Lista 2 — Paulo Akira 2016.2

2) Trabalhando-se de um operador linear temos que $B' = B$ e, portanto, $[D]_B = [D]_{BB}$

$D(1) = 0 = (0,0,0,0,0)$

$D(x) = 1 = (1,0,0,0,0)$

$D(x^2) = 2x = (0,2,0,0,0)$

$D(x^3) = 3x^2 = (0,0,3,0,0)$

$D(x^4) = 4x^3 = (0,0,0,4,0)$

$$\therefore [D]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $T: U \to U$, $f \mapsto f'$, $[T]_B = [T]_{BB}$

$T(\cos x) = -\sin x = (0,-1)_B$

$T(\sin x) = \cos x = (1,0)_B$

$$\therefore [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\omega: V \to V$, $f \mapsto f'$, $[\omega]_C = [\omega]_{CC}$

$\omega(e^x \cos x) = e^x \cos x - e^x \sin x = (1,-1,0,0)_C$

$\omega(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x = (1,1,0,0)_C$

$\omega(e^{2x} \cos x) = 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = (0,0,2,-1)_C$

$\omega(e^{2x} \sin x) = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = (0,0,1,2)_C$

$$\therefore [\omega]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) $\begin{cases} T(2,3) = 2T(1,0) + 3T(0,1) \\ T(-3,2) = -3T(1,0) + 2T(0,1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (2,3) = 2T(1,0) + 3T(0,1) \\ (0,0) = -3T(1,0) + 2T(0,1) \end{cases} \Rightarrow$ ($T(1,0) \to (a,b)$, $T(0,1) \to (c,d)$)

$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 3c = 2 \\ -3a + 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{3a}{2} \end{cases}$ $\therefore 2a + \frac{9a}{2} = 2 \Rightarrow \frac{13a}{2} = 2 \Rightarrow a = \frac{4}{13}$

$\therefore c = \frac{6}{13}$

$\begin{cases} 2b + 3d = 3 \\ -3b + 2d = 0 \Rightarrow b = \frac{2d}{3} \end{cases}$ $\therefore \frac{4d}{3} + 3d = 3 \Rightarrow \frac{13d}{3} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \frac{9}{13}$ $\therefore b = \frac{6}{13}$

$T(1,0) = (a,b) = \left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13}\right)$

$T(0,1) = (c,d) = \left(\frac{6}{13}, \frac{9}{13}\right)$

$$\therefore [T]_{can,B} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{pmatrix}$$

5) $T(-1,1) = (1,3)_B$ e $T(0,1) = (0,1)_B$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 4x+y \end{pmatrix}$$ ($\begin{cases} x = -x \\ y = x+y \end{cases}$)

x, y são coordenadas de um vetor qualquer na base B

$T(x,y) = -x(-1,1) + (4x+y)(0,1) =$

$= (x,-x) + (0,4x+y) = (x, 3x+y)$

14) $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,0)$, $T(0,0,1) = (0,2,3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b & 2b+3c \\ e & 2e+f & 2f+3g \\ h & 2h+i & 2i+3j \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} e = 1 \\ 2e + f = 3 \Rightarrow 2e + f = 3 \Rightarrow f = 1 \\ 2f + 3g = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} h = 0 \\ 2h + i = 3 \Rightarrow i = 3 \therefore 6 + 3j = 6 \Rightarrow j = 0 \\ 2i + 3j = 6 \end{cases}$

$tr([S]_{can}) = a + f + j - 1$

21) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\therefore \begin{cases} \det(A) = ad - bc \\ tr(A) = a + d \end{cases}$

$A - t \cdot I_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{bmatrix}$

$P_A(t) = \det(A - t I_2) = (a-t)(d-t) - cb \Rightarrow$

$\Rightarrow P_A(t) = ad - at - dt + t^2 - cb \Rightarrow$

$\Rightarrow P_A(t) = \det(A) - t\,tr(A) + t^2 \Rightarrow P_A(t) = t^2 - a_1 t + a_0$

24) $T(u(x)) = \int_0^x u(s)\,ds$

$T(u(x)) = h\,u(x) \Leftrightarrow \int_0^x u(s)\,ds = h\,u(x)$

Não existem funções que satisfaçam a desigualdade acima com exceção de $u(x) = 0$. Como a única solução possível é 0 então o operador não possui autovalores e nem autovetores.

46) $(x-2y, -2x+y, -3) = \lambda(x,y,z)$

$$\begin{cases} x-2y = \lambda x \\ -2x+y = \lambda y \\ -3 = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y = 0 \\ -2x + (1-\lambda)y = 0 \\ (-1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & -2 & 0 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (-1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - 4(-1-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow (-1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-4) = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = 0$

$\Rightarrow (-\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$

$V(-1)$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \Rightarrow x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \therefore \dim V(-1) = 2$$

$V(3)$: $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \therefore \dim V(3) = 3 - 2 = 1$$

$\text{Im}\, T = [T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)] =$

$= [(1,-2,0), (-2,1,0), (0,0,-1)]$: $\dim \text{Im}\, T =$

$= \dim \text{Dom} = 3$: T é injetor

22) Sendo A diagonalizável então A é semelhante a uma matriz D diagonal tal que $A = P^{-1}DP$, com P invertível. Sabemos que $D^m \; \forall m \in \mathbb{N}^*$ continua sendo uma matriz diagonal. Calculando $A \cdot A$ temos $A^2 = P^{-1}D \cdot P \cdot P^{-1} \cdot D \cdot P = P^{-1}D^2P$, generalizando $A^m = P^{-1}D^mP$. Pela definição de diagonalização podemos concluir que A^m é diagonalizável $\forall m \in \mathbb{N}^*$

23) Tomando a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1$ ∴ não existe λ que seja autovalor (pois, a única solução será $(x,y) = (0,0)$).

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P_{A^2}(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 0 \\ 0 & -1-t \end{vmatrix} = (-1-t)^2 \therefore \lambda = -1$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow V(-1) = \mathbb{R}^2$

$B = \{(1,0), (0,1)\} \therefore D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Conclui-se que A^2 é diagonalizável. ($\dim \mathbb{R}^2 = \dim(V(-1)) = 2$).

26) a) Sendo λ um autovalor de T temos que $T(v) = \lambda v$, $v \in V$.

$T \circ T = T^2(v) = T(T(v)) \Rightarrow T^2 = T(\lambda v) \Rightarrow$

$\Rightarrow T^2 = \lambda T(v) \Rightarrow T^2 = \lambda^2 v$

$T \circ T \circ T = T^3(v) = T(T(T(v))) \Rightarrow T^3 = T(T(\lambda v)) \Rightarrow$

$\Rightarrow T^3 = T(\lambda T(v)) \Rightarrow T^3 = T(\lambda^2 v) \Rightarrow T^3 = \lambda^2 T(v) \Rightarrow$

$\Rightarrow T^3 = \lambda^3 v$

Generalizando, $T \circ T \circ \dots \circ T = T^n = \lambda^{n-1}T(v) = \lambda^n v$, pela definição de autovalor: λ^n é autovalor de T^n.

b) Seja $f(t) = P_T(t)$ e B base de V.

λ é autovalor de $T \Leftrightarrow V(\lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \ker(T - \lambda f_d) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow T - \lambda f_d$ não é injetor $\Leftrightarrow T - \lambda f_d$ não é bijetor ($\dim V < \infty$) $\Leftrightarrow [T - \lambda f_d]_B$ não é inversível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A - \lambda f_d$ não é inversível $\Leftrightarrow \det(A - \lambda f_d) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\lambda) = P_T(\lambda) = 0$.

28) a) Se T é inversível então $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de T^{-1} (demonstração no item b)). Assim, como λ é autovalor de T, então $\lambda \neq 0$.

b) Pelas definições de autovalores e autovetores $T(v) = \lambda v$, $v \in V$.

$T^{-1} \circ T = T^{-1}(T(v)) = v \Rightarrow T^{-1}(\lambda v) = v \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda T^{-1}(v) = v \Rightarrow T^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} \cdot v$.

Conclui-se que $1/\lambda$ é autovalor de T^{-1}.

c) Isso é uma consequência da demonstração do item b).

29) $P_A(t) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (2-t)(13-t) - 12 =$

$= 26 - 2t - 13t + t^2 - 12 =$

$= t^2 - 15t + 14 \therefore \lambda = 14$ ou $\lambda = 1$

$V(14)$: $\begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\{ 3x - y = 0 \therefore V(14) = [(1,3)]$

$V(1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\{ x + 4y = 0 \therefore V(1) = [(-4,1)]$

Como $\dim \mathbb{R}^2 = \dim V(14) + \dim (1)$ então a matriz A é diagonalizável.

$B = \{(1,3),(-4,1)\} \therefore D = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_{can,B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_{B,can} = M_{can,B}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A = M_{can,B} \cdot D \cdot M_{B,can} \therefore A^n = M_{can,B} \cdot D^n M_{B,can} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14^2 & -4 \\ 3\cdot 14^2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 14^2+12 & 14^2 4 - 4 \\ 14^2 \cdot 3 - 3 & 14^2 \cdot 12 + 1 \end{pmatrix}$

3º) Como λ_1 e λ_2 são autovalores de T então $A = [T]_{can}$ é diagonalizável, pois, $\dim \mathbb{R}^2 = \dim V(\lambda_1) + \dim (V_2)$.

$B = \{(1,-1),(1,1)\} \therefore D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = [T]_B$

$M_{can,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M_{B,can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = M_{can,B} \cdot D \cdot M_{B,can} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{-10} & 2^{10} \\ -2^{-10} & 2^{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{-10}+2^{10} & -2^{-10}+2^{10} \\ -2^{-10}+2^{10} & 2^{-10}+2^{10} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^{-11}+2^9 & -2^{-11}+2^9 \\ -2^{-11}+2^9 & 2^{-11}+2^9 \end{pmatrix}$

$([T(v)])^{10} = \begin{pmatrix} 2^{-11}+2^9 & -2^{-11}+2^9 \\ -2^{-11}+2^9 & 2^{-11}+2^9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{-9}+2^{11} \\ -2^{-9}-2^{11} \end{pmatrix}$

$T(v)^{10} = (2^{-9}+2^{11}, -2^{-9}-2^{11})$.

34) a) $B = \{\underbrace{(1,1,0)}_{e_1}, \underbrace{(1,0,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,1,1)}_{e_3}\}$

$C = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$

$(0,1,0) = 1\cdot e_1 - 1\cdot e_2 = (1,-1,0)_B$

$(1,1,0) = 1\cdot e_1 = (1,0,0)_B$

$(1,0,1) = -1e_1 + 2e_2 + 1e_3 = (-1,2,1)_B$

$[T(0,1,0)]_C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[T(1,1,0)]_C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[T(1,0,1)]_C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$[T]_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P_T(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & -4 \\ -2 & -1-t & 2 \\ 0 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (3-t)(-1-t)^2$

$\therefore \lambda = 3$ ou $\lambda = -1$

$V(3)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -4z = 0 \\ -2x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -2y \end{cases} \therefore$

$V(3) = [(-2,1,0)_C] \therefore \dim V(3) = 1$

$V(-1)$: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\{ -2x = 2z \Rightarrow \{ x = -z$

$V(-1) = [(-1,0,1)_C, (0,1,0)_C] \therefore \dim V(-1) = 2$

b) T é diagonalizável, pois, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim V(3) + \dim V(-1) = 3$.

O que fizemos no exercício?

1º) colocamos os valores de C na base B

2º) para cada valor na base B utilizamos Mac para achar os valores de $T(\text{valor C}) =$ = valor de C, ou seja, encontrar $[T(v)]_C$ $v \in C$.

3º) montamos a matriz $[T]_C$

33) A tem que assumir autovalores reais já que nunca teremos a solução nula.

0 não precisa ser autovalor de A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1 não precisa ser autovalor de A: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

31) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Devido a forma do B ("muitos zeros") vamos usar o núcleo e a imagem para demonstrar a semelhança.

Seja $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e $[T]_{can} = A$.

$\ker T = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0\} =$

$= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0\} \therefore \dim \ker T = 4$

$T(x,y,z,w) = (x+y+z+w)(1,2,3,4)$

$\mathrm{Im}\, T = [(1,2,3,4)]$

$T(1,2,3,4) = (1+2+3+4)(1,2,3,4) = 10(1,2,3,4)$

Seja C uma base tal que $\{(1,2,3,4), e_1, e_2, e_3\}$, $e_1, e_2, e_3 \in \ker T$.

$[T]_B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \therefore A \cong B$

40) (i) $\dim V = 1 + \dim V(\lambda)$, $\dim V > 0 \therefore$ T é diagonalizável

(ii) pela definição de diagonalização, T é diagonalizável

(iii) T pode ser diagonalizável para qualquer $\dim V$ que satisfaça $\dim V = \dim V(\lambda) + \dim V(\mu)$, $\lambda \neq \mu$.

32) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \therefore P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3-t & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1-t \end{vmatrix} =$

$= (-1-t)(1-t)(1-t)(3-t) \therefore \lambda = -1$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$

$V(-1): \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 \therefore \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x+y+4z = 0 \\ -2x+y+2z = 0 \end{cases}$

$V(-1) = [(0,0,0,1)] \therefore \dim(V(-1)) = 1$

$V(1): \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} x+y+2z = 0 \\ -2x+y+2z-2w = 0 \end{cases} \therefore \dim(V(1)) = 2$

$x = -y-2z$

$2y+4z+2z-2w+y = 0 \Rightarrow w = 3y+3z$

$V(1) = [(-1,1,0,3), (-2,0,1,3)]$

$V(3): \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \\ -2x+y+2z-4w = 0 \end{cases} \therefore \dim(V(3)) = 1$

$V(3) = [(0,0,2,1)]$

Como $\dim \mathbb{R}^4 = \dim V(-1) + \dim V(1) + \dim V(3)$ a matriz é diagonalizável.

$M_{can,B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T \in \mathbb{R}^4$

$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} =$

$= \underbrace{[(3-t)(1-t)+1]}_{t=2} \underbrace{[(1-t)^2-4]}_{t=3 \text{ ou } t=-1} = 0$

$\therefore \lambda = 2$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$

$V(-1): \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} 4x+y = 0 \\ -x+2y = 0 \\ z+w = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z+w = 0 \end{cases} \therefore \dim V(-1) = 1$

$V(2): \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -y+4w=0 \\ z-w=0 \end{cases} \therefore \dim V(2)=1$$

$V(3)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} y=0 \\ -x-2y=0 \\ z-2w=0 \end{cases} \therefore \dim V(3)=1$$

Como $\dim \mathbb{R}^4 \neq \dim V(-1)+\dim V(2)+\dim V(3)$, então a matriz não é diagonalizável.

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T \in \mathbb{R}^3$

$$P_A(t)=\begin{vmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ -1 & -1-t & 1 \\ 0 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(-1-t)+2(1-t)-(1-t) =$$

$$=(1-t)[(1-t)(-1-t)+2-1]=(1-t)[-1+t+t+t^2+1]=$$

$$=(1-t)(t^2) \therefore \lambda=1 \text{ ou } \lambda=0$$

$V(0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x-y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \rightarrow \text{só apresenta a solução trivial}$$

$\dim V(0)=0$

$V(1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \therefore \begin{cases} -x-2y+z=0 \\ y=0 \end{cases} \therefore \dim V(1)=1$

Como $\dim \mathbb{R}^3 \neq \dim V(0)+\dim V(1)$ então a matriz não é diagonalizável.

d) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T \in \mathbb{R}^3$

$$P_A(t)=\begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = (1-t)^2(-t)-(1-t)-(1-t) =$$

$$=(1-t)^2(-t)-2(1-t)=(1-t)[(1-t)(-t)-2]=$$

$$=(1-t)[-t+t^2-2]=(1-t)(1+t)(t-2) \therefore \lambda=1 \text{ ou } \lambda=-1 \text{ ou } \lambda=2$$

$V(1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \therefore \begin{cases} z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \therefore \dim V(1)=1$

$V(1)=[(-1,1,0)]$

$V(2)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \therefore \begin{cases} -x+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \therefore \dim V(2)$

$V(2)=[(1,1,1)]$

$V(-1)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \therefore \begin{cases} 2x+z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \therefore \dim V(-1)=1$

$V(-1)=[(-1/2,-1/2,1)]=[(-1,-1,2)]$

Como $\dim \mathbb{R}^3=\dim V(1)+\dim V(2)+\dim V(-1)$, a matriz A é diagonalizável.

$M_{can,B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

37) T é diagonalizável se para qualquer autovalor de T ocorrer que a multiplicidade geométrica é igual a multiplicidade algébrica.

Lembrando que $\ker T=V(0) \rightarrow \dim \ker T=\dim V(0)$.

Como 0 é raiz do polinômio e mult. geométrica é mult. algébrica, então mult. geométrica = 1 e $\dim \ker T=1$ (letra a) é falsa). A letra b) só é verdadeira se T for diagonalizável. Como trata-se de um polinomio característico então T não pode ser sobrejetor. Na letra d), apesar de ter só 3 raizes pode ser que as dimensões de seus autoespaços sejam diferentes e eventualmente sua soma seja 5.

36) a) $P_T(t)=1t^4+0t^3+0t^2+0t-1$

1	1	0	0	0	−1
−1	1	1	1	1	0
	1	0	1	0	

$\therefore P_T(t)=(t-1)(t+1)(t^2+1)$

As multiplicidades algébricas são iguais a 1 e, portanto, a multiplicidade geométrica será 1.

$\dim \mathbb{R}^4 \neq \underbrace{\dim V(1)}_{1}+\underbrace{\dim V(-1)}_{1}$ ∴ não é diagonalizável

b) $\lambda=0$ tem mult. algébrica = 3 e como $\dim \ker T=\dim V(0)=2$ então T não é diagonalizável.

c) $\lambda=0$ tem mult. algébrica igual a 2 e mult geométrica igual a 2.

$\lambda=2$ tem mult. algebrica igual a 1 e, portanto, (por se tratar de um autovalor então as multiplicidades devem ser pelo menos ≥ 1), multiplicidade geometrica igual a 1. O mesmo argumento é válido para $\lambda=-2$.

Conclui-se que T é diagonalizável

d) $\lambda=0$ tem mult. algébrica igual a2 e mult. geométrica igual a 2

$\lambda=2$ tem mult. algébrica igual a 2 mas nada pode se afirmar de sua mult. geométrica. Se a mult. geométrica for igual a 2 então T é diagonalizável, caso contrário não.

38) A letras b), d) e e) são equivalentes e se remetem a definição de diagonalização: $\dim V = \dim V(1) + \dim V(2) + \dim V(3)$

35) $P_A(t) = \begin{vmatrix} -a-t & 0 & -a \\ 0 & b-t & 0 \\ -3a & c & a-t \end{vmatrix} =$

$= (-a-t)(b-t)(a-t) + a(b-t)(-3a) =$

$= (b-t)[(-a-t)(a-t) - 3a^2] = (b-t)[-a^2+at-at+t^2-3a^2] =$

$= (b-t)(t-2a)(t+2a)$

Se $b \neq 2a$ ou $b \neq -2a$ então as multiplicidades geométricas e algébricas de cada autovalor serão iguais a 1. Dessa forma T é diagonalizável.

42) a) λ autovalor $\Rightarrow \exists u \neq 0$ tq $T(u) = \lambda u$

$T^2(u) = T(T(u)) = T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda^2 u$

$T^2(u) = T(u) \Rightarrow \lambda^2 u = T(u) \Rightarrow \lambda^2 u = \lambda u \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

b) $V = \ker T \oplus \mathrm{Im}\, T \Leftrightarrow \begin{cases} \ker T \cap \mathrm{Im}\, T = \{0\} \\ \dim V = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im}\, T \end{cases}$ (verdadeiro)

Seja u arbitrário em $\ker T \cap \mathrm{Im}\, T = \{0\}$. Vamos mostrar que $u = 0$.

$u \in \ker T \Rightarrow T(u) = 0$ $\Rightarrow T(u) = 0 \Rightarrow T(T(w)) = 0 \Rightarrow$

$u \in \mathrm{Im}\, T \Rightarrow T(w) = u$

$\Rightarrow T^2(w) = T(w) = 0 \Rightarrow u = 0 \therefore \ker T \cap \mathrm{Im}\, T = \{0\}$

T é diagonalizável $\Leftrightarrow V = \sum_\lambda V(\lambda) \Leftrightarrow V = V(0) \oplus V(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \ker T \oplus V(1)$.

Basta mostrar que $V(1) = \mathrm{Im}\, T$:

$V(1) \subset \mathrm{Im}\, T$: se $u \in V(1)$, $T(u) = u$ logo $u \in \mathrm{Im}\, T$

$\mathrm{Im}\, T \subset V(1)$: se $u \in \mathrm{Im}\, T$ então $T(w) = u$ logo

$T(u) = T(T(w)) = T^2(w) = T(w) = u \therefore u \in V(1)$

Conclusão: $V(1) = \mathrm{Im}\, T \therefore V = V(0) \oplus V(1) \Rightarrow T$ é diagonalizável.

47) a) Seja $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$

$T(e_1) = (1,-2,0)$ $T(e_2) = (-2,1,0)$ $T(e_3) = (0,0,-1)$

$\therefore [T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T$ é simétrico

b) $P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 & 0 \\ -2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(-1-t) - 4(-1-t) =$

$= (-1-t)[1-2t+t^2-4] = (-1-t)(t^2-2t-3) =$

$= (-1-t)(t+1)(t-3) = (-1)(t+1)^2(t-3)$

$\therefore \lambda = -1$ ou $\lambda = 3$

$V(-1)$: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$\dim V(-1) = 2$

$\{2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y \therefore V(-1) = [(1,1,0), (0,0,1)]$

$V(3)$: $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$\dim V(3) = 1$

$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \Rightarrow x = -y \\ -4z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases} \therefore V(3) = [(-1,1,0)]$

$B = \{(1,1,0), (0,0,1), (-1,1,0)\}$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \therefore [T]_B = \underbrace{M_{B,can}}_{M_{can,B}^{-1}} [T]_{can} M_{can,B}$

$M_{can,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

48) $P_T(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(-1-t) - (-1-t) =$

$= (-1-t)[(1-2t+t^2) - 1] = (-1-t)(t^2-2t) =$

$= t(-1-t)(t-2) \therefore \lambda = 0$ ou $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$

$V(0)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \therefore V(0) = \ker T = [(-1,0,1)]$

$V(-1)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \therefore V(-1) = [(0,1,0)]$

$V(2)$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \therefore V(2) = [(1,0,1)]$

Como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim V(0) + \dim V(-1) + \dim V(2)$ então T é diagonalizável.

Verificação da ortonormalidade da base B:

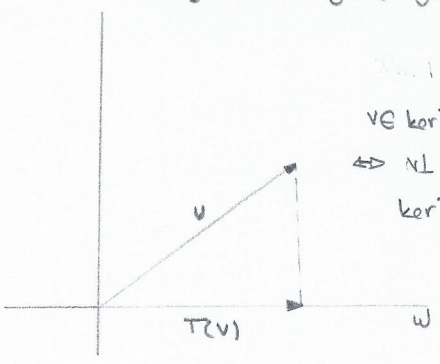
$\left.\begin{array}{l} \langle (1,1,0), (1,1,1) \rangle = 2 \\ \|(1,1,0)\| = \sqrt{2} \end{array}\right\}$ B não é ortonormal então não podemos afirmar nada sobre a simetria de T

Seja a base $B' = \{(-1,0,1), (0,1,0), (1,0,1)\}$ ortonormal então: $[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \therefore T$ é simétrico

49) a) $(T \circ T)(v) = T^2(v) = T(T(v)) \Rightarrow$

$\Rightarrow T^2(v) = T(\text{proj}_w v) = \text{proj}_w(\text{proj}_w v) = T(v)$

b)



$v \in \ker T \Leftrightarrow \text{proj}_w v = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v \perp w \Leftrightarrow v \in w^\perp \therefore$

$\ker T = w^\perp$

Como $\dim V < \infty$, por teorema, sabemos que $\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im} T$ e que $V = w \oplus w^\perp \therefore w = \text{Im} T$.

c) Seja B uma base ortonormal composta por uma base ortonormal de W e $W^\perp$. Temos:

$B = \{\underbrace{e_1, \dots, e_p}_{\in w}, \underbrace{e_{p+1}, \dots, e_n}_{\in w^\perp}\}$

$Te_1 = 1, \dots, Te_p = 1, Te_{p+1} = 0, \dots, Te_n = 0$

$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

d) Como T é simétrico para a <u>base ortonormal</u> B então é simétrico para qualquer base e $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle$, portanto, T é simétrico.

53) Seja $B = \{e_1, e_2\}$ base canônica de $\mathbb{R}^2$. Temos:

$Te_1 = (a,1)$, $Te_2 = (-1,1) \therefore [T]_B = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P_T(t) = \begin{pmatrix} a-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (a-t)(1-t) + 1 =$

$= a - at - t + t^2 + 1 = t^2 - t(a+1) + (a+1)$

Para que P_T tenha raízes reais, ou seja, para que T tenha autovalores devemos ter:

$(a+1)^2 - 4a - 4 > 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a < -1$ ou $a > 3$.

54) Como b tem mult. algébrica 1 então a mult. geométrica deve ser 1, portanto, w_1 e w_2 são l.d.

Se v_1 e v_2 forem l.i. então a mult. algébrica e geométrica de a serão iguais e, portanto, T é diagonalizável.

Como os autovetores de diferentes autoespaços são sempre então v_1 e w_1 são l.i.

$v_1 + w_1$ é autovetor de $T \Leftrightarrow v_1 + w_1 \neq 0$.

P2-2015

Q1) (1) $\dim \mathbb{R}^4 = \sum_{i=1}^{4} \dim V_i$ ⇒ definição de diagonalização (Verdadeiro)

(2) T só é simétrico se B for uma base ortonormal (Falso)

(3) $\det A = 0$ ⇒ T não inversível ⇒ T não injetora então $\ker T \neq \{0\}$ (Verdadeiro) (A)

Q2) $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$ são autovalores de T

Como $(1,-1,0) \in \ker T$ então $(1,-1,0) \in V(0)$ ⇒
⇒ $\lambda = 0$ é um autovalor de T

$B = \{\underbrace{(0,0,1)}_{e_1}, \underbrace{(1,-1,0)}_{e_2}, \underbrace{(1,1,0)}_{e_3}\}$, $D = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[T]_B}$

$A = [T]_{can}$ ⇒ $[T]_{can} = M_{can,B}\,[T]_B\,M_{B,can}$ ⇒

⇔ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ (A)

Q3) $\det A = 12$, $\det B = 12$, $\det C = -12$

C não é semelhante nem a A nem a B

B não é diagonalizável pois $\dim V(2) = 1$ e, portanto, a multiplicidade algébrica é maior que a multiplicidade geométrica. (A)

Q4) $x^2 - x + 1 = x^2 - x - x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 - (x + x^2) + 1$

$T(1) = (3,1)_C$, $T(x + x^2) = (0,2)_C$, $T(x^2) = (1,-1)_C$

$T(x^2 - x + 1) = 2T(x^2) - T(x + x^2) + T(1) =$

$= 2(1,-1)_C - (0,2)_C + (3,1)_C =$

$= (2,-2)_C - (0,2)_C + (3,1)_C = (5,-3)_C =$

$= (2,-8)$ (A)

Q5) $T(e^{2x}\cos x) = 2e^x \cos x - e^{2x} \operatorname{sen} x = 2e_1 - 1e_2 + 0e_3$

$T(e^{2x}\operatorname{sen} x) = 2e^x \operatorname{sen} x + e^{2x}\cos x = 2e_2 + 1e_1 + 0e_3$

$T(1) = 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ (A)

Seja $B = \{e^{2x}\cos x, e^{2x}\operatorname{sen} x, 1\}$ ∴ $[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Q6) (1) Verdadeiro. Decorre da definição de operador simétrico

(2) $\ker(T + I) \Rightarrow \lambda = -1$ é autovalor de T

Como mult. geométrica de -1 é 2 então a mult. algébrica é ≥ 2, portanto, $(t+1)^2$ é divisor de p_T (Verdadeiro)

(3) (Falso) $\underbrace{\dim T}_{=7} = \underbrace{\dim W}_{=6} + \underbrace{\dim W^\perp}_{=1}$ (A)

Q7) (1) Tratando-se de um operador linear então
T é sobrejetor ⇔ T é injetor ⇔ T é bijetor ⇔ (A)
⇔ T é inversível ⇔ $\lambda \neq 0$. (Verdadeiro)

(2) $T(v) = \lambda v$, $T(w) = \mu w$ ∴ $T(v+w) = T(v) + T(w) =$
$= \lambda v + \mu w \neq (\lambda + \mu)(v + w)$. (Falso)

(3) O polinômio característico terá grau 37 devendo ter pelo menos uma raiz real. (Verdadeiro)

Q8) (1) $B = \{1, x, x^2\}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∴ $p_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 2 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t^3$

∴ $\lambda = 0$

$V(0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ ∴ $\dim V(0) = 1$

Como mult. geométrica < mult. algébrica de 0 então T não é diagonalizável. (Falso)

(2) $p_B(t) = (4-t)(3-t)(2-t)(1-t)$

∴ $\lambda = 4$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$ ou $\lambda = 1$ são autovalores

notamos que A é a matriz $[T]_{B'}$, com B' sendo a base formada pelos autovalores li de B. (E)

$B = P^{-1}AP$ (Verdadeiro)

(3) (Verdadeiro)

Q9) (1) $\lambda = -3$: mult. geom. < mult. algébrica se $\dim V(3) = 1$. (Verdadeiro)

(2) o fato de $a = 4$ não impede que o item (1) ocorra (Falso)

(3) $\dim P_4(\mathbb{R}) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow 4 = \dim \ker T + 3$

Para $\lambda = 0$, mult geom < mult algébrica ∴ T não é diagonalizável (I)

Q10) $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⇒ $\det [T]_B = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$
∴ T é inversível

$P_T(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^3 + 1 + (1-t) - (1-t) =$

$= (1-t)(1-2t+t^2) + 1 = (1-2t+t^2-1+2t^2-t^3) + 1 =$

$= -t^3 - 3t + 3t^2 + 2$ ©

↳ tem 3 raízes reais ou 1 raiz real

Q11) $P_A(t) = \begin{vmatrix} 7-t & 4 \\ 2 & 5-t \end{vmatrix} = (7-t)(5-t) - 8 =$

$= 35 - 7t - 5t + t^2 - 8 = t^2 - 12t + 27 = (t-9)(t-3)$

$V(9)$: $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\{ 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y \therefore V(9) = [(2,1)]$

$V(3)$: $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\{ 4x + 4y = 0 \Rightarrow x = -y \therefore V(3) = [(-1,1)]$

$B = \{(2,1), (-1,1)\}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$[T]_{can} = M_{can,B} \cdot [T]_B \cdot M_{B,can}$

$M_{can,B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \therefore M_{B,can} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$[T]^{253}_{can} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9^{253} & 0 \\ 0 & 3^{253} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 9^{253} & -3^{253} \\ 9^{253} & 3^{253} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 9^{253} + 3^{253} & 2\cdot 9^{253} - 2\cdot 3^{253} \\ 9^{253} - 3^{253} & 9^{253} + 2\cdot 3^{253} \end{pmatrix}$ ①

$Tr([T]_{can}) = 9^{253} + 3^{253}$

Q12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \Rightarrow c = -3a \\ a - b = 0 \Rightarrow b = a \\ -a + b = 0 \Rightarrow b = a \end{cases} \therefore \ker T = [(1,1,-3)_B]$

$\ker T = 1 + x + 1 + 2x - 3x^2 = 2 + 3x - 3x^2$

$T(1+x) = (1,1,-1)_C$

$T(1+2x) = (2,-1,1)_C$ Ⓐ

$T(x^2) = (1,0,0)_C$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Im T = [(1,0,0)_C, (0,-1,1)_C] =$

$= [1+2x, -x-x^2] = [1+2x, x+x^2]$

Q13) $P_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & b & 0 \\ 1 & a-t & 0 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix} =$

$= (a-t)^2(-1-t) - b(-1-t) =$

$= (-1-t)[a^2 - 2at + t^2 - b] =$

$= (-1-t)[t^2 - 2at + (a^2-b)]$

$\therefore 4a^2 - 4a^2 + 4b > 0 \Rightarrow b > 0$

$t = \frac{2a \pm 2\sqrt{b}}{2} = a \pm \sqrt{b}$

Se $a = -2$ e $b = 1 \Rightarrow t = -1$ e $t = -3$

$V(-1)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ↳ $\dim V(-1) = 1$

∴ mult. geom < mult. algebrica ⇒ não é diagonalizável

Q14) A é diagonalizavel, pois, tem quatro raizes distintas e reais

B não é diagonalizável pois para $\lambda = 1$ mult. geom < mult. algebrica.

$P_C(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ -1 & 1-t & -1 \\ 1 & 1 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(3-t) + 2 + (1-t) - (3-t) - (1-t) =$

$= (3-t)(1-t)^2 - 1 + t = (3-t)(1-2t+t^2) - 1 + t =$

$= 3 - 6t + 3t^2 - t + 2t^2 - t^3 - 1 + t =$

$= -t^3 + 5t^2 - 6t + 2 = (-1)(t-1)(x^2 - 4x + 2x)$

duas raizes reais distintas

A e C são diagonalizáveis Ⓐ

Q15) $[T(w_1)]_C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[T(w_2)]_C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[T(w_3)]_C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$[T]_C = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 6 \\ 8 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P_T(t) = \begin{vmatrix} -5-t & -3 & 6 \\ 8 & 5-t & -6 \\ 0 & 0 & 3-t \end{vmatrix} =$

$= (-5-t)(5-t)(3-t) + 24(3-t) =$ (B)

$= (3-t)[(-1)(5+t)(5-t) + 24] =$

$= (3-t)[(-25+t^2) + 24] = (3-t)(t-1)(t+1)$

$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 3$, é diagonalizável

P2 de 2013:

Q1) $P_T(t) = \begin{vmatrix} 4-t & b \\ -4 & 8-t \end{vmatrix} = (4-t)(8-t) + 4b =$

$= 32 - 4t - 8t + t^2 + 4b = t^2 - 12t + (4b+32)$

Se $b=8$: $t(t-12)=0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 12$ ∴ é diagonalizável

Se $b=1$: $(t-6)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 6$ ∴ $T(u) = 6u, \forall u \in \mathbb{R}^2 / \{0\}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ (e)

$\{-2x + y = 0 \Rightarrow y = 2x$ ∴ $\dim V(1) = 1$

Não existe valor de b para que T tenha um subespaço de dim 2.

Q3) (1) $T(u) = \lambda u$ (V) (d)

$T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(\lambda u) = \lambda T^{-1}(u) = u \Rightarrow T^{-1}(u) = \frac{1}{\lambda} u$

(2) $T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \mu v \neq (\lambda + \mu)(u+v)$ (F)

(3) $T^3 + 2T^2 = \mu^3 \cdot v + 2\mu^2 v = (\mu^3 + 2\mu^2)v$ (V)

Q4) $x = 2y - y$ ∴ $(x, y, 3) = (2y - y, y, 3) =$

$= y(-1, 1, 0) + 3(2, 0, 1)$

$S = [(-1, 1, 0), (2, 0, 1)]$ ∴ $\dim S = 2$

$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b)

$P_T(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t(1-t)^2$

T é diagonalizável, pois, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim V(0) + \dim V(1)$

Como matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores então $[T]_{can}$ com $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ serão autovalores. Sendo $\lambda = 0$ autovalor então $\ker T \neq \{0\}$ portanto T não é injetor consequentemente não é bijetor e nem inversível

Q5) $T(1) = 6\int_0^x dt = 6x = (2,0,0,0)_C \Rightarrow$

$\Rightarrow 2p_1 = 6x \Rightarrow \boxed{p_1 = 3x}$

$T(x) = x + 6\int_0^x t\,dt = x + 6[t^2/2]_0^x =$ (d)

$= x + 6\frac{x^2}{2} = x + 3x^2 = (0,3,0,0)_C$

$\Rightarrow x + 3x^2 = 3p_2 \Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{x}{3} + x^2}$

$T(x^2) = 2x^2 + 6\int_0^x t^2\,dt = 2x^2 + 2x^3 =$

$= (0,0,4,0)_C \Rightarrow 2x^2 + 2x^3 = 4p_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{p_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}}$

Q6) $T = \lambda u$

$T^2 = T \Rightarrow \lambda^2 u = \lambda u \Rightarrow \lambda(\lambda u - u) = 0$ (d)

$T = A^{-1} D A$ ∴ $T^2 = A^{-1} D^2 A$ (T^2 é diagonalizável)

$T^2 = T \Rightarrow T^2 \sim T$ ∴ $T = P^{-1} T P$ (T é diagonalizável)

Q7) $T(1,0) = T((3,2) - 2(1,1)) =$

$= T(3,2) - 2T(1,1) = (6,4) - (6,12) = (0,-8)$

$T(0,1) = T(3(1,1) - (3,2)) =$

$= 3T(1,1) - T(3,2) = (9,18) - (6,4) = (3,14)$

(a)

$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \det [T]_{can} = 24$

Q8) (1) se, e somente se, $x \neq 0$ (F)

(2) $\det A = 0 \Rightarrow$ há colunas de formam um conjunto L.d. (V) c

(3) $P_T(t) = (t+1)(t-1) \therefore \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ (V) (b)

Q9) $M_{can,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{B,can} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$[T]_{can} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ c

$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$ (b)

$= \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & 2\alpha+2\beta \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$

$-\alpha = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow 3\alpha + 2\beta = 0$

Q10) $P_T(t) = -t(t+1)(t-1)(t+2)(t-2)$ (e)

$\lambda = 0 \quad \lambda = -1 \quad \lambda = 1 \quad \lambda = -2 \quad \lambda = 2$

Para T^2: $\lambda^2 = 0 \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda^2 = 1 \quad \lambda^2 = 4 \quad \lambda^2 = 4$

$P_{T^2}(t) = t(t-1)^2(t-4)^2$ c

$T \in N$, com $\dim V = 5$

$\lambda^3 = 0 \quad \lambda^3 = -1 \quad \lambda^3 = 1 \quad \lambda^3 = -8 \quad \lambda^3 = 8$

$[T^3 - T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\therefore P_T(t) = t^3(6-t)(-6-t)$

$\dim(V(0)) = 3$

Q11) $\dim V(3) = 1$

$x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$

$(x, y, z, w) = (-y-z, y, z, y) =$ c

$= y(-1, 1, 0, 1) + z(-1, 0, 1, 0)$

$V(0) = \ker T \Rightarrow \dim \ker T = \dim V(0) = 2$ e

Q12) $F(1-x^2) = F(1) - F(x^2)$

$F(1+x^2) = 1(1+x^2) = 1+x^2$

$F(-x+2x^2) = 2(-x+2x^2) = 2(-x+2x^2)$

$F(x+1) = 0$

$\begin{cases} F(1) + F(x^2) = 1 + x^2 \\ -F(x) + 2F(x^2) = -2x + 4x^2 \\ F(x) + F(1) = 0 \Rightarrow F(x) = -F(1) \end{cases}$ c

$\begin{cases} F(1) + F(x^2) = 1 + x^2 \\ F(1) + 2F(x^2) = -2x + 4x^2 \end{cases}$ (c)

$F(x^2) = -2x + 4x^2 - 1 - x^2 = 3x^2 - 2x - 1$

$-F(1) = F(x^2) - 1 - x^2 = 2x^2 - 2x - 2$

$F(1-x^2) = -5x^2 + 4x + 3$

Q13) $P_T(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & -1 \\ -2 & -3-t & 1 \\ 2 & 2 & -2-t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t+2)$

$-2x - y + 3$

$V(-1)$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\{ 2x + 2y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + 2y$

$(x, y, z) = (x, y, 2x+2y) =$

$= x(1, 0, 2) + y(0, 1, 2)$ (a)

$V(-1) = [(1,0,2), (0,1,2)]$

$V(-2)$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ c

$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$

$z = -2y + y \Rightarrow z = -y$

$(x, y, z) = y(-1, 1, -1) = -y(1, -1, 1)$

$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\therefore a + b + c = 2$

$[D \circ F]_{B,can} = [D]_{c,can} \cdot [F]_{BC}$

$D(1+x) = 1 = (1,0,0)_{can}$

$D(x) = 1 = (1,0,0)_{can}$ $\quad [D]_{c,can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D(x+x^2) = 1+2x = (1,2,0)_{can}$

$[D \circ F]_{B,can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y+2z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$

$y=0 \Rightarrow x=-z \therefore \ker(D \circ F) = (1,0,-1)_B =$

$= [(1,0,1)-(1,1,0)] = [(0,-1,1)]$ (d)

Q15) Matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores mas não os mesmos autovetores (d)

Q16) $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$(a,0,0,0) = a \cdot e_1 - a \cdot e_2 = (a,-a,0,0)$

$(0,b,0,0) = b e_2 = (0,b,0,0)$

$(0,0,c,0) = c e_4 = (0,0,0,c)$

$(0,0,0,d) = d e_3 - d e_2 = (0,-d,d,0)$

$\therefore (a,b,c,d) = (a, b-a-d, d, c)$ (b)

$[T]_c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b-a-d \\ d \\ c \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2a+d \\ b-a-d+d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+d \\ b-a-c \end{pmatrix}$

$\therefore T(a,b,c,d) = (2a+d)(1+x) + (b-a-c)(2+3x) =$

$= 2a+d+(2a+d)x+2b-2a-2c+(3b-3a-3c)x =$

$= d+2b-2c+x(-a+3b-3c+d)$

P2 de 2012:

Q4) $P_T(t) = \begin{vmatrix} a-t & b & e \\ 0 & d-t & e \\ 0 & 0 & f-t \end{vmatrix} = (a-t)(d-t)(f-t)$

$T(U) = (a,0,0)_B = aU$ (d)

$T(V) = (b,d,0)_B = bU + dV$

$T(W) = (c,e,f)_B = cU + eV + fW$

Q2) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (a)

$P_T(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 & 0 \\ -2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^3 - 4(1-t) =$

$= (1-t)\left[(1-t)^2 - 4\right] = (1-t)\left[1-2t+t^2-4\right] =$

$= (1-t)(t^2-2t-3) = (1-t)(1+t)(t-3)$

$\det[T] \neq 0 \therefore T$ é invertível $\Leftrightarrow T$ é injetor

Q3) $T(1,-2) = (1,2)_B = (1,0)$

$T(0,1) = (2,1)_B = (2,-3)$

$T(1,0) = (a,c)_c = (a,c)$ (b)

$T(0,1) = (b,d)_c = (b,d)$

$T(1,0) = T((1,-2)+2(0,1)) = T(1,-2) + T(0,1$

$= (1,0) + 2(2,-3) = (a,c) \therefore c = -6$ e $a =$

$b = 2$ e $d = -3$

$a+d = 5-3 = 2$ e $b+c = 2-6 = -4$

Q5) $\lambda = 0, \lambda = 2, \lambda = -3$

Se $\dim \ker T \geq 1$ então $\dim \ker T = \dim V(0) = 2$

pois mult. geom $\leq$ mult. algébrica (c)

T é diagonalizável $\Leftrightarrow \dim \ker T > 1$ e $\dim V(-3) =$

Q6) $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$(1,0,0) = e_1 = (1,0,0)_B$

$(0,1,0) = e_2 - e_1 = (-1,1,0)_B$

$(0,0,1) = e_3 - e_2 = (0,-1,1)_B$

$\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2a-b+1 \\ a & a & a+c \\ c & 2c & 2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ c \end{pmatrix}$ (d)

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$

$[T]_c = \begin{pmatrix} 1 & a & a-b \\ a & 0 & c \\ c & c & 0 \end{pmatrix} \therefore a-b = c \Rightarrow$

$\Rightarrow c+b = a$

Q7) (I) Verdadeiro ①

(II) Falso. Se houver uma raiz complexa, seu conjugado também será raiz

(III) Verdadeiro.

Q8) $T(-t^2) = (1,0) \Rightarrow -T(t^2) = (1,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow T(t^2) = (-1,0)$

$T(t - t^2) = (-1,3) \Rightarrow T(t) - T(t^2) = (-1,3) \Rightarrow$

$\Rightarrow T(t) = (-1,3) + (-1,0) \Rightarrow T(t) = (-2,3)$

$T(1 + 2t + t^2) = (-2,7) \Rightarrow T(1) + (-4,6) + (-1,0) =$

$= (-2,7) \Rightarrow T(1) + (-5,6) = (-2,7) \Rightarrow$ ②

$\Rightarrow T(1) = (3,-1)$

$T(a + bt + ct^2) = (\alpha, \beta) \Rightarrow aT(1) + bT(t) + cT(t^2) =$

$= (\alpha,\beta) \Rightarrow (3a, -a) + (-2b, 3b) + (-c, 0) = (\alpha,\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow (3a - 2b - c, -a + 3b) = (\alpha, \beta)$

$\alpha + \beta = 3a - 2b - c - [-a + 3b] = 4a - 5b - c$

Q9) $\lambda^3 v = \lambda v \Rightarrow v(\lambda^3 - \lambda) = 0 \therefore \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ (Verdadeiro) ④

(2) $T^k(v) = \lambda^k \cdot v$, $\lambda = 0$, (Verdadeiro)

(3) $T^3 = -T \Rightarrow \lambda^3 v = -\lambda v \Rightarrow v(\lambda^3 + \lambda) = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \therefore$ não é diagonalizável.

Q10) $T(0,1,2) = 0$, $B = \{\underbrace{(0,1,2)}_{e_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{e_2}, \underbrace{(1,1,2)}_{e_3}\}$

$M_{can,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$(1,0,0) = e_3 - e_1 = (-1,0,1)_B$

$(0,1,0) = e_1 - 2e_3 + 2e_2 = (1,2,-2)_B$

$(0,0,1) = e_3 - e_2 = (0,-1,1)_B$

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{2012} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2012} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤

$T^{2012} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^{2012} \\ 0 & 1 & 2^{2012} \\ 0 & 1 & 2^{2013} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2012} & 2 - 2^{2013} & -1 + 2^{2012} \\ 2^{2012} & 2 - 2^{2013} & -1 + 2^{2012} \\ 2^{2013} & 2 - 2^{2014} & -1 + 2^{2013} \end{pmatrix}$

$T^{2012}(3,1,1) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{2012} + 2 - 2^{2013} - 1 + 2^{2012} \end{pmatrix}$

Q11) (1) Falso. Só se forem l.i. ⑤

(2) Verdadeiro. Definição de diagonalização

(3) Verdadeiro. Três raízes simples

Q13) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ ②

$\Rightarrow -1 + 4 - 2a - b \neq 0 \Rightarrow 2a + b \neq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a + b - 3 \neq 0$

Q14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - d \\ a - c + d \\ c + d \end{pmatrix}$

$T(a,b,c,d) = (2a + b - c, b + c - 2d, c + d) = (1,-1,1)$

$\begin{cases} 2a + b - c = 1 \Rightarrow a = -2d + 2 \\ b + c - 2d = -1 \Rightarrow b + 1 - d - 2d = -1 \Rightarrow b = 3d - 2 \\ c + d = 1 \Rightarrow c = 1 - d \end{cases}$ ②

$\ker = \{(-2d + 2, 3d - 2, 1 - d) : d \in \mathbb{R}\}$

Q15) $P_T(t) = \begin{vmatrix} 3 - t & 0 & 0 \\ a & 1 - t & 0 \\ 6 & b & 1 - t \end{vmatrix} = (3 - t)(1 - t)^2$

$V(1): \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 6 & b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ ⑤

diagonalizável $\Leftrightarrow b = 0$

Q16) $S(1) = 1 + t^2 = (1,0,1)_B$

$S(t) = t - 2t^2 = (0,1,-2)_B \therefore [S]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$S(t^2) = -1 + t = (-1,1,0)_B$

$[S \circ T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr}[S \circ T]_B = 1$ ⑤