] + b_1\frac{\dot{\theta}_{m1}}{N} = \eta N_1 \tau_{m1} - \eta N_1 (J_{m1} + J_{R1})\ddot{\theta}_{m1} -$$

$$- F_{Ex}\, d\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_{m1}}{N_1}\right) + F_{Ey}\, d\cos\left(\frac{\theta_{m1}}{N_1}\right)$$

$\ddot{\theta} \to \theta_{m2}\alpha_2$

spiral

Exemplo



Hipóteses

- Corpos rígidos
- Atrito de deslizamento entre blocos e chão
- Cilindro gira sem deslizar
- Atrito de rolamento entre cilindro e bloco.
- Bloco é massa pontual
- Massa uniformemente distribuída no cilindro

→ graus de liberdade = 2

Coordenadas generalizadas ⇒ x, d

→ Posição dos CM

Bloco → $\begin{cases} x_B = x \\ y_B = 0 \end{cases}$

Cilindro → $\begin{cases} x_C = x + d\cos\alpha \\ y_C = h - d\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

→ velocidade lineas dos CM

Bloco → $\begin{cases} \dot{x}_B = \dot{x} \\ \dot{y}_B = 0 \end{cases}$

Cilindro → $\begin{cases} \dot{x}_C = \dot{x} + \dot{d}\cos\alpha \\ \dot{y}_C = -\dot{d}\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$

spiral

Linearização de Sistemas Dinâmicos

1) Variáveis de um sist. dinâmico

→ 4 tipos de variáveis

- variáveis de estado
- " de entrada
- variáveis de perturbação
- variáveis de saída

→ Variáveis de estado

- são variáveis que representam a condição instantânea do sistema, ou o estado do sist.
- Quando modelo matemático é obtido usando as Leis da Física, então as variáveis de estado são as variáveis associadas com as diversas formas de energia armazenadas no sist.

- Vetor de estados ($\vec{x}$)

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

- nº de variáveis de estado de um sist. = nº ordem do sistema
- O vetor de estado de um sist. não é único ⇒ existem infinitas possibilidades para os estados de um sist. dinâmico

→ Variáveis de entrada

- são variáveis geradas por agentes externos ao sistema (fontes) que alteram as condições de energia do sistema.
- As variáveis de entrada são usadas para controlar o sistema.

spiral

/ /

- Tem-se controle sobre as variáveis de entrada
- Vetor de entradas ($\vec{u}$)

$$\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

→ Variáveis de perturbação

- São variáveis geradas por agentes externos ao sistema (fontes) que alteram as condições de energia do sistema.
- As variáveis de perturbação são desconhecidas e, portanto, não são usadas para controlar o sistema.
- Variáveis de perturbação "dificultam" o controle de alguns sistemas

→ Variáveis de saída

- São variáveis associadas com sensores instalados no sistema
- Uma variável de saída é sempre medida.
- As variáveis "controladas" de um sist. dinâmico são variáveis de saída.

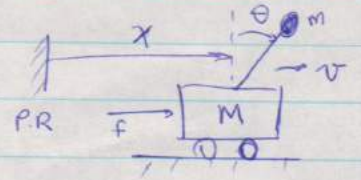
- Vetor de saídas ($\vec{y}$)

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

spiral

Exemplos

1) Pêndulo invertido sobre carro



→ Equação de mov.

$$\begin{cases} (M+m)\dot{v} + ml\cos\theta\,\ddot{\theta} - ml\,\mathrm{sen}\theta\,\dot{\theta}^2 + \mu_R(M+m)g\,\mathrm{sinal}(v) = f \\ ml^2\ddot{\theta} + ml(\cos\theta)\dot{v} - ml\,\mathrm{sen}\theta\,v\dot{\theta} - mg\,\mathrm{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

→ ORdem → $n=3$

Estados → $\begin{cases} \theta \\ \dot{\theta} = w \\ v \end{cases}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ w \\ v \end{bmatrix}$ ← vetor de estados

ATENÇÃO A VARIÁVEIS DE ESTADO

→ A 1ª derivada das variáveis de estado sempre está presente nas eq. dinâmicas

→ As variáveis de estado são as variáveis cuja 1ª derivada aparecem nas eq. dinâmicas

→ Entradas → f

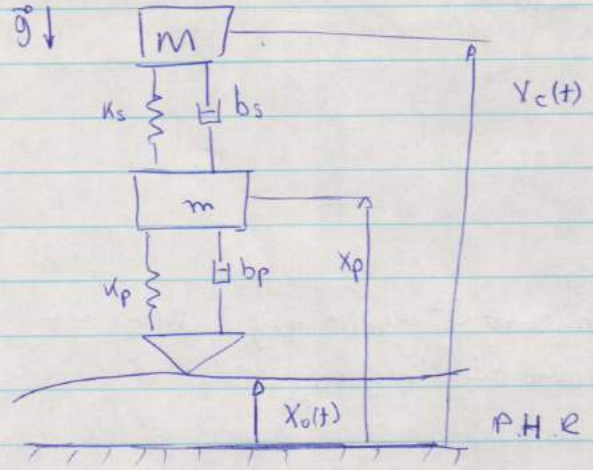
$\vec{u} = [f]_{m=1}$

→ Saídas → θ

$\vec{y} = [\theta]_{p=1}$

spirax

2) Suspensão de uma roda de um carro



$$\begin{cases} M\ddot{x}_c + k_s(x_c - x_p) + b_s(\dot{x}_c - \dot{x}_p) = 0 \\ m\ddot{x}_p + k_s(x_p - x_c) + b_s(\dot{x}_p - \dot{x}_c) + k_p x_p + b_p \dot{x}_p = k_p x_0 + b_p \dot{x}_0 \end{cases}$$

Ordem: $n = 4$

Estados: x_c, x_p, $\dot{x}_c, \dot{x}_p$ $\Rightarrow$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \\ v_c \\ v_p \end{bmatrix}$ ($v_c = \dot{x}_c$, $v_p = \dot{x}_p$)

Entrada $\Rightarrow$ não tem nenhum agente externo sob o qual temos controle

Perturbação $\Rightarrow$ $\vec{u} = [x_0]_{m=1}$ ← posição vertical do piso

Saída $\Rightarrow$ $\vec{y} = \begin{bmatrix} x_c \\ v_c \end{bmatrix}$

spirax

31

2) Representação de um sist. dinâmicos na forma do espaço dos estados

→ Formas de representar modelo matemático de um sist dinâmico de ordem n

. Uma equação diferencial de ordem n ou algumas eq. diferenciais de ordem menor que n.

· Um conjunto de n equações diferenciais de 1° ordem

· Função de Transferência
(Controle Clássico)

representação no espaço dos estados
(Controle Moderno)

→ Forma de espaço dos estados

· Representado por dois conjuntos de equações

- Equações de estado → conjunto de n equações diferenciais de 1° ordem
- Equações de saídas → conjunto de n equações algébricas

Equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t))}$$

Equações de saídas

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \end{cases} \Rightarrow \vec{y}(t) = \vec{g}(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$$

spiral

Eq. de estado

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w = f_1(\theta, w, \tau) \\ \dot{w} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - \frac{b}{ml}w + \frac{\tau}{ml^2} = f_2(\theta, w, \tau) \end{cases}$$

Eq. saída

$$y = \theta = g(\theta, w, \tau)$$

2) Suspensão de uma roda

→ Eq. de movimento

$$M\ddot{x}_c + k_s(x_c - x_p) + b_s(\dot{x}_c - \dot{x}_p) = 0$$

$$m\ddot{x}_p + k_s(x_p - x_c) + b_s(\dot{x}_p - \dot{x}_c) + k_p x_p + b_p \dot{x}_p = k_p x_0 + b_p \dot{x}_0$$

ordem → $n = 4$

Estado → $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_c \\ x_p \\ v_c \\ v_p \end{bmatrix}$

Entrada → $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix}$

(Perturbação)

saída → $\vec{y} = \begin{bmatrix} x_c \\ v_c \end{bmatrix}$

→ Equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_c = v_c \\ \dot{x}_p = v_p \\ \dot{v}_c = -\frac{k_s}{M}(x_s - x_p) - \frac{b_s}{M}(v_c - v_p) \\ \dot{v}_p = -\frac{k_s}{m}(x_p - x_c) - \frac{b_s}{m}(v_p - v_c) - k_p x_p - b_p v_p + k_p x_0 + b_p \dot{x}_0 \end{cases}$$

spirab

/ /

→ Eq. de saída

$$\begin{cases} y_1 = x_c \\ y_2 = v_c \end{cases}$$

→ Dinâmica linear

Exemplo: Eq. de Van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = u$$

a) Ordem → $n = 2$

Estados → x, $\dot{x}$ → v

Entrada → u

Saída → x

$$\begin{cases} \dot{x} = v = f_1(x, v, u) \\ \dot{v} = \mu(1-x^2)v - x + u = f_2(x, v, u) \end{cases}$$

b) Condição de linearização

Regime permanente → $\dot{x}_0 = \dot{v}_0 = 0$

Dado → x_0

Subst cond linearização na eq dinâmica

$$\dot{x}_0 = v_0 = 0$$

$$\dot{v}_0 = \mu(1-x_0^2)v_0 - x_0 + \mu = 0$$

$$\mu_0 = x_0$$

Condição de linearização

x_0 conhecido

$v_0 = 0$

$\mu_0 = x_0$

c) Derivadas parciais

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)_0 = 1 \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 = -2\mu x_0 v_0 - 1 = 1$$

spiral

/ /

$\left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)_0 = \mu(1-x_0^2)$

$\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)_0 = 1$

Eq estado din. linearizada:

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)_0 \delta v + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) \delta u \\ \delta\dot{v} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)_0 \delta v + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)_0 \delta u \end{cases}$$

$\delta\dot{x} = \delta v$

$\Rightarrow \delta\dot{v} = -\delta x + \mu(1-x_0^2)\delta v + \delta u$

$-1 \qquad \mu(1-x_0^2) \qquad 1$

Eq. saída linearizada

$y = x \rightarrow \delta y = \delta x$

d) Espaço dos estados na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1-x_0^2) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta v \end{bmatrix}}_{\delta\vec{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \delta u$$

$$\delta y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta v \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} \delta u$$

Exemplo: Pêndulo invertido sobre carro

Eq de movimento

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w \\ ml(\cos\theta)\dot{w} + ml^2\dot{w} - mgl(\sin\theta) = 0 \\ (M+m)\dot{v} + ml(\cos\theta)\dot{w} - ml(\sin\theta)w^2 = f \end{cases}$$

ordem → n=3

Estados → θ, w, v

Entrada → f

Saída → θ

a) Cond de linearização → cond de equilíbrio

$$\begin{cases} \dot{\theta}_c = \dot{w}_0 = \dot{v}_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

Subst. condição de eq. nas eq. de movimento

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = w_0 = 0 \\ -mgl\sin\theta_0 = 0 \\ -lm(\sin\theta_0)\dot{w}_0^2 = f_0 \rightarrow f_0 = 0 \end{cases}$$

Condição de linearização

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ w_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

Variáveis de desvio:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \delta\theta \rightarrow \theta = \delta\theta \rightarrow \dot{\theta} = \delta\dot{\theta} \\ w = w_0 + \delta w \rightarrow w = \delta w \rightarrow \dot{w} = \delta\dot{w} \\ v = v_0 + \delta v \rightarrow v = \delta v \rightarrow \dot{v} = \delta\dot{v} \\ f = f_0 + \delta f \rightarrow \underbrace{f = \delta f}_{(1)} \end{cases} \quad (2)$$

/ /

Substituindo (1) e (2) na eq de mov.

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta} = \delta w \\ ml(\cos\delta\theta)\delta\dot{w} + ml^2\delta\dot{w} - mgl(\sin\delta\theta) = 0 \\ (M+m)\delta\dot{v} + ml(\cos\delta\theta)\delta\dot{w} - ml(\sin\delta\theta)\delta\dot{\theta}^2 = \delta f \end{cases}$$

$\delta\dot{\theta}^2 \to 0$

Aproximando $\to$ $\begin{cases} \cos\delta\theta \approx 1 \\ \sin\delta\theta \approx \delta\theta \end{cases}$

Eq. de movimento linearizada

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta} = \delta w \\ ml\delta\dot{v} + ml\delta\dot{w} - mgl\delta\theta = 0 \quad (3) \\ (M+m)\delta\dot{v} + ml\delta\dot{w} = \delta f \quad (4) \end{cases}$$

na forma de espaço dos estados:

Isolando $\delta\dot{v}$ da eq (3)

$$\delta\dot{v} = -l\delta\dot{w} + g\delta\theta \quad (5)$$

Subst. na eq (4)

$$(M+m)[-l\delta\dot{w} + g\delta\theta] + ml\delta\dot{w} = \delta f$$

$$\delta\dot{w}[-Ml - ml + ml] + [M+m]g\delta\theta = \delta f$$

$$\delta\dot{w} = \frac{(M+m)}{Ml} g\cdot\delta\theta - \frac{\delta f}{Ml}$$

Subst. na eq (5)

$$\delta\dot{v} = -l\left[\left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\delta\theta - \frac{\delta f}{Ml}\right] + g\delta\theta$$

$$\delta\dot{w} = -\left(1 - \frac{m}{M}\right)g\delta\theta + g\delta\theta - \frac{\delta f}{M}$$

$$\delta\dot{v} = -\frac{m}{M}g\delta\theta + \frac{\delta f}{M}$$

Eq. de mov. linear na forma de espaço dos estado

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta} = \delta w \\ \delta\dot{w} = \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\delta\theta - \frac{\delta f}{Ml} \end{cases} \qquad \delta\dot{v} = -\frac{m}{M}g\delta\theta + \frac{\delta f}{M}$$

spirab

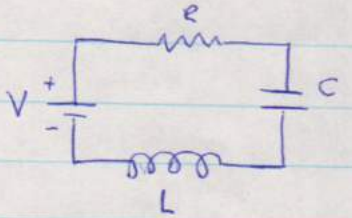
Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{w} \\ \delta\dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta w \\ \delta v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \delta F$$

$\dot{\delta x}$ — A — δx

$$\delta y = \underbrace{[1 \; 0 \; 0]}_{C} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta w \\ \delta v \end{bmatrix}$$

Exemplo - circuito elétrico



$$V - V_e - V_c - V_L = 0$$

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt + L\frac{di}{dt} = V$$

ordem → $n = 2$ (tem integral)

estado → i, g → carga

entrada → V

saída → V_L → tensão no indutor

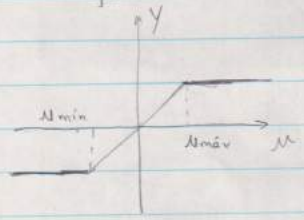
Linearidades Especiais - podem ser impossíveis de linearizar

Exemplos:

- Saturação
- Histereses
- Zona morta
- Atrito coulombiano

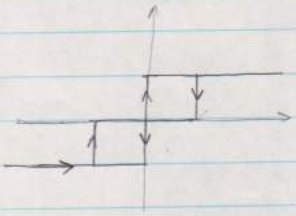
spirab

- Saturação



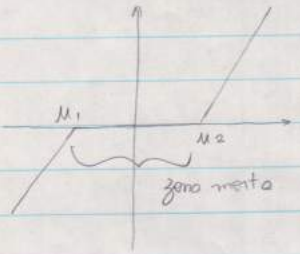
a partir de certo valor fica limitada

- Histerese

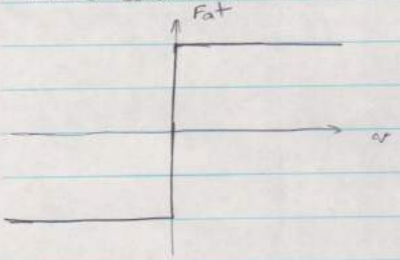


subida e descida em caminhos diferentes

- Zona morta



- Atrito Coulombiano



spirak

Exemplo: Linearização de atrito coulombiano em torno da velocidade zero

→ Força de atrito Coulombiano

$Fat = -\mu N \, sinal(v)$

A derivada de Fat

Example: Linearização de atrito coulombiano em torno da velocidade zero

→ Força de atrito Coulombiano

$F_{at} = -\mu N \, sinal(v)$

A derivada de F_{at} em relação à velocidade para $v = 0$ resulta em infinito.

→ Solução para obter um modelo linear de força de atrito coulombiano é trocar a força de atrito coulombiano por uma força de atrito viscosa equivalente, ou seja.

$F_b = b_{eq} v$

⇒ Dúvida? { Quanto vale b_{eq}? / Como calcular b_{eq}? }

→ Cálculo de b_{eq} é feito igualando energia dissipada pelo atrito coulombiano com a energia dissipada pelo atrito viscoso para um movimento oscilatório em torno de um dado ponto

→ Movimento oscilatório

$x(t) = x_m \, sen(\omega t)$

{ ω = freq. da oscilação
x_m = amplitude de movimento

$v(t) = \omega x_m \cos(\omega t)$

→ Energia dissipada pelo atrito coulombiano

$$E_c = 2\int_{-x_m}^{x_m} F_{at}\,dx = 2\int_{-x_m}^{x_m} \mu N\,dx$$

$$E_c = 2\mu N\,[x]_{-x_m}^{x_m} = \boxed{4\mu N x_m = E_c}$$

→ Energia dissipada pelo atrito viscoso

$$E_b = \int_{-x_m}^{x_m} F_b\,dx = \int_{-x_m}^{x_m} F_b \frac{dx}{dt}\,dt \qquad (v = \frac{dx}{dt})$$

$$E_b = \int_0^T b_{eq} v^2\,dt = \int_0^T b_{eq}\omega^2 x_m^2 \cos^2(\omega t)\,dt$$

onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Sabendo que $\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{T}{2}$

$$E_b = b_{eq}\omega^2 x_m^2 \frac{T}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow \boxed{E_b = \pi b_{eq} x_m^2 \omega}$$

Igualando E_c e E_b

$$4\mu N x_m = \pi b_{eq} x_m^2 \omega$$

$$\boxed{b_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi x_m \omega}}$$

As relações de Cauchy Riemann são condições necessárias e suficientes para a existência de $F'(s)$.

Funções Analíticas

$F(s)$ é dita analítica em S_0 se:

- $F'(s)$ existe em S_0 e em todo ponto de uma vizinhança de S_0.

$F(s)$ é dita analítica num domínio do plano s se ela é analítica em todo ponto desse domínio.

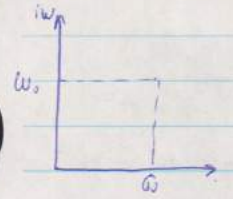
Ponto Singular

S_0 é dito ponto singular se $F(s)$ é analítica em toda vizinhança de S_0 exceto no próprio S_0.

Pólo

É o ponto singular para o qual $F(s)$ e suas derivadas tendem a infinito

Derivada de $F(s)$ $(F(s) = u(\sigma,\omega) + v(\sigma,\omega))$



$S_0 = \sigma_0 + i\omega_0$

s pode tender a S_0 por infinitos caminhos.

Para 2 caminhos em particular, temos:

1. Paralelo ao eixo real: $\Delta s = \Delta\sigma \to 0$

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial u}{\partial \sigma} + i\frac{\partial v}{\partial \sigma} \quad (1)$$

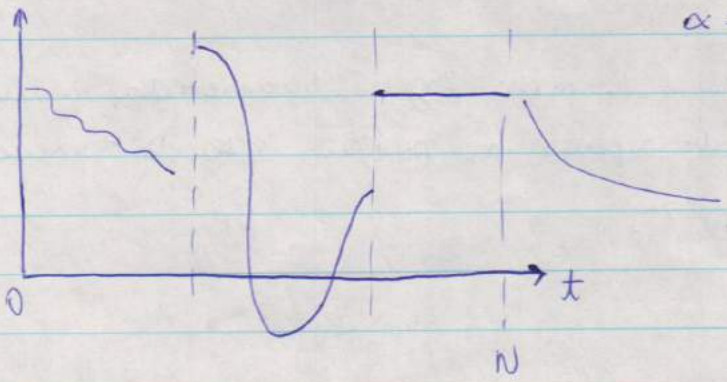
2. Paralelo ao eixo imaginário

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial v}{\partial \omega} - i\frac{\partial u}{\partial \omega} \quad (2)$$

(1) e (2) devem produzir o mesmo resultado

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega}} \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\partial u}{\partial \omega}}$$ - Relação de Cauchy-Riemann

spirab



$\alpha \leq t \leq \beta$

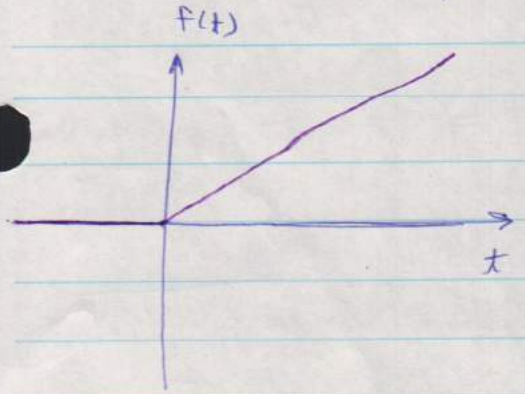
$f(t)$ é uma função finita por partes num intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo pode ser subdividido num nº finito de intervalos, nos quais $f(t)$ é contínua e possui limites finitos à esquerda e direita.

Suponha $f(t)$ contínua por partes entre $0 \leq t \leq N$.

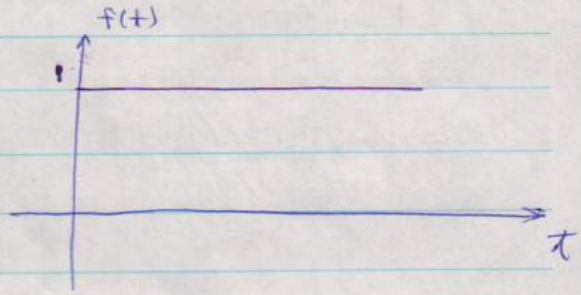
$f(t)$ é de ordem exponencial se existe σ, tal que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\sigma t} |f(t)| = 0 \iff \exists M > 0 \text{ e } \sigma_c$$

tais que $|f(t)| < M e^{\sigma_c t}$



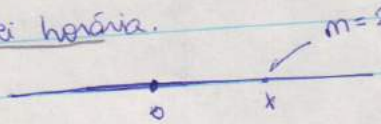
$f(t) = t)$



/ /

Exemplo de Aplicação

Uma partícula de material de massa 2kg, é submetida a uma força $f(x) = -8x$ e parte do repouso na posição $x = 10$. Determine sua lei horária.



$f(x) = -8x$

$x(0) = 0$

$x(t) = ?$

$2\ddot{x}(t) = -8x(t)$ · $F = m \cdot a$

$2\ddot{x}(t) + 8x(t) = 0$

$\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$

$\mathcal{L}[\ddot{x} + 4x(t)] = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 4X(s)] =$ ($\dot{x}(0) = 0$)

$= s^2 X(s) + 4X(s) - 10s = 0$

$\mathcal{L}[1(t)] = 1/s$

$\mathcal{L}[t] = 1/s^2$

$\mathcal{L}[\operatorname{sen} \Omega t] = \Omega/s^2 + \Omega^2$

$\mathcal{L}[\cos \Omega t] = s/s^2 + \Omega^2$

$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = 1/s + \alpha$

$X(s)[s^2 + 4] = 10s$

$X(s) = 10 \dfrac{s}{s^2 + 4}$

$\therefore \boxed{x(t) = 10 \cos 2t}$

Transformada de Laplace

Combinação Linear:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

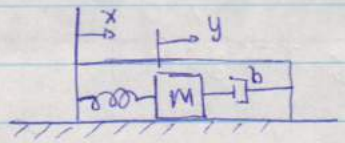
$$\therefore [f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)]$$

mas sabemos também que

$$[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$$

EXEMPLO



Um acelerômetro está solidário à estrutura de um avião, paralelamente à superfície horizontal, conforme a figura. O avião encontra-se em velocidade de cruzeiro (cte.). A mola está no seu comportamento natural e a massa "M" em repouso em relação à carcaça do acelerômetro.

Submete-se, então, o avião a uma aceleração de $1\,m/s^2$. Descreva a lei horária do deslocamento da massa "M" em relação à carcaça do acelerômetro.

Dados

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{M} &= 200 \\ \frac{b}{M} &= 30 \end{aligned}\right\} \text{SI}$$

espiral

/ /

Resolução:

$$M\ddot{y} = -k(y-x) - b(\dot{y}-\dot{x})$$

$$\Rightarrow M\ddot{y} + k(y-x) + b(\dot{y}-\dot{x}) = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{M}(y-x) + \frac{b}{M}(\dot{y}-\dot{x}) = 0$$

$$\ddot{y} + 200(y-x) + 30(\dot{y}-\dot{x}) = 0$$

mudança de variáveis: $z = y - x \Rightarrow y = z + x$

(p/ sair algum $\ddot{x}$ → ac. do avião) $\dot{z} = \dot{y} - \dot{x} \quad \dot{y} = \dot{z} + \dot{x}$

$\ddot{y} = \ddot{z} + \ddot{x}$

$$\Rightarrow (\ddot{x} + \ddot{z}) + 200z + 30\dot{z} = 0$$

Em $t=0$:

$y = x \Rightarrow z = y - x = 0$

e também,

$\dot{y} = \dot{x} \Rightarrow \dot{z} = 0$

$\ddot{y} = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{z} = 0$

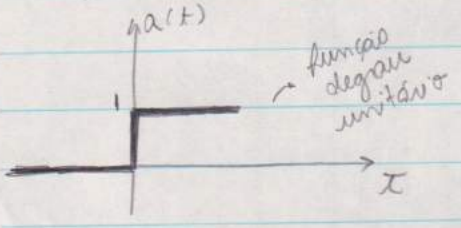
$$\Big\} \quad z(0) = \dot{z}(0) = \ddot{z}(0) = 0$$

$\therefore$ $\mathcal{L}$ nos dois lados:

$$a(t) = \ddot{x} = -\ddot{z} - 30\dot{z} - 200z$$

(ou $a(s) = (-s^2 - 30s - 200)z(s)$)

$$\Rightarrow \boxed{z(s) = \frac{-a(s)}{s^2 + 30s + 200}}$$



spirab

40

· $\mathcal{L}[a(t)] = F(s) = a(s) = \frac{1}{s}$

· $\mathcal{L}[-\dddot{z} - 30\ddot{z} - 200\dot{z}] = -z(s)(s^2 + 30s + 200)$

$$z(s) = \frac{-a(s)}{s^2+30s+200} = \frac{-1}{s^3+30s+200s} = \frac{-1}{s(s+10)(s+20)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+10} + \frac{C}{s+20}$$

$$\Rightarrow -1 = (s+10)(s+20)A + s(s+20)B + s(s+10)C$$

com $s = 0 \Rightarrow -1 = 200A \Rightarrow A = -1/200$

com $s = -10 \Rightarrow -1 = -100B \Rightarrow B = 1/100$

com $s = -20 \Rightarrow -1 = 200C \Rightarrow C = -1/200$

$$\therefore \boxed{z(s) = -\frac{1}{200s} + \frac{1}{100(s+10)} - \frac{1}{200(s+20)}}$$

$$\Rightarrow z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\tfrac{1}{200s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{1}{100(s+10)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[-\tfrac{1}{200(s+20)}\right]$$

$$= \frac{-1}{200}\mathcal{L}^{-1}[1/s] + \frac{1}{100}\mathcal{L}^{-1}[1/(s+10)] + \left(\frac{-1}{200}\right)\mathcal{L}^{-1}[1/(s+20)]$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{-1}{200} + \frac{e^{-10t}}{100} - \frac{e^{-20t}}{200}} \quad t \geq 0$$

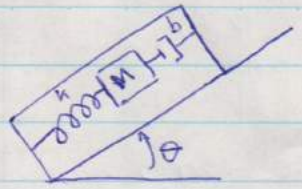
$z(t) = 0; \quad t < 0$

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{200} + \frac{1}{100 \cdot e^{10t}} - \frac{1}{200e^{20t}}\right)$$

$$= \frac{-1}{200} = -0{,}05\,m = -5\,mm$$

ou seja, a mola estará comprimida em 5mm.

Ex. 2:



$g = 10\ m\,s^{-2}$

Em $t=0$

$\theta = 5{,}7° \approx 0{,}1\ rad$

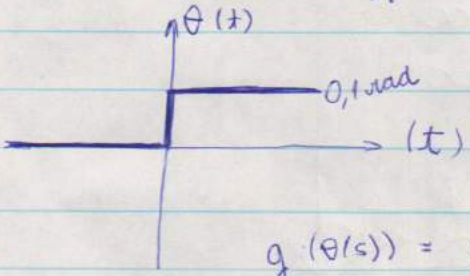
(sistema parado)

$$M\ddot{y} = k(x-y) + b(\dot{x}-\dot{y}) - M\cdot g\cdot\theta$$

$z = y - x$ (0 em $t=0$) $\Rightarrow M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = -Mg\theta$

(linearizando, supondo θ pequeno)

$$\Rightarrow y(x) = z(s) = \frac{-g\,\theta(s)}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{M}}$$



$$g(\theta(s)) = a(s) = 10 \cdot 0{,}1/s = 1/s$$

$$\Rightarrow z(s) = \frac{-1}{\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)s} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{200} + \frac{e^{-10t}}{100} - \frac{e^{-20t}}{200}$$

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = -0{,}05 = -5\,mm$$

OU SEJA, não faz diferença p/ o acelerômetro se o avião estiver acelerando para frente ou inclinado p/ cima!!!

Caso com Pólos Múltiplos

Exemplo: $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$

$$F(s) = \frac{A}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)}$$

$$\Rightarrow (s+1)^3 F(s) = A + B(s+1) + C(s+1)^2$$

$$A = (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = (1 - 2 + 3) = 2 \;//$$

$$B = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 F(s)\right]_{s=-1} = (2s+2)\Big|_{s=-1} = 0$$

$$C = \frac{1}{2!}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2!} \cdot 2 = 1 \;//$$

Caso Particular: Pólos Complexos Conjugados

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\cos \Omega t] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\operatorname{sen} \Omega t] = \frac{\Omega}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4j}{2} = -1 \pm 2j$$

Exemplo: $F(s) = \dfrac{2s+12}{s^2+2s+5} = \dfrac{10 + 2(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2}$

$$F(s) = 5 \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} + 2 \cdot \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = 5e^{-t}\operatorname{sen} 2t + 2e^{-t}\cos 2t$$

spiral

/ /

Função Impulso e Relação com Descontinuidade

$$\mathcal{L}_- = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

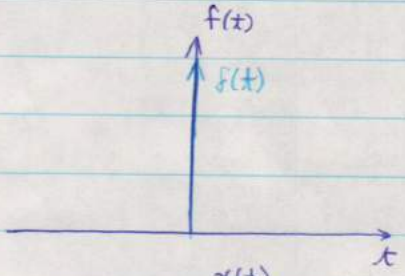
$$t = 0^- = \lim_{\substack{t \to 0^- \\ t<0}} t$$

$$t = 0^+ = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t>0}} t$$

$$\mathcal{L}_+ = \int_{0^+}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

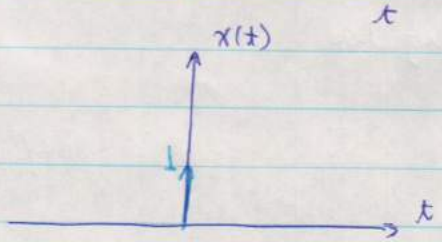
Exemplo: Resolver $\dot{x} + 2x = \delta(t)$, $t > 0_-$

$x(0_-) = 1$



$$f(0) = \int_0^{\infty} \delta(t)\, f(t)\, dt$$

$$\int_0^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$



p/ $t \geq 0^+$

$\dot{x} + 2x = 0$

$x(t) = x(0_+)\, e^{-2t}$, $t \geq 0_+$

$x(0_+) = ?$

$\dot{x} + 2x = \delta(t)$

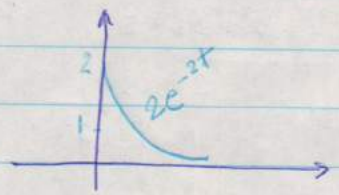
$\mathcal{L}_-[\dot{x} + 2x] = \mathcal{L}_-[\delta(t)]$

$sX_-(s) - x(0_-) + 2X_-(s) = 1$

$\Rightarrow X_-(s)(s+2) = 1 + x(0_-) = 2$

$\Rightarrow X_-(s) = \dfrac{2}{s+2}$

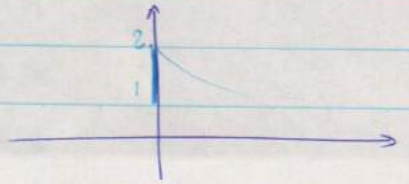
$\Rightarrow x(t) = 2e^{-2t}$ $t > 0_-$



$x(0_+) = 2$ //

$\Rightarrow (x_{0+} - x_{0-}) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$

$x_{0+} = 1 + x_{0-} = 1 + 1 = 2$



spiral