P1 de Mecflu

I) Viscosidade
II) Cinemática
III) Análise Dimensional e Semelhança

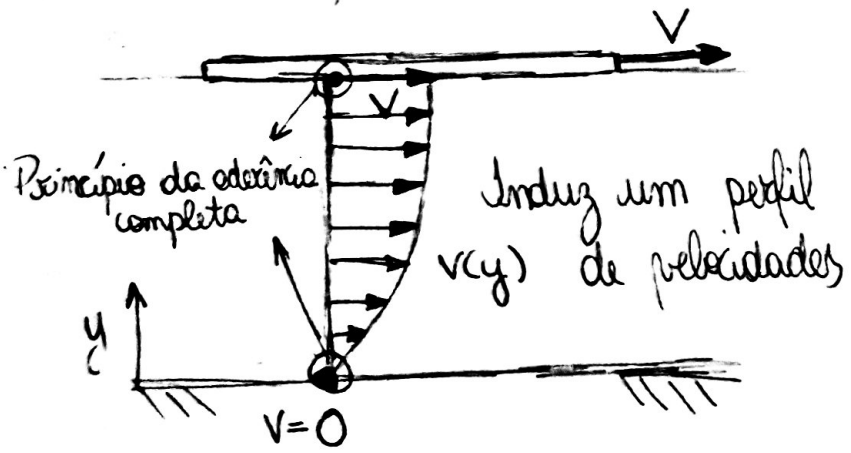
I)

- Viscosidade: resistência de um fluido às tensões de cisalhamento.
  - → Cinemática: ν (m^2/s) $\Longrightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho}$
  - → Dinâmica: μ ($Kg/m.s$)

onde ρ é a massa específica

- Princípio da Aderência Completa: um fluido em contato com uma superfície possui a mesma velocidade que esta.

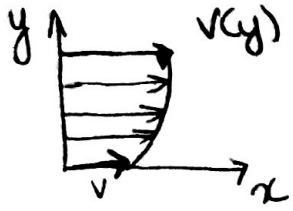
Ex: Ao arrastar uma placa na superfície de um recipiente que contém um fluido viscoso, a velocidade da camada de fluido junto à superfície da placa é a mesma com que esta é arrastada



O motivo disso é que o modelo implica em que o fluido poderia ser segmentado em camadas, havendo atrito entre estas, desde que o mesmo fosse viscoso.

- Lei de Newton da viscosidade: Estabelece uma relação entre o campo de velocidades induzido e a Tensão de Cisalhamento entre determinadas camadas. De um modo geral, utiliza-se esta para calcular a Tensão sobre a superfície sólida.

$$\tau = \mu \frac{\partial v(y)}{\partial y}$$



② • Aproximação para espessuras pequenas (muito comum em viscosímetros)

$$\frac{\partial v(y)}{\partial y} = \frac{V_1 - V_0}{\varepsilon}$$ onde V_1 e V_0 são as velocidades nos extremos e ε a espessura (perfil linear de velocidades)

$$\tau = \frac{(V_1 - V_0)}{\varepsilon} \cdot \mu$$

• Exercícios:

De maneira geral, os exercícios tratam do cálculo de forças e momentos em corpos rígidos decorrentes da viscosidade do fluído. Os exercícios comuns podem ser esquematizados da seguinte maneira:

Velocidade do corpo rígido arrastado ou não, que interage com o fluido, constante ao longo do tempo.

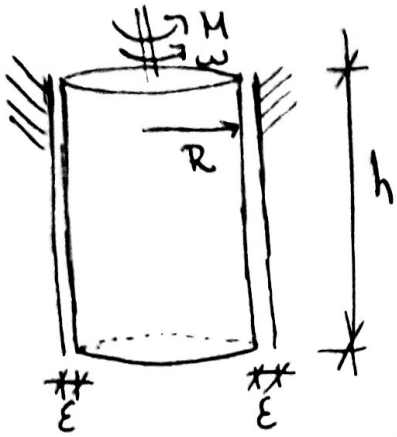
① Velocidade é constante, também, ao longo da superfície (viscosímetro cilíndrico)

Procedimento
- calcular τ a partir de ω, r e ε
- Multiplicar pela área molhada, obtendo a força aplicada
- Momento = Força x raio

② Velocidade varia ao longo da superfície. Ex: viscosímetros de outras formas, área molhada do cilindro e a das tampas.

Velocidade do corpo que interage com o fluido varia ao longo do tempo → ③ O exercício propõe o cálculo de equações horárias $S(t)$, $V(t)$. A dificuldade encontra-se no fato da aceleração variar com a velocidade, ou seja, temos uma EDO.

(1)



Como calcular o momento necessário para manter ω constante? (3)

$$M - M_{resistente} = \cancel{I\alpha}^{\,0}$$

$$M = M_{resistente}$$

→ Como $V = \omega r$ para todos os pontos da superfície lateral do cilindro.

→ Como a ε é constante ao longo de todo a superfície molhada, têm-se que:

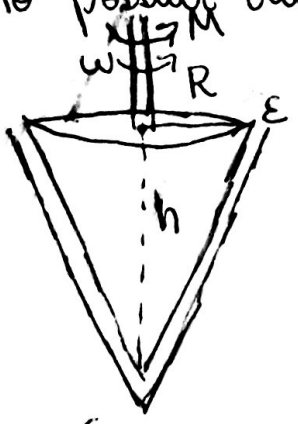
$$\tau = \frac{\omega r - 0}{\varepsilon} \cdot \mu \text{ (perfil linear)} \qquad \tau = \frac{\mu \omega R}{\varepsilon} \text{ para todos os pontos.}$$

ε peq.

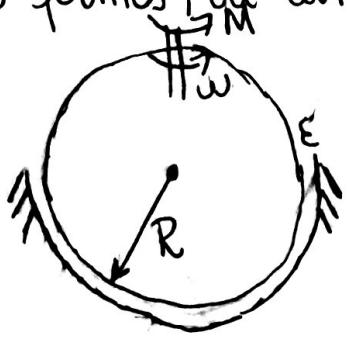
Assim: $F_{res} = \tau \cdot A_{lateral} = \mu \omega R \cdot 2\pi R \cdot h / \varepsilon$

$$\boxed{M_{res} = F_{res} \cdot R = \frac{\mu \omega R^3 h \cdot 2\pi}{\varepsilon}}$$

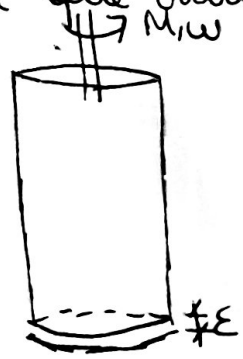
(2) Acontece que o prisosímetro pode estar em outras condições, bem como possuir outras formas, ou uma espessura que varia



Cone



Esfera



Fundo do cilindro

Procedimento:
- $C = \int R\,dF$
- $dF = \tau \cdot dA$
- Expressar τ em função de r, bem como dA em relação a dr
- Realizar a integral inicial.

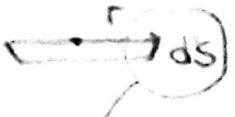
OBS: Se ε variar, expressar em função de r e introduzir na integ

④ • Cone

$$M = \int r\, dF$$

$$dF = \sigma\, dA$$

$$\sigma = \frac{\omega r}{\varepsilon} \cdot \mu$$



$$dA = 2\pi r . ds$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dr}{ds}$$

$$dF = \sigma\, dA$$

$$dF = \frac{\omega r}{\varepsilon} . \mu . 2\pi r \frac{dr}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$C = \int_0^R \frac{\omega r^3 \mu . 2\pi\, dr}{\varepsilon \operatorname{sen}\theta}$$

$$C = \frac{\omega R^4 \mu \pi}{2 \varepsilon \operatorname{sen}\theta}$$

• Esfera

$$M = \int r\, dF$$

$$dF = \sigma . dA$$

$$\sigma = \frac{\omega R . \operatorname{sen}\theta}{\varepsilon} . \mu$$

$$dA = 2\pi R \operatorname{sen}\theta . dr$$

$$dr = R\, d\theta$$

$$dA = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$M = \int R \operatorname{sen}\theta\, dF$$

$$M = \int R^3 \operatorname{sen}\theta^3 . \frac{2\pi\omega\mu}{\varepsilon}$$

* Atenção ao intervalo de integração, pode ser de 0° a 90° ou não. (caso em que a área molhada é metade da esfera)

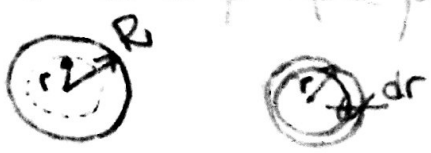
• Fundo do cilindro

Análogo, porém $dA = 2\pi r\, dr$

$$\sigma = \frac{\omega r}{\varepsilon} . \mu$$

r varia de 0 a R

r variável é sempre referente a um raio genérico.

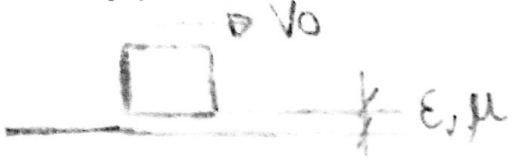


3 Já tratamos de exercícios em que $v(t)$ é cte, porém varia ai não ao longo da superfície. Agora trataremos para um caso em que temos $a(t) \neq 0$.

Exemplo: Um bloco desliza com $v(t) = v_0$ até entrar em um trecho com uma poça de fluido com viscosidade μ, espessura ε

Encontrar $v(t)$:

Bloco possui massa m e base quadrada de lado b.



* Reparar que a velocidade de cada ponto da superfície molhada é (~~const~~) igual, além de variarem da mesma maneira ao longo do tempo.

$$R_x = m.a \qquad R_x = \tau . A = -\frac{v.\mu}{\varepsilon} . b^2$$

$$-\frac{v(t).\mu.b^2}{\varepsilon} = m.\frac{dv(t)}{dt}$$

$$-\frac{\mu b^2}{\varepsilon . m} dt = \frac{dv(t)}{v}$$

A resolução da EDO pode ser feita "separando t e dt para um lado, v e dv para o outro e integrando ambos".

$$-\int_{t_0}^{t} \frac{\mu b^2}{\varepsilon m} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{\mu b^2}{\varepsilon m} t = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

$$v = v_0 . e^{-\frac{\mu b^2 t}{\varepsilon m}}$$

II) Cinemática dos Fluidos

• Estuda o movimento das partículas fluidas, descrevendo-o através de um campo de velocidades

• Lagrange: estuda-se cada partícula individualmente, deslocando-se junto com ela

$$\vec{V} = \vec{V}(t)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

• Euler: O observador está parado.

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{V}}{dt}}_{\text{derivada total}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{local}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{V}}_{\text{convectiva}}$$

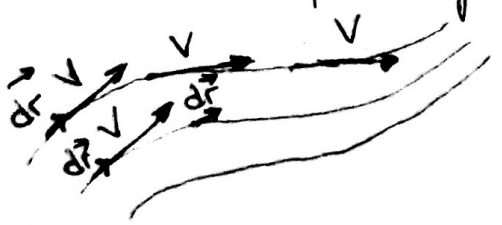
• Regime permanente: $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$

* Exercícios de um modo geral implicam no cálculo de acelerações, trajetórias e linha de corrente.

• Equação da trajetória: a partir do campo de velocidade de uma partícula bem como uma posição Po em um instante to, é possível obter o posição desta em função do tempo. Deve-se encontrar $(x(t), y(t), z(t))$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

• Linha de corrente: linha tal qual possui como vetores tangentes, os vetores velocidades de diferentes partículas.



Assim $d\vec{r} // \vec{V}$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{z}$$

*) II) $\vec{v} = 10x^2\vec{e_x} - 20xy\vec{e_y} + 100t\vec{e_z}$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}$$

a) Regime permanente?

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 100\vec{e_z} \quad \underline{\underline{\text{Não}}}$$

b) Calcular $\vec{v}$ e $\vec{a}$ para $t=0{,}1s$, $x=1$; $y=2$; $z=5$

$\vec{v} = 10\vec{e_x} - 40\vec{e_y} + 50\vec{e_z}$ (m/s)

$|\vec{v}| = \sqrt{100+40^2+100} = \underline{42{,}43 m/s}$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}$$

$\vec{a_l} = 100\vec{e_z}$

$\vec{a_c} = ?$

$$a_{cx} = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$a_{cx} = 10x^2 . 20x = 200x^3 = 200 m/s^2$

$$a_{cy} = v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$= 10x^2.(-20y) - 20xy(-20x) = 200x^2y = 400 m/s^2$

$a_{cz} = v_x\partial v_z \ldots = 0$

$|\vec{a}| = \sqrt{200^2+400^2+100^2} = 456 m/s^2$

(1) Trajetória

$v_x = \frac{dx}{dt}$ $\quad 10x^2 = \frac{dx}{dt}$

$v_y = \frac{dy}{dt}$ $\quad -20xy = \frac{dy}{dt}$

$v_z = \frac{dz}{dt}$ $\quad 100t = \frac{dz}{dt}$

Em x: $10\,dt = \frac{dx}{x^2}$

$$10(t-t_0) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - 10(t-t_0)$$

$$x = \frac{1}{1-10(t-0{,}1)}$$

Em y: $v_y = \frac{dy}{dt}$ $\quad -20xy = \frac{dy}{dt}$

$$\frac{-20}{1-10(t-0{,}1)} \cdot y = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{-20}{1-10(t-0{,}1)}\,dt = \frac{dy}{y}$$

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \left[\frac{-20\ln\left(1-10(t-0{,}1)\right)}{-10}\right]_{t_0}^{t}$$

$$\ln\left(y/y_0\right) = 2\ln\left(1/x - 10(t-0{,}1)\right)^2$$

$$y = 2\left[1-10(t-0{,}1)\right]^2$$

Em z: $\frac{dz}{dt} = 100t$

$$z - z_0 = \frac{1}{2}\,100(t^2 - t_0^2)$$

$$z = 5 + 50(t^2 - 0{,}02)$$

9 d linha de corrente.

$$\frac{dx}{10x^2} = \frac{dy}{-20xy} \qquad -2\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \rightarrow -2\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$$

$$y = y_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^2$$

$$y = \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z} \qquad \frac{dx}{10x^2} = \frac{dz}{100t}$$

$$\frac{dx}{x^2} = dz$$

$$-\frac{1}{x}\Big|_{x_0}^{x} = z - z_0$$

$$z = z_0 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} \qquad z = 6 - \frac{1}{x}$$

(10) III) Análise Dimensional

	F	ρ	V	l	c	μ
M	1	1	0	0	0	1
L	1	-3	1	1	1	-1
T	-2	0	-1	0	-1	-1

3 adimensionais

$$\rho^{\alpha_1} V^{\alpha_2} L^{\alpha_3} F = M^0 L^0 T^0$$

$$\pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$$

$$\rho^{\alpha_1} V^{\alpha_2} L^{\alpha_3} C = M^0 L^0 T$$

$$\pi_2 = \frac{c}{V} \quad \text{Mach}$$

$$\pi_3 \rightarrow \rho^{\alpha_1} V^{\alpha_2} L^{\alpha_3} \mu = M^0 L^0 T^0$$

$$\frac{\rho V L}{\mu} \qquad \frac{F}{\rho V^2 L^2} = \phi\left(\frac{V}{c}, \frac{\rho V L}{\mu}\right)$$

Enunciado $V_p = 2 c_p$

$$\frac{V_m}{c_m} = \frac{V_p}{c_p} \qquad V_m = 2 \times 340,3 = 680,6 \text{ m/s}$$

$$\frac{L_p}{L_m} = ?$$

$$\frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} \Rightarrow \frac{1,225 \cdot 680,6 \cdot L_m}{1,7897 \cdot 10^{-5}} = \frac{0,0184 \cdot 3017,24}{1,9795 \cdot 10^{-3}}$$

$$\frac{L_m}{L_p} = 6,18$$