Resumo Álgebra Linear II - P1 de 2016

Paulo Akira 2016.2

1) Produto interno:

def: seja E um espaço vetorial. Um produto interno em E é uma aplicação $E \times E$ em $\mathbb{R}$, denotada por $\langle u,v \rangle$ ou $u \cdot v$, tal que:

(1) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

(2) $\langle u+w, v \rangle = \langle u,v \rangle + \langle w,v \rangle$

(3) $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$

(4) $\langle u,u \rangle \geq 0$ e $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

Note que:

Produto interno canônico no $\mathbb{R}^n$:

$\langle u,v \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$

- Produto interno "canônico" em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\langle P,Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\,dt$$

- Produto interno "canônico" em $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\,dt$$

2) Ortogonalidade:

def: seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, então

(1) $u,v \in E$ são ortogonais se $\langle u,v \rangle = 0$

(2) a norma de $u \in E$ é $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$

(3) a distância entre u e v é dado por $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$

(4) uma base $(e_1, \dots, e_n)$ de E é ortogonal se $e_i \perp e_j$ $\forall i \neq j$ e é ortonormal se é ortogonal com $\|e_i\| = 1$, $\forall i$.

Propriedades da norma: seja E um espaço vetorial.

(1) $\|u\| \geq 0$

(2) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

(3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(4) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ → desigualdade triangular

Desigualdade Cauchy-Schwarz:

$|\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, $\forall u,v \in E$

3) Projeção ortogonal e melhor aproximação:

def: seja E um espaço vetorial munido de produto interno, Y subespaço vetorial de E e $u \in E$. A projeção ortogonal de u sobre Y é o único $y_0 \in Y$ tal que $u - y_0 \perp y$ $\forall y \in Y$. A melhor aproximação de u em Y é o único $y_1 \in Y$ que minimiza $d(u,y)$ para $y \in Y$.

Teorema: se Y tem dimensão finita então a projeção ortogonal de u sobre Y e a melhor aproximação de u em Y existem e são iguais.

Teorema: seja E com produto interno, Y é um sev de E com dimensão finita então:

a) se Y é uma reta de direção de $f \in Y$,

$$\text{proj}_Y u = \frac{\langle u,f \rangle \cdot f}{\|f\|^2}, \quad Y = [f]$$

b) no caso geral, se $Y = [f_1, \dots, f_n]$ onde $\{f_1, \dots, f_n\}$ base ortogonal de Y:

$$\text{proj}_Y u = \frac{\langle u,f_1 \rangle f_1}{\|f_1\|^2} + \dots + \frac{\langle u,f_n \rangle f_n}{\|f_n\|^2}$$

c) em particular, se $\{f_1, \dots, f_n\}$ for ortonormal temos que:

$$\text{proj}_Y u = \langle u,f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle u,f_n \rangle f_n$$

Obs: prestar atenção na base! Caso ela seja ortogonal não é necessário usar o "método do produto interno com sistema", basta achar a projeção.

Teorema (Gram-Schmidt): seja E com produto interno e Y sev de E com base $\{e_1, \dots, e_n\}$ não ortogonal. Então as formulas a seguir definem uma base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de Y que é ortogonal.

$f_1 = e_1$

$$f_2 = e_2 - \frac{\langle f_1, e_1 \rangle f_1}{\|f_1\|^2}$$

$$f_3 = e_3 - \frac{\langle f_2, e_3 \rangle f_2}{\|f_2\|^2} - \frac{\langle f_1, e_3 \rangle f_1}{\|f_1\|^2}$$

$\vdots$

$$f_n = e_n - \frac{\langle f_1, e_n\rangle f_1}{\|f_1\|^2} - \dots - \frac{\langle f_{n-1}, e_n\rangle f_{n-1}}{\|f_{n-1}\|^2}$$

Obs: caso as bases já sejam ortogonais as projeções vão dar zero.

4) Subespaço ortogonal:

def: seja E com produto interno e M sev de E:

$M^\perp = \{v \in E : v \perp u, \forall u \in M\}$ = espaço dos vetores ortogonais a M (é subespaço vetorial de E).

Obs: para achar uma base de $M^\perp$ com uma dada base de M basta utilizar o produto interno para cair em um sistema homogêneo.

Prop: se M é um subespaço vetorial de E com produto interno, então $M \cap M^\perp = \{0_E\}$

Prop: seja E com produto interno, M subespaço vetorial de E de dim finita. Então $M \oplus M^\perp = E$, em particular:

a) se $E = M \oplus M^\perp$ então qualquer vetor de E se escreve de forma única como $v = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$ e $x_2 \in M^\perp$.

b) se E tem dim finita, então $\dim E = \dim M + \dim M^\perp$

c) se E tem dim finita então:

sendo $B_1 = \{e_1, \dots e_n\}$ base [ortonormal] ortogonal de M

$B_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$ base [ortonormal] ortogonal de $M^\perp$

$B_1 \cup B_2 = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ é base [ortonormal] ortogonal de E.

Obs: $M = (M^\perp)^\perp$ vale se $\dim E < \infty$

5) Transformações lineares:

"Consistem em funções que tem a finalidade de receber um vetor de um determinado espaço vetorial E e transformar em um vetor de um determinado espaço vetorial F"

def: sejam E e F espaços vetoriais e T uma função de E em F. Então T é chamada de transformação linear se satisfaz:

(1) $\forall u, v \in E$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

Obs: em geral as transformações lineares não conservam a ortogonalidade.

Prop: se $T: E \longrightarrow F$ é linear, então $T(0_E) = 0_F$

"o vetor nulo sempre leva ao vetor nulo"

Obs: qualquer transformação matricial $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^n$ é linear. Reciprocamente qualquer transformação linear $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^n$ é matricial.

6) Núcleo e Imagem

def: seja $T: U \longrightarrow V$ uma transformação linear, definimos:

(1) o núcleo de T como sendo $N(T) = \ker(T) = \{u \in U : T(u) = \vec{0_V}\}$

(2) a imagem de T sendo $\operatorname{Im}(T) = \{w \in V : \exists u \in U \text{ com } T(u) = w\}$

Propriedade: seja $T: U \longrightarrow V$ uma transformação linear, então $\ker T \underset{se}{\subset} U$ e $\operatorname{Im} T \underset{se}{\subset} V$.

Prop: sejam U e V espaços vetoriais, $T: U \to V$ uma transformação linear e $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U. Então o conjunto $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é gerador para $\operatorname{Im} T$, ou seja, $\operatorname{Im} T = [T(u_1), \dots, T(u_n)]$.

Obs: $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim U$

"Aplicação linear não aumenta dimensão"

7) Injeção, sobrejeção e bijeção

def: seja $T: U \longrightarrow V$ linear:

(1) T injetora $\Leftrightarrow \ker T = \{0_U\} \Leftrightarrow$ ~~ker~~ $\dim \ker T = 0$

(2) T sobrejetora $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = V \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

Teorema (da dimensão): sejam U e V espaços vetoriais, $T: U \longrightarrow V$ linear. Suponha $\dim U < \infty$. Então

$\dim U = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$

Obs: $T = \operatorname{proj}_Y u$, com $u \in E \Rightarrow \boxed{\operatorname{Im} T = Y}$

$u \in \ker T \Leftrightarrow \operatorname{proj}_Y u = 0 \Leftrightarrow u \perp Y \Leftrightarrow u \in Y^\perp \Rightarrow \boxed{\ker T = Y^\perp}$

Como $E = Y + Y^\perp \Rightarrow E = \operatorname{Im} T + \ker T \therefore \dim E = \dim Y + \dim Y^\perp$

$\Rightarrow \dim E = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$

Prop: sejam U e V de $\dim < \infty$:

(1) se existe $T: U \to V$ injetora, então $\dim U \leq \dim V$

(2) se existe $T: U \to V$ sobrejetora, então $\dim U \geq \dim V$

def: sejam U, V com $\dim < \infty$. Se existe $T: U \to V$ bijetora então $\dim U = \dim V$

def: seja $T: U \longrightarrow V$ linear. T é bijetora $\Leftrightarrow$ T é simultaneamente bijetora e injetora.

Prop: suponha $\dim U = \dim V < \infty$ e $T: U \longrightarrow V$ linear então T injetora $\Leftrightarrow$ T sobrejetora $\Leftrightarrow$ T bijetora