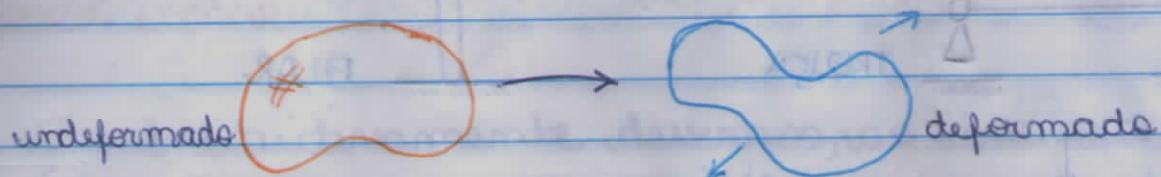


## ESCOLA

### INTRODUÇÃO: CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS, APOIOS E REAÇÕES

## SÓLIDO

Conjunto conexo de pontos materiais que possui forma definida na ausência de carregamentos externos

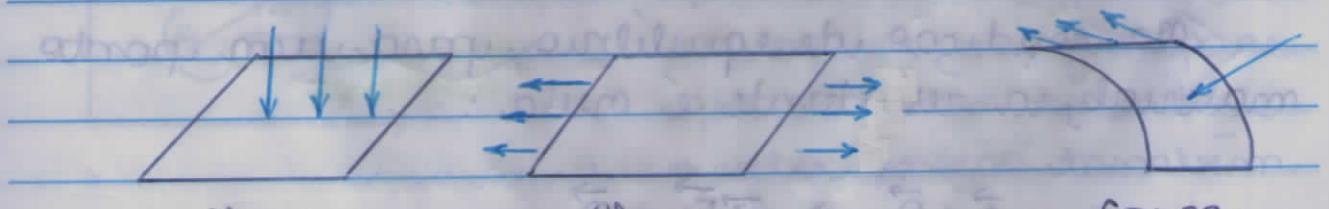


## ESTRUTURA

Sólido, ou conjunto de sólidos, destinado a transmitir ou suportar ações externas.

As estruturas estão classificadas em tridimensionais (por exemplo, blocos), bidimensionais (placas, por exemplo) e unidimensionais (como linhas). O curso será focado nas estruturas unidimensionais.

### • Exemplos de estruturas unidimensionais



Placa

Chapa

Carcaça

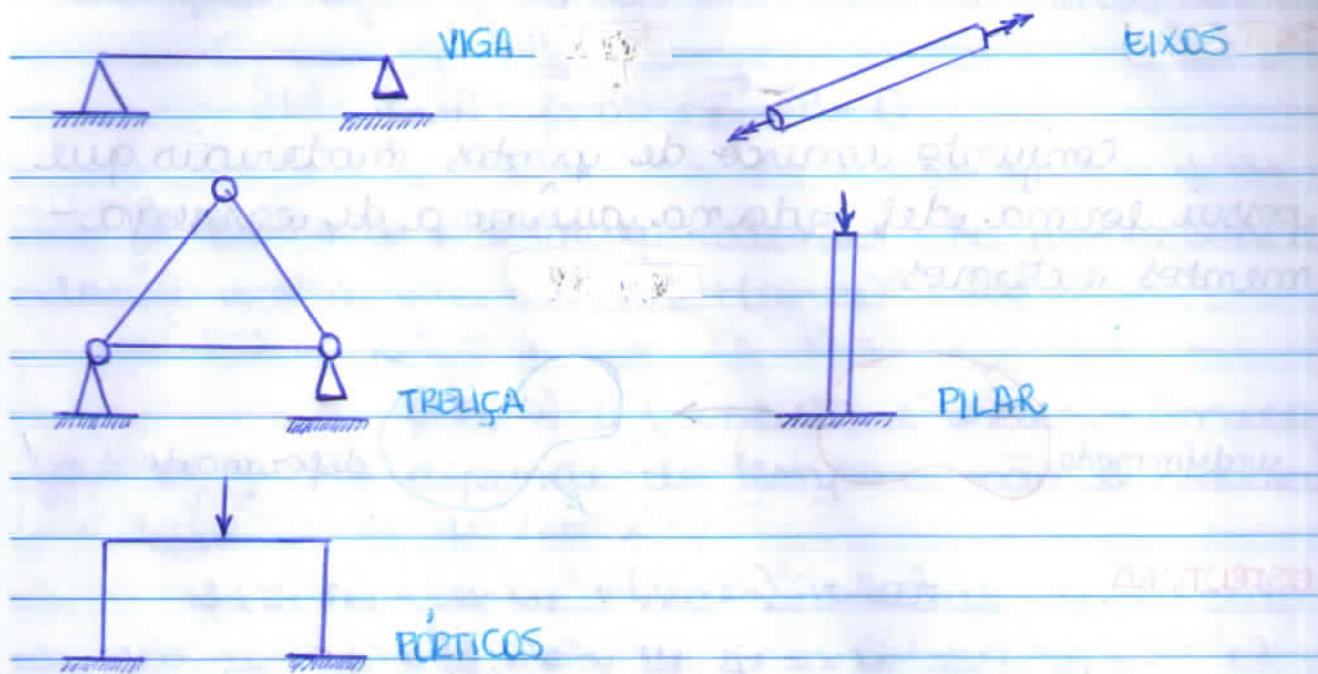
suporta esforços em  
uplanos intencionais

suporta esforços  
no mesmo plano

suporta esforços  
intencionais e intencionais

*spiral*

Exemplos de estruturas unidimensionais



### SEGUNDA LEI DE NEWTON E EQUILÍBRIO

Para um ponto material, temos pela segunda lei de Newton que:

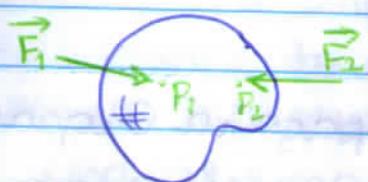
$$\vec{m} = \sum \vec{F}_i = \vec{R}$$

Na condição de equilíbrio, para um ponto material, a resultante é nula:

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

Para um sólido em equilíbrio, é necessário

que sejam nulas a resultante e o momento total em relação a um pólo qualquer.



$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_0 = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$$

## TEORIA LINEAR

Intuitivamente devemos, ao analisar os sólidos, formular o equilíbrio para configurações deformadas. No contexto deste curso, porém, formularemos o equilíbrio na configuração indeformada, aplicando a teoria linear.

Essa teoria é válida se os deslocamentos e as rotações forem relativamente pequenos. A rigor, o equilíbrio se dá na configuração deformada.

## EQUILÍBRIOS NO PLANO



Para uma estrutura bidimensional pertencente ao plano xy, repare que os carregamentos e o vetor peso também pertencem a esse plano. O momento é ortogonal a xy ( $\vec{M}_0 = M_0 \vec{k}$ ).

Temos 3 graus de liberdade e consequente-

mentu 3 equações para equilíbrio:  $\sum F_x = \sum F_y = \sum M_0 = 0$

### EQUILÍBRIO NO ESPAÇO

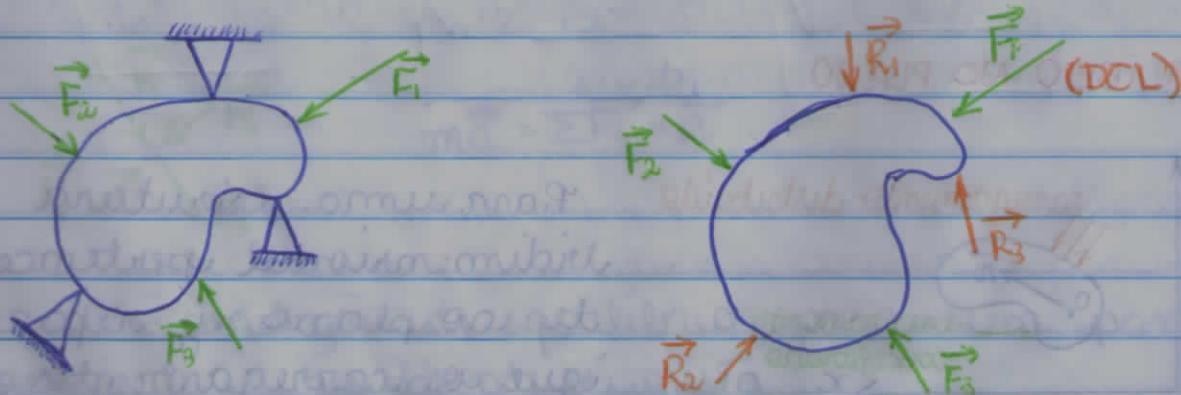
Para um sólido no espaço há 6 graus de liberdade. No equilíbrio:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_0 = M_0^x \vec{i} + M_0^y \vec{j} + M_0^z \vec{k} = \vec{0}$$

### VÍNCULOS OU APOIOS

Vínculos são restrições aos graus de liberdade que conectam o sólido ao seu exterior. As forças decorrentes de vínculos são denominadas forças externas reativas.

Em um diagrama de corpo livre os vínculos são substituídos por suas respectivas reações.



$F_1, F_2, F_3$  são forças externas ativas

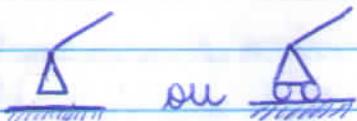
$R_1, R_2, R_3$  são forças externas reativas

no equilíbrio,

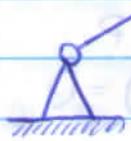
$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{R}_i = \vec{0} \quad \text{e} \quad \sum (P_i - 0) \vec{n}_i F_i + \sum (Q_i - 0) \vec{n}_i R_i = \vec{0}$$

Observação: é importante lembrar que no equilíbrio o momento resultante deve ser nulo em relações a qualquer ponto O. É possível demonstrar essa afirmação pela fórmula de mudança de ponto para o momento.

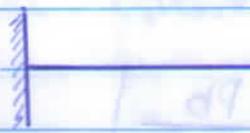
### VÍNCULOS OU APOIOS (NO PLANO)



APOIO SIMPLES: impõe força na direção do eixo y

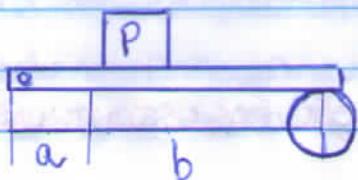


APOIO DUPLO: impõe forças nas direções x e y (impede deslocamentos nessas direções)



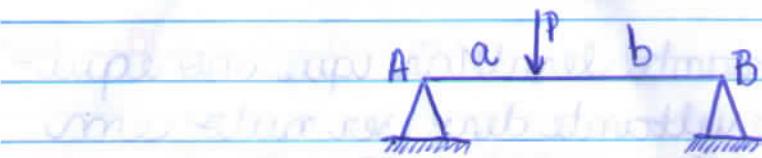
ENGASTE: impõe forças nas direções x e y e um momento (impede rotações e translações)

- Exemplo: uma barra está apoiada sobre um cilindro em uma extremidade e pressa a um pino em outra. Sobre essa barra está apoiado um objeto de peso P. Vamos calcular as reações sobre a barra

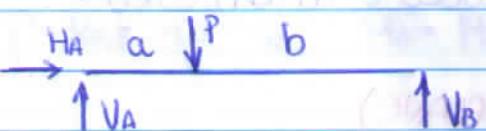


/ /

Vamos montar o esquema estrutural



Agora, no DCL:



Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - P + V_B = 0 \Leftrightarrow V_A + V_B = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_A \cdot 0 + H_A \cdot 0 - Pa + V_B(a+b) = 0$$

Logo,

$$H_A = 0$$

$$V_B = \frac{Pa}{(a+b)}$$

$$V_A = \frac{Pb}{(a+b)}$$

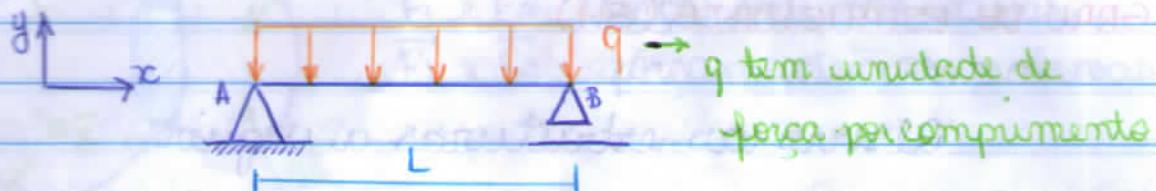
Alternativa: nesse caso convencionou-se não distribuir o peso aplicado na barra, porém é necessário avaliar as dimensões para ver se há ou não distribuição.

05/08/15

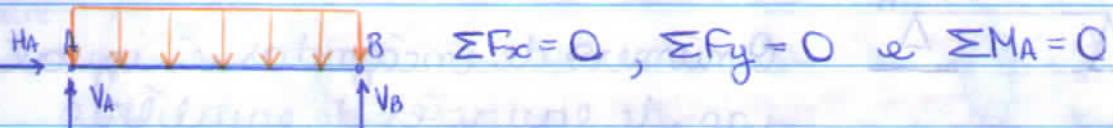
INTRODUÇÃO: CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS, APOIOS E REAÇÕES

## VÍNCULOS OU APOIOS (NO PLANO)

Exemplo: calcular reações de apoio (caso de carregamento distribuído)



Fazendo DCL



$$H_A = 0$$

$$V_A - \int_0^L q \cdot dx + V_B = 0 \Rightarrow V_A + V_B = qL$$

$$V_B L - \int_0^L q(x) \cdot x \cdot dx = 0 \Rightarrow V_B = \frac{qL}{2} \Rightarrow V_A = \frac{qL}{2}$$

Observação: os resultados obtidos para  $V_A$  e  $V_B$  são naturais: visto que há um carregamento uniformemente distribuído, as reações nas extremidades serão iguais à metade da força total aplicada na barra.

Para reações de apoio, podemos usar o conceito de sistemas mecanicamente equivalentes. Para tanto, consideraremos a resultante decorrente de um carregamento distribuído sendo igual à área

da figura definida pelo carregamento, posicionando o ponto de aplicação no bárcentro dessa figura.

### GRAU DE ESTATICIDADE (GH)

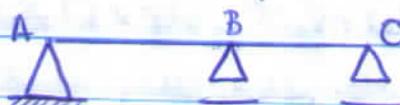
Observe as estruturas a seguir:

#### 1) Sistema isostático



O número de incógnitas é igual ao de equações de equilíbrio

#### 2) Sistema hiperestático



O número de incógnitas é maior que o de equações.

#### 3) Sistema hipostático

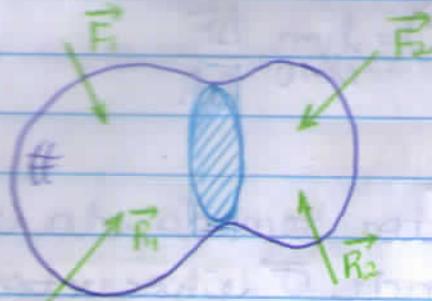


O número de incógnitas é menor que o número de equações.

Os sistemas hipostáticos permitem movimentos de corpo rígido, portanto, são denominados também mecanismos.

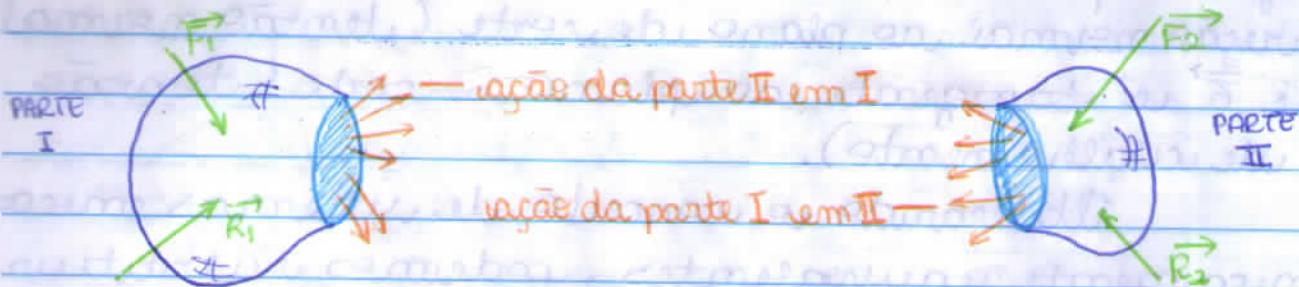
ESFORÇOS INTERNOS

Seja  $S$  um sólido em equilíbrio conforme ilustrado, em que é feita uma seção transversal.



$\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ : forças externas ativas

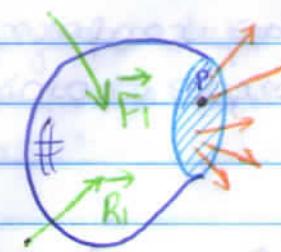
$\vec{R}_1$  e  $\vec{R}_2$ : forças externas reativas



Como o sólido antes da seção estava em equilíbrio, as duas partes resultantes do corte também devem estar em equilíbrio. Para que isso ocorra surgem os esforços internos na região de corte.

Observação: a força de ação de I em II e a força de ação de II em I constituem um par ação-reação.

As tensões que aparecem na região de corte são grandezas tensoriais, ou seja, dependem do ponto considerado e do plano da seção.



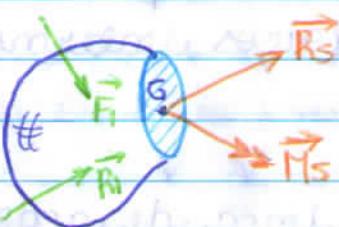
A tensão no ponto P é dada por

$$\vec{p}(P, \vec{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

em que  $\vec{p}$  é o vetor tensão.

Pedimos decompor o vetor tensão da seguinte forma:  $\vec{p} = \vec{T} + \vec{G}$ , onde  $\vec{T}$  possui direções normais aos planos de corte (tensão normal) e  $\vec{G}$  é tangente aos planos de corte (tensão de cisalhamento).

Utilizando o conceito de sistemas mecanicamente equivalentes, podemos substituir todas as tensões originadas no plano de corte por uma força que é aplicada no báculocentro do plano de corte) e um momento.



equilíbrio da força representada:

$$\sum \vec{R}_i + \sum \vec{F}_i + \vec{R}_s = \vec{0}$$

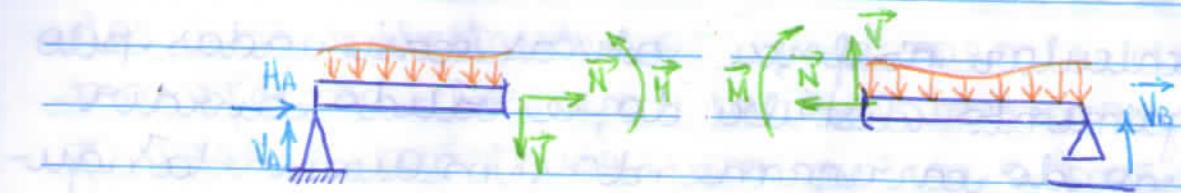
↓              ↓              ↓  
 forças      forças      esforços  
 reativas    ativas    internos

$\vec{R}_s$  é denominada resultante solicitante. Junte-se  $\vec{R}_s$  o momento solicitante.

$$\sum (Q_i - G)_A \vec{R}_i + \sum (P_i - G)_A \vec{F}_i + \vec{M}_s = \vec{0}$$

## PROBLEMAS PLANOS

Para la estructura vimos vamos analizar los esfuerzos solicitantes

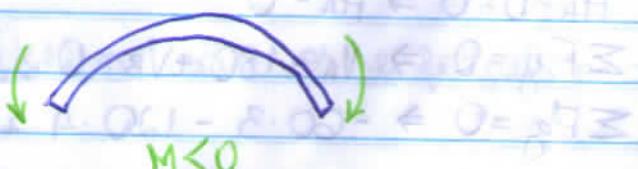
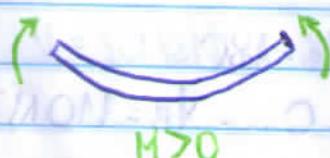


$\vec{N}$  e  $\vec{T}$  compõem la força interna.  $\vec{N}$ ,  $\vec{T}$  e  $\vec{M}$  são os esfuerços solicitantes.

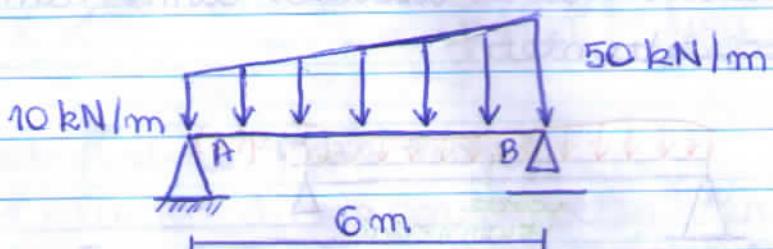
Convencionou-se la normal  $\vec{N}$  positiva se ela "vai" da vezas transversal. Se  $N > 0$  la força normal é de tracção; se  $N < 0$  la força normal é de compressão.

A força cortante  $\vec{T}$  é positiva se girar la subestrutura no sentido horário e negativa caso contrário.

O momento fletor  $\vec{M}$  é positivo se traciona (alonga) las fibras inferiores da subestrutura e negativo se traciona las fibras ida para superior.



- Exemplo: determine os esforços solicitantes no meio do vão.



Para calcular as forças rotativas ocasionadas pelo carregamento distribuído, é válido dividir a região de carregamento em um retângulo e um triângulo, tal que:

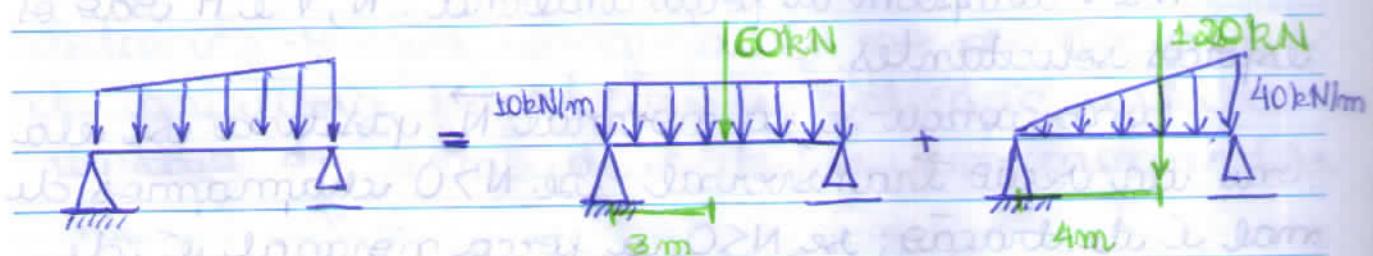
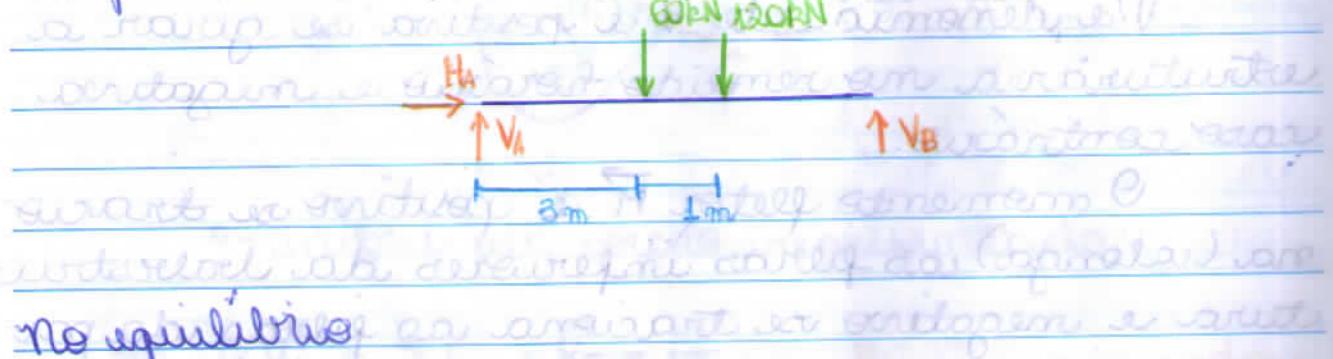


Diagrama de corpo livre



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

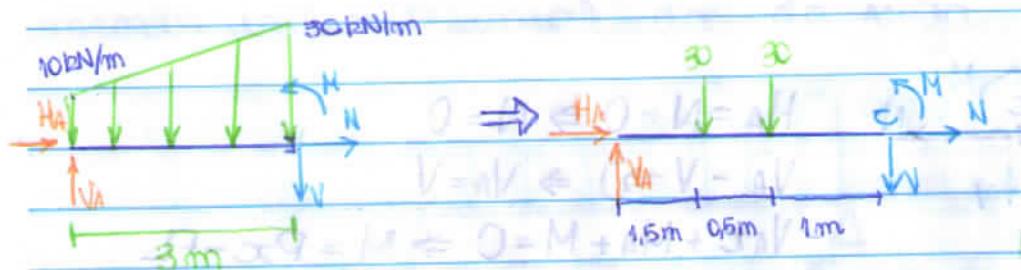
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 180 + V_B = 0 \therefore V_A + V_B = 180$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -60 \cdot 3 - 120 \cdot 4 + 6V_B = 0 \therefore V_B = 110 \text{ kN} \Rightarrow V_A = 70 \text{ kN}$$

Após determinar as forças externas reativas, vamos olhar os esforços solicitantes no meio da viga. Para isso, separaremos em duas subestruturas.

Observação: para efeitos de equilíbrio de esforços internos, ao separar a estrutura inicial, devemos usar os carregamentos distribuídos nas subestruturas e somente depois transformá-los em carregamentos concentrados e construir um sistema mecanicamente equivalente.

Subestrutura esquerda:



$$H_A + N = 0$$

$$V_A - 30 - 30 - V = 0$$

$$-3V_A + 30 \cdot 1,5 + 30 \cdot 1 + M = 0 \quad (\text{em relação a } c)$$

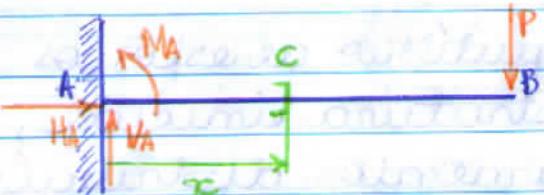
Portanto,

$N = 0$ ,  $V = 10 \text{ kN}$  e  $M = 135 \text{ kN} \cdot \text{m}$  são os esforços pedidos.

10108115

### DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

Vamos calcular os diagramas de esforços solicitantes para a estrutura abaixo:



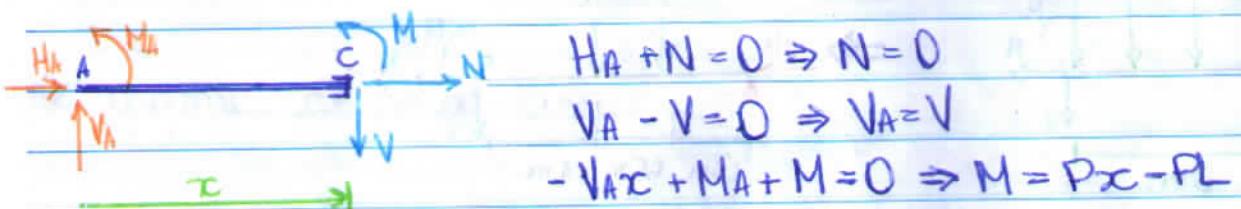
Considere o ponto C para o cálculo dos esforços solicitantes.

Reações de apoio:  $H_A = 0$

$$V_A - P = 0 \Rightarrow V_A = P$$

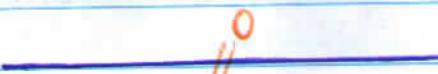
$$M_A - PL = 0 \Rightarrow M_A = PL$$

Diagrama de corpo livre da subestrutura à esquerda:

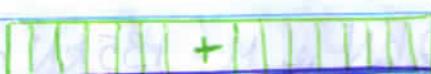


Tragando o diagrama de esforços solicitantes da estrutura:

normal



Cortante



Observação: não é preciso indicar seta, apenas use

spirob

o visual é positivo ou negativo.

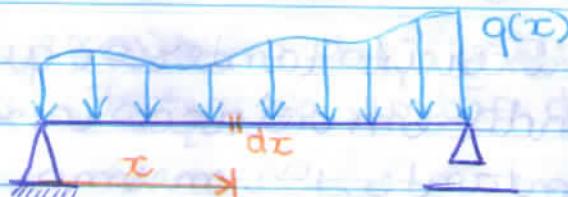
Momento plástico



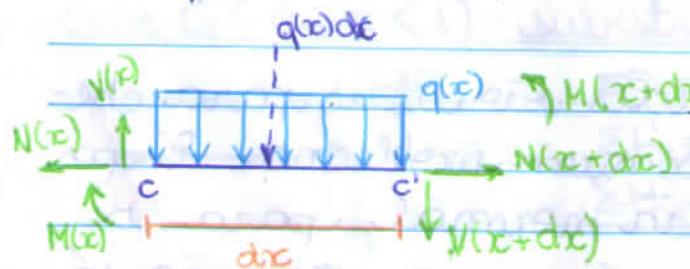
**Observação:** o diagrama do momento plástico é desenhado sobre o local onde ocorre o tracionamento (veja que para  $x=0$ , temos  $M = -PL$ . Logo as fibras superiores são tracionadas).

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

Considere a estrutura abaixo e o segmento infinitesimal  $dx$  da viga:



No segmento  $dx$  podemos considerar o carregamento  $dx$  constante. Vamos analisar o equilíbrio nessa situação.



Vamos usar a seguinte equivalência:  
 $f(x+dx) = f(x) + \frac{df}{dx} \cdot dx$

/ /

$$M(x+dx) = M(x) + \frac{dM}{dx} dx$$

$$N(x+dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} dx$$

$$V(x+dx) = V(x) + \frac{dV}{dx} dx$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N(x) + N(x) + \frac{dN}{dx} dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dN}{dx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V(x) - q(x) dx - V(x) - \frac{dV}{dx} dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow -V(x) dx - M(x) + q(x) \frac{dx^2}{2} + M(x) + \frac{dM}{dx} dx = 0$$

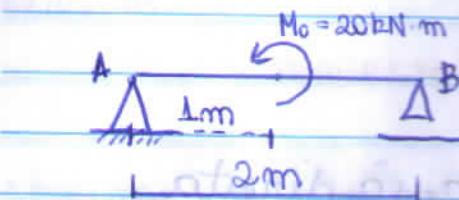
$$\Leftrightarrow \frac{dM}{dx} dx - V(x) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dM}{dx} = V(x)$$

Observe no exemplo anterior que  $M(x) = Px - PL$  e que derivando em relações da x obtemos o valor da constante. Da mesma forma,  $V(x) = P$  e derivando vemos que o carregamento distribuído é nulo (o que está de acordo com o exercício, pois há apenas o carregamento concentrado  $P$  de força externa ativa).

**Observação:** essas equações são úteis para checar os resultados obtidos num problema. É possível também integrar a normal para se obter a constante, porém é preciso atenção já que é necessário somar como constante o

valor da normal em  $x=0$

\* Exemplo: trazar o diagrama de esforços solicitantes



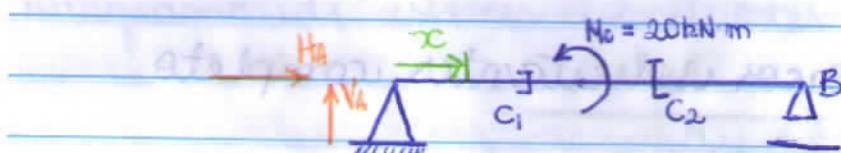
Reações de apoio:

$$H_A = 0$$

$$V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = -V_B$$

$$M_0 + V_B \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = -10 \text{ kN} \text{ e } V_A = 10 \text{ kN}$$

No caso de existirem carregamentos ou momentos concentrados nas estruturas, para efeito de cálculo dos esforços solicitantes, precisamos realizar diferentes cortes para obter os esforços internos corretamente (se no caso vícima fizermos apenas um corte, dependendo da subestrutura analisada, chegaríamos a expressões diferentes para o momento fletor). Faremos então dois cortes na estrutura:



Corte  $C_1$  ( $0 \leq x < 1$ ): subestrutura à esquerda



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + N = 0 \Leftrightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V = 0 \Leftrightarrow V_A = V = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_A \cdot c + M = 0 \Rightarrow M = 10x$$

Para esse primeiro trcho o diagrama fica:

1 /

0

normal

10kN

+

constante

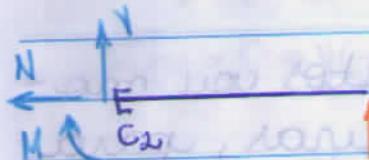


10kN/m

memento pleto



Corte C<sub>2</sub> ( $1 < x \leq 2$ ): subestrutura à direita



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + V_B = 0 \Rightarrow V = 10\text{kN}$$

$$\sum M_{C_2} = 0 \Rightarrow -M + V_B \cdot x = 0 \Rightarrow M = -10x \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Diagrama para o segundo tranco:

0

normal

10kN

+

constante

10kN

+

memento pleto

Diagrama de esforços solicitantes incompletos

[kN]

$$10 = N = V + H \Rightarrow 10 = 0 + H \Rightarrow H = 10$$

[kN]

$$10 = N = V + H \Rightarrow 10 = V + 10 \Rightarrow V = 0$$

$$0 = M = N + V \cdot x - 10 \Rightarrow 0 = 10 + 0 \cdot x - 10 \Rightarrow 0 = 0$$

[kN]

-10

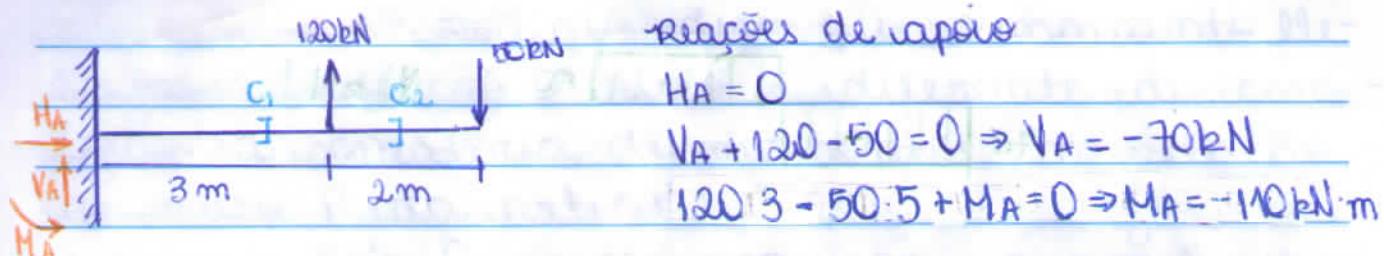
spiral

Observação: em barras triapoiadas, como é o caso dessa estrutura, a cotação é sempre positiva.

12/08/15

### DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

- Exemplo: traçar diagrama de esforços solicitantes



Corte C<sub>1</sub> ( $0 \leq x < 3$ ): subestrutura à esquerda

Diagrama do sistema de forças para o corte C<sub>1</sub>. As reações de apoio H<sub>A</sub>, V<sub>A</sub> e M<sub>A</sub> são consideradas. As equações resultantes são:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + N = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - V = 0 \Rightarrow V = V_A = 70 \text{ kN}$$

$$\sum M_{C_1} = 0 \Rightarrow M_A - V_A x + M = 0 \Rightarrow M = -70x + 110$$

Diagrama de esforços solicitantes para primeira parte:



Corte C<sub>2</sub> ( $3 < x < 5$ ): subestrutura à direita

Diagrama do sistema de forças para o corte C<sub>2</sub>. As reações de apoio H<sub>A</sub>, V<sub>A</sub> e M<sub>A</sub> são consideradas. As equações resultantes são:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - 50 = 0 \Rightarrow V = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_{C_2} = 0 \Rightarrow -M + 50x_2 \Rightarrow M = -50x_2$$

Diagrama para segunda parte

$N [kN]$        $V [kN]$        $M [kN·m]$

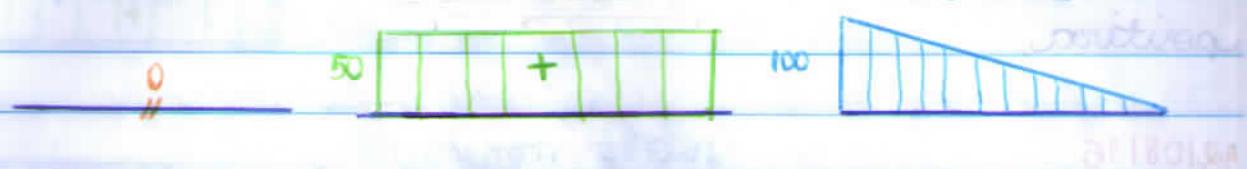


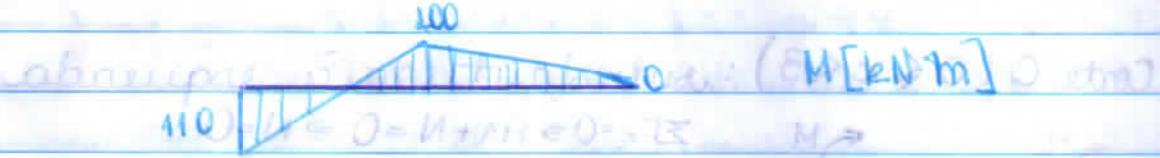
Diagrama completo

$N [kN]$

$$N_{DF} = -70$$

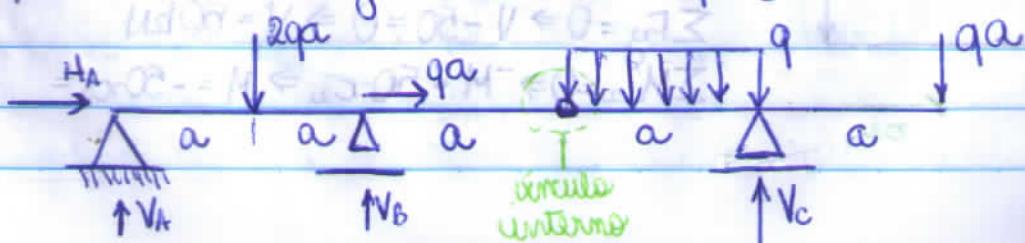


$V [kN]$



Observação: note que não há descontinuidade no diagrama do momento fletor, isto é, não é aplicado nenhum momento concentrado na estrutura. No entanto, há descontinuidade no diagrama da corteante pela existência de um carregamento concentrado no meio da barra.

• Exemplo: achar diagrama de respostas solicitantes



A estrutura em questão é denominada Viga Geral, por conta da presença de um vínculo interno (ou articulação) entre duas barras.

Na articulação o momento fletor é nulo, de modo que esse fato nos fornecerá mais uma equação para abordagem do problema (observe que se trata de um sistema hiperestático).

**Observação:** note que dizer que o momento fletor na articulação é nulo é diferente de considerar a isometria de momentos em relação ao ponto P da articulação igual a zero. Se fizermos  $\sum M_P = 0$  continuaremos impossibilitados de resolver o problema, pois seria equivalente a usar  $\sum M_A = 0$ , por exemplo.

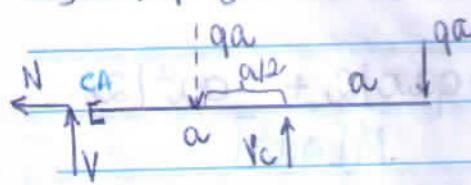
Reações de apoio:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A + q_a = 0 \Leftrightarrow H_A = -q_a$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A - q_a + V_B - q_a + V_C - q_a = 0 \Leftrightarrow V_A + V_B + V_C = 4q_a$$

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow -2q_a^2 + V_B \cdot 2a - \frac{7}{2}q_a^2 + 4V_C a - 5q_a^2 \Leftrightarrow V_B \cdot 2 + 4V_C = \frac{21}{2}q_a^2$$

Vamos observar a subestrutura à direita da articulação, fazemos um corte:



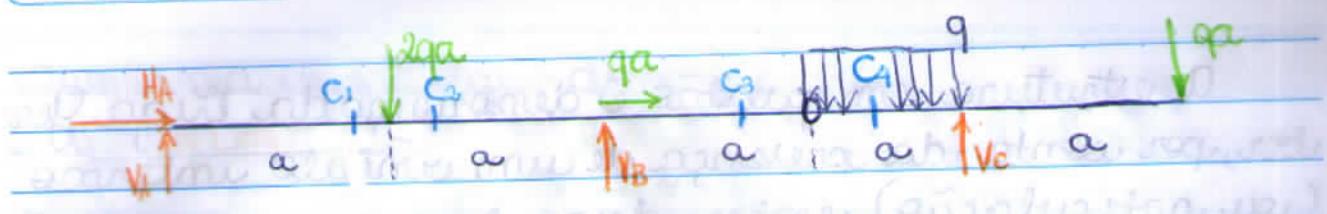
CA: corte na articulação  
 $M=0$

$$\sum M_{CA} = 0 \Leftrightarrow -q_a^2/2 + V_C a - 2q_a^2 = 0$$

Obtemos

$$V_C = \frac{5}{2}q_a \Rightarrow V_A = q_a \text{ e } V_B = \frac{5}{4}q_a$$

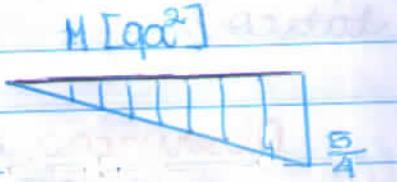
spiral



Corte  $C_1$  ( $0 \leq x < a$ ): subestrutura à esquerda

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \quad M \\ H_A &\rightarrow N \\ V_A &\uparrow \quad \downarrow V_B \\ \end{aligned}$$

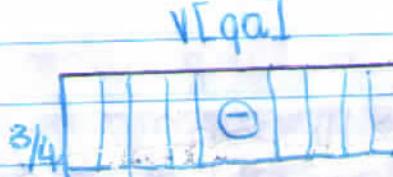
$$\begin{aligned} H_A + N = 0 \Rightarrow N = qa \\ V_A - V = 0 \Rightarrow V = 5qa/4 \\ -V_A x + M = 0 \Rightarrow M = 5qax/4 \end{aligned}$$



Corte  $C_2$  ( $a \leq x < 2a$ ): subestrutura à esquerda

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \quad M \\ H_A &\rightarrow N \\ V_A &\uparrow \quad \downarrow V_B \\ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_A + N = 0 \Rightarrow N = qa \\ V_A - 2qa - V = 0 \Rightarrow V = -3/4 qa \\ -V_A x + 2qa(x-a) + M = 0 \\ \Leftrightarrow M = -3/4 qa x + 2qa^2 \end{aligned}$$

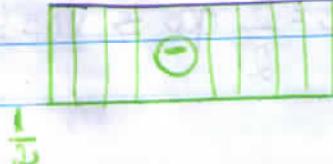


Corte  $C_3$  ( $2a \leq x < 3a$ ): subestrutura à esquerda

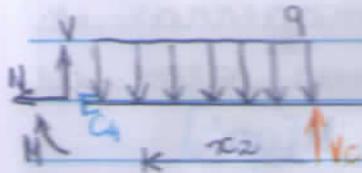
$$\begin{aligned} x &\rightarrow \quad M \\ H_A &\downarrow \quad \rightarrow qa \\ V_A &\uparrow \quad \downarrow V_B \\ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_A + qa + N = 0 \Rightarrow N = 0 \\ V_A - 2qa + V_B - V = 0 \\ \Leftrightarrow V = -qa/2 \end{aligned}$$

$$-V_A x + 2qa(x-a) - V_B(x-2a) = 0 \Leftrightarrow M = -qa x/2 + 3qa^2/2$$



Corte C4 ( $0 < x_2 < a$ ): substituição à direita



$$q_a \quad N = 0$$

$$\begin{aligned} V + V_c - qx_2 - qa = 0 \Leftrightarrow V = qa + qx_2 - \frac{5}{2}qa \\ -M - qx^2/2 + V_c x_2 - qa(x_2 + a) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow M = -\frac{qx^2}{2} + \frac{5}{2}qax_2 - qx_2^2 - qa^2$$

$N[q]$

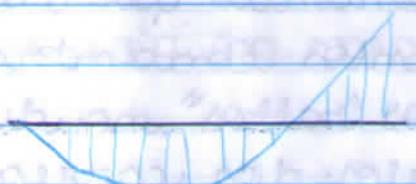
$V[q]$

$M[q^2]$



**Observação:** utilizamos o incremento  $x_2$ , no eixo x orientado da direita para esquerda. Deveremos nos atentar ao avaliar as equações diferenciais de equilíbrio já que elas são deduzidas tomando um incremento crescente da esquerda para direita.

**Observação:** o diagrama do momento fletor nessa quarta parte é no formato de uma parábola. Repare que a constante não é nula em nenhum momento, portanto, não há pontos de extremo no diagrama do momento fletor e por isso ele não é desenhado conforme valaice



→ não há mínimo local no caso acima

Corte C5 ( $0 < x_3 < a$ ): substituição à esquerda

spiral

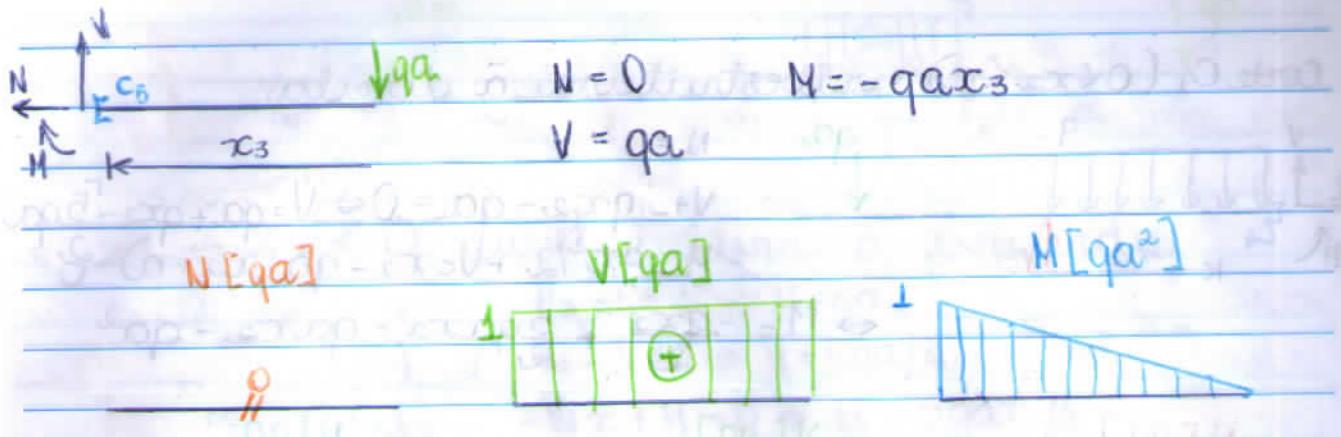
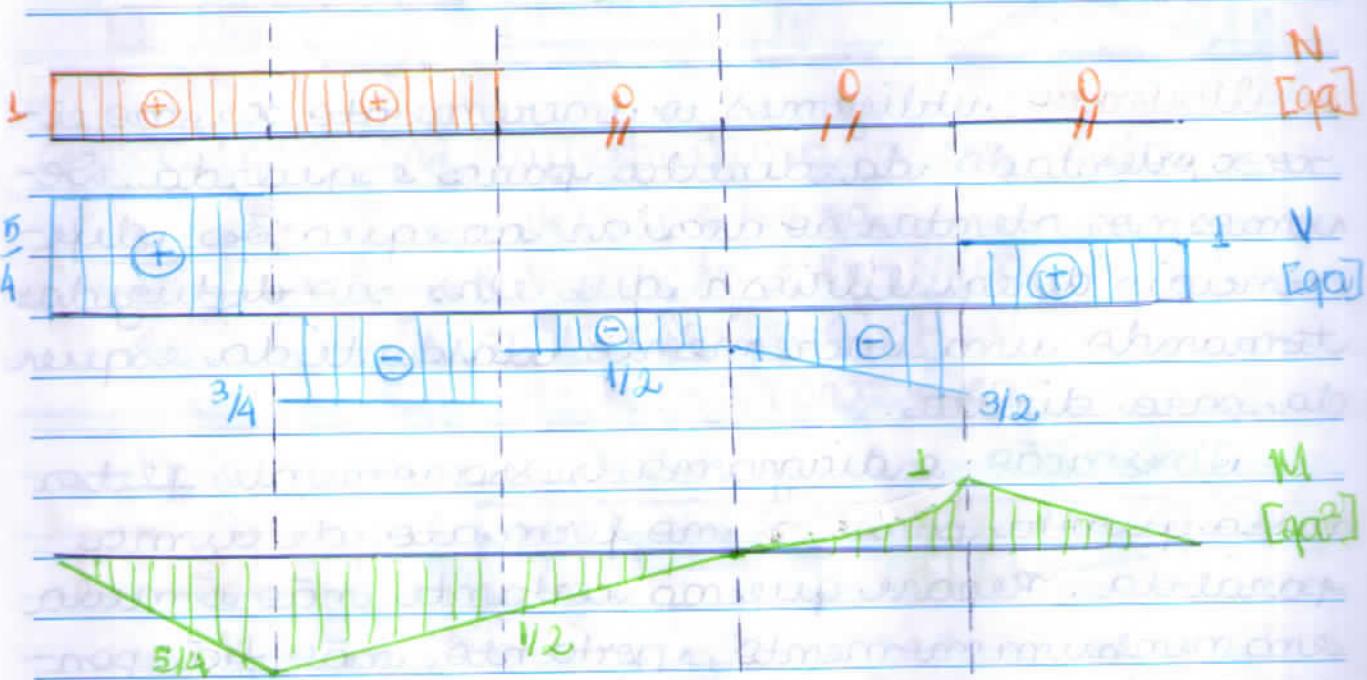


Diagrama de esforços solicitantes



Observação: é esperado que o diagrama da cortante não seja contínuo por conta dos diferentes carregamentos concentrados existentes. Veja que os "saltos" no diagrama são equivalentes ao valor dos carregamentos concentrados.

Observação: observe que no ponto da articulação o momento fletor é nulo, como esperado.

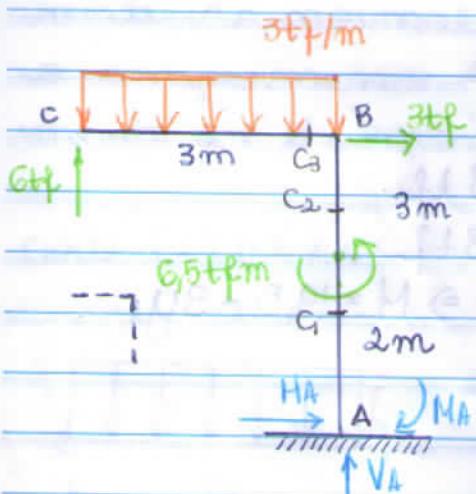
Observação: nas vigas em que há ausência de carregamento distribuído, a cortante possui valor constante.

17/03/15

Eduardo

### VIGA POLIGONAL

Vamos estudar o diagrama de esforços solicitantes da estrutura abaixo, denominada viga poligonal:



Reações de apoio

$$3 + H_A = 0 \Rightarrow H_A = -3\text{tf}$$

$$6 - 3 \cdot 3 + V_A = 0 \Rightarrow V_A = 3\text{tf}$$

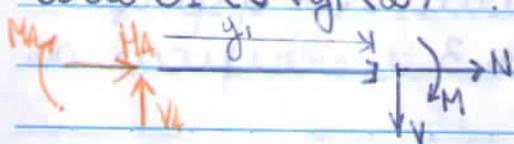
$$-6 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3 \cdot 5 + 6,5 + M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = -13\text{tfm}$$

Para cada mudança de direção, assim como para cada carregamento e momento concentrado, faremos um corte.

Vamos adotar o momento fletor como sendo positivo se tracionar a parte da estrutura que está na mesma região do traçado.

Corte C<sub>1</sub> ( $0 \leq y_1 \leq 2$ ): parte inferior



1 /

$$H_A + V = 0 \Leftrightarrow V = -H_A = 3 \text{ tf}$$

$$V_A + N = 0 \Leftrightarrow N = -V_A = -3 \text{ tf}$$

$$H_A y_1 - M_A - M = 0 \Leftrightarrow M = H_A y_1 - M_A = 13 - 3y_1$$

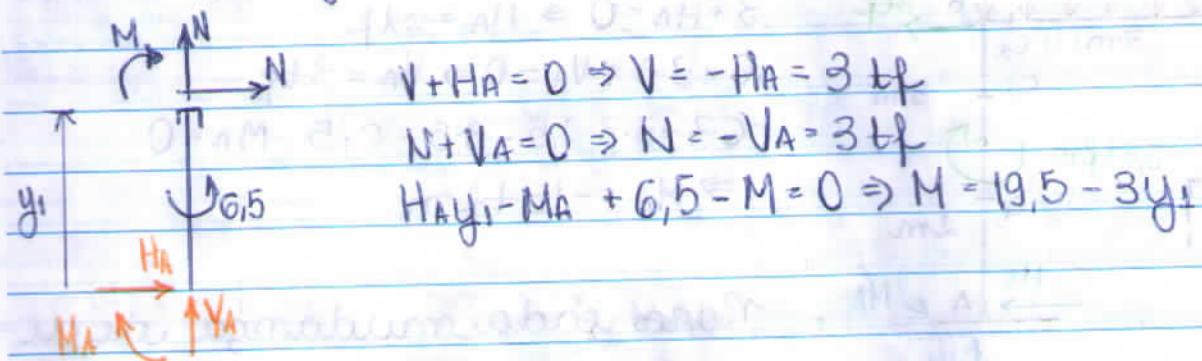
N [tf]

V [tf]

M [tf·m]



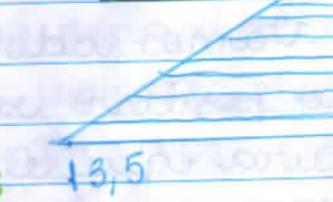
Centro C<sub>2</sub> ( $2 < y_1 < 5$ ): parte inferior



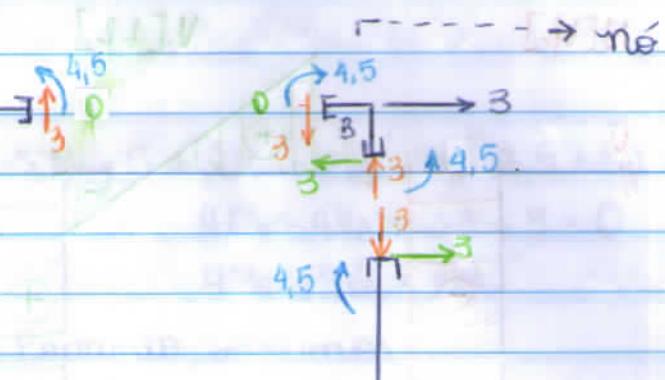
N [tf]

V [tf]

M [tf·m]

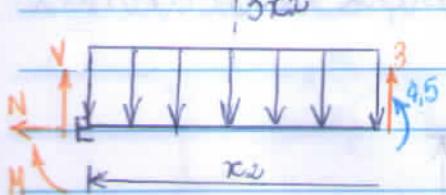


Uma forma alternativa de calcular os esforços solicitantes decorrentes do vorte 3 é verificar as forças que actuam nos més.



Observação: nesse caso o momento no nó, decorrente da normal e cortante, é nulo, já que o comprimento do nó é muito pequeno. Isso significa que existe momento plástico.

Corte C<sub>2</sub> ( $0 < x_2 < 3$ ): parte direita



$$V - 3x_2 + 3 = 0 \Rightarrow V = 3x_2 - 3$$

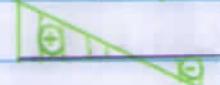
$$-M - 3x_2^2 + 3x_2 + 4,5 = 0$$

Repare que as expressões encontradas são válidas e que  $M_{máx} = M(x_2=1) = 6 \text{ tpm}$

N[E]



V[t]



M[tpm]



N [kN]

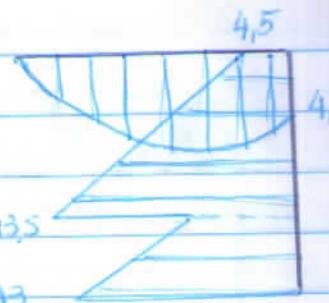
V [kN]

M [Nm]

0  
//



(+)



-13.5

4.5

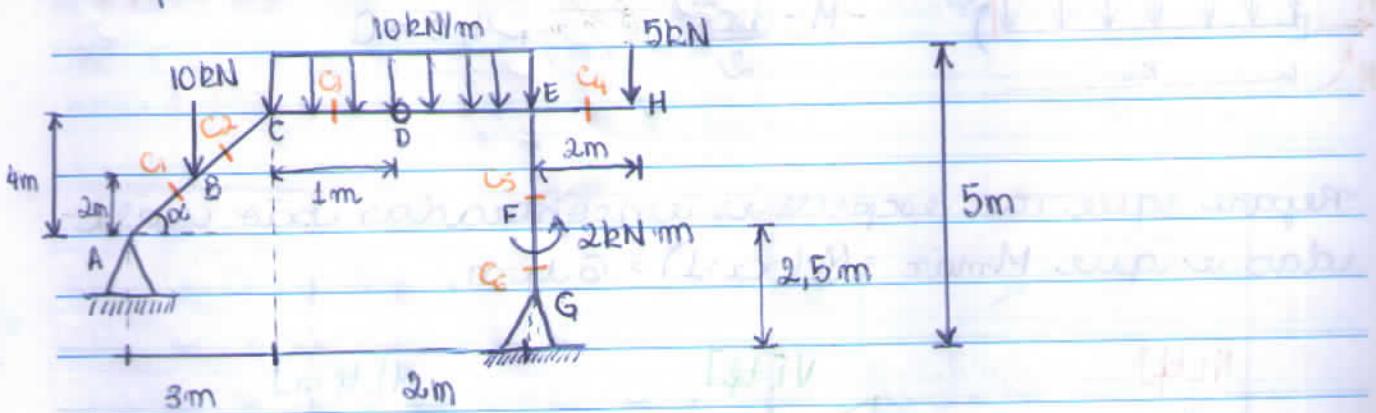
4.5

Observação: nesse caso não há convenção de onde desenhar o diagrama da cortante e da momen-  
tal, basta indicar o sinal.

19/08/15

### DIAGRAMAS DE ESFORÇOS SOLICITANTES

- Exemplo: Traçar diagrama de esforços solicitantes no pórtico tri-articulado



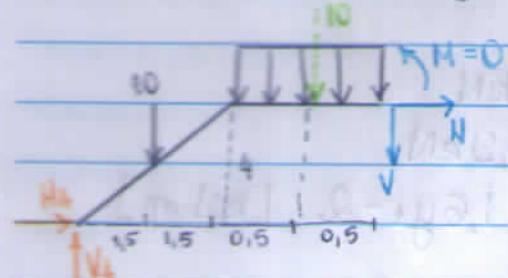
Reações de apoio

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_G = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 10 - 20 - 5 + V_G = 0 \Rightarrow V_A + V_G = 35$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -10 \cdot \frac{3}{2} - 20 \cdot 4 - 5 \cdot 7 + 2 + 1 \cdot H_G + 5 \cdot V_G = 0 \Rightarrow H_G + 5V_G = 128$$

Corte na articulação



$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 4H_A - 4V_A + 10 \cdot 2,5 + 10 \cdot 0,5 = 0$$

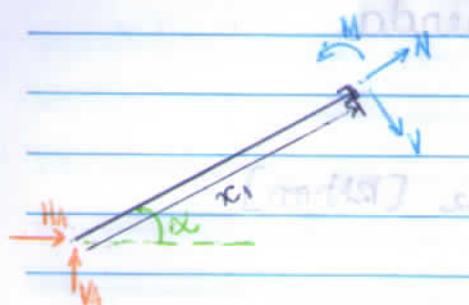
$$4H_A - 4V_A + 25 + 5 = 0$$

$$4H_A - 4V_A = -30$$

Pontante, obtemos:

$$H_G \approx 1,6 \text{ kN}, V_G = 311/12, H_A \approx -1,6 \text{ kN} \text{ e } V_A = 9,1 \text{ kN}$$

Corte C<sub>1</sub> ( $0 < x_1 < 2,5$ ): estrutura à esquerda

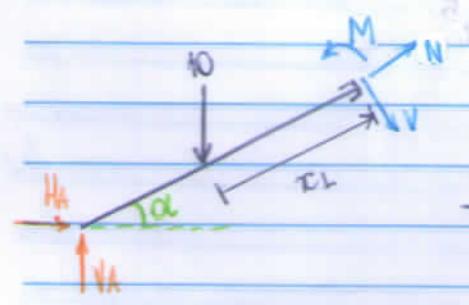


$$H_A \cos \alpha + V_A \operatorname{sen} \alpha + N = 0 \Rightarrow N = -8,2 \text{ kN}$$

$$V_A \cos \alpha - H_A \operatorname{sen} \alpha - V = 0 \Rightarrow V = 4,2 \text{ kN}$$

$$-V_A \cos \alpha \cdot x_1 + H_A \operatorname{sen} \alpha \cdot x_1 + M = 0 \Rightarrow M = 4,2x_1$$

Corte C<sub>2</sub> ( $2,5 < x_1 < 5$ ): estrutura à esquerda



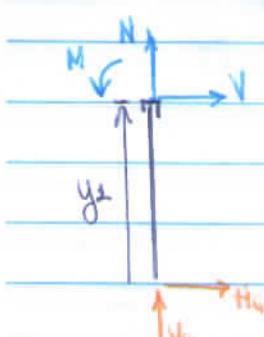
$$V_A \operatorname{sen} \alpha + H \cos \alpha - 10 \operatorname{sen} \alpha + N = 0 \Rightarrow N = -0,2 \text{ kN}$$

$$V = -1,8 \text{ kN}$$

$$-(V_A \cos \alpha - H_A \operatorname{sen} \alpha)x_1 + M + 10 \cos \alpha(x_1 - 2,5) = 0$$

$$\Rightarrow M = -1,8x_1 + 1,5 \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

Corte C<sub>3</sub> ( $0 < y_1 < 2,5$ ): parte inferior



$$H_G + V = 0 \Rightarrow V = -H_G = 1,6 \text{ kN}$$

$$V_G + N = 0 \Rightarrow N = -V_G = -25,9 \text{ kN}$$

$$H_G y_1 + M = 0 \Rightarrow M = 1,6y_1 \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

Corte C<sub>5</sub> ( $2,5 \leq y_1 \leq 5$ ): parte inferior

$$2 - \begin{array}{c} M \\ \downarrow \\ N \end{array} \rightarrow V \quad H_G + V = 0 \Rightarrow V = -H_G = 1,6 \text{ kN}$$

$$V_G + N = 0 \Rightarrow N = -V_G = -25,9 \text{ kN}$$

$$y_1 \quad 2 \quad H_G y_1 + 2 + M = 0 \Rightarrow M = 1,6 y_1 - 2 \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

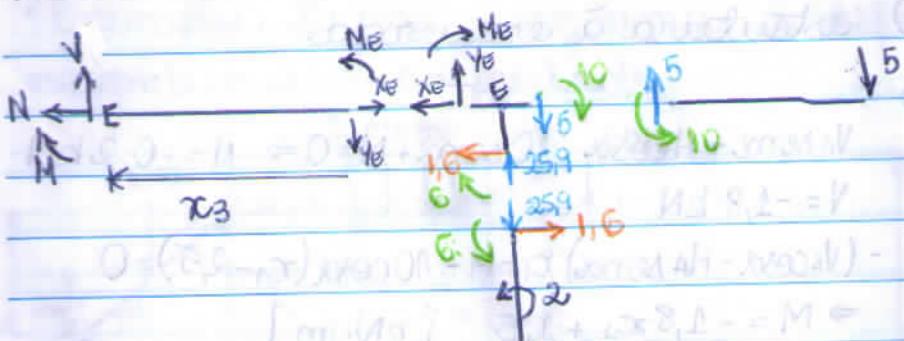
$V_G$

Corte C<sub>4</sub> ( $0 \leq x_2 \leq 2$ ): estrutura à esquerda

$$\begin{array}{c} N=0 \\ \uparrow \\ E \\ \downarrow \\ M \end{array} \quad 5 \quad V - 5 = 0 \Rightarrow V = 5 \text{ kN}$$

$$M - 5x_2 = 0 \Rightarrow M = 5x_2 \quad [\text{kN} \cdot \text{m}]$$

Vamos analisar o mó E:



equilíbrio mó E:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow x_E = -1,6 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow y_E + 25,9 - 5 = 0 \Rightarrow y_E = -20,9 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_E + 10 + 6 = 0 \Rightarrow M_E = -16$$

Equilíbrio