P2 – ALGELIN II

R$ 3.90

MAT2458

MATERIAL DE ESTUDOS

(RESUMO, PROVAS E SOLUÇÕES)

2° SEMESTRE DE 2014

POR ARTHUR SALLES

I - Produto Interno

Também chamado de produto escalar, o produto interno entre dois vetores u e v é representado por $\langle u, v \rangle$

> **Relembrando**: no V^3 $\langle u, v \rangle = u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$
> se $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$

Estamos acostumados a calcular o produto escalar dessa forma, mas o enunciado do problema pode dar um outro modo. Para testar se é uma fórmula de produto interno testamos:

i) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ só para $x = 0$

Se ao testar algum der-errado, então a fórmula dada pelo enunciado não é produto interno

* **Norma**: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
* **Ortogonalidade**: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$
* **Produtos Internos Usuais**:

i) no $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

ii) em $M_{n \times m}$: pensamos na matriz como um vetor (, , ,) e fazemos como do $\mathbb{R}^n$. Multiplica entradas correspondentes e soma.

iii) em P_n:

- $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$
  $y(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_n t^n = (\beta_0, \dots, \beta_n)$ $\Rightarrow \langle x, y \rangle = \alpha_0 \beta_0 + \dots + \alpha_n \beta_n$
- Tomo $t_1, t_2, \dots, t_m$, com $m > n$ (obrigatório, não pode ser menor)
  $\langle x, y \rangle = x(t_1) y(t_1) + \dots + x(t_m) y(t_m)$
- Fixando $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$
  $\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) \, dt$

Obs: o enunciado dá que ts usar ou qual o intervalo $[a, b]$

iv) $C([a, b])$

↳ espaço das funções contínuas em $[a, b]$

$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t) y(t) \, dt$

II - Ortogonal de um Subconjunto

Representamos como $S^{\perp}$ o ortogonal de S, que contém todos os vetores do espaço que são ortogonais a S.

Obs: para um vetor ser ortogonal a S, ele deve ser ortogonal a todos vetores de S

Assim; $S^{\perp} = \{x \in E : \underbrace{x \perp y \ \forall y \in S}_{x \perp S}\}$

Como encontrar $S^{\perp}$?

- Dado um conjunto gerador de S $(S = [v_1, v_2, \dots, v_n])$, um vetor x está em $S^{\perp}$ se, e somente se, $x \perp v_1$, $x \perp v_2$ ... $x \perp v_n$

Assim para achar $S^{\perp}$, escrevo x como um vetor genérico e faço: $\langle x, v_1 \rangle = 0$, $\langle x, v_2 \rangle = 0, \dots$, $\langle x, v_n \rangle = 0$

Exemplo: Q 15 P1 2012, $E = \mathbb{R}^6$

$S = \{(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6 : a+b+c=0,\ d+e-f=0\}$. Ache $S^{\perp}$

i) Vamos achar os geradores de S; isolando: $c = -a-b$ e $f = e+d$

$s = (a, b, -a-b, d+e, d+e) = a(1,0,-1,0,0,0) + b(0,1,-1,0,0,0) + d(0,0,0,1,1,1) + e(0,0,0,0,1,1)$

Usando $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$\langle x, (1,0,-1,0,0,0) \rangle = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1$

$\langle x, (0,1,-1,0,0,0) \rangle = 0 \Rightarrow x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = x_1$

$\langle x, (0,0,0,1,0,1) \rangle = 0 \Rightarrow x_4 + x_6 = 0 \Rightarrow x_6 = -x_4$

$\langle x, (0,0,0,0,1,1) \rangle = 0 \Rightarrow x_5 + x_6 = 0 \Rightarrow x_5 = -x_6 = x_4$

$\Rightarrow x = (x_1, x_1, x_1, x_4, +x_4, -x_4)$

Então $S^{\perp} = \{(x_1, x_1, x_1, x_4, x_4, -x_4) : x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}$

ou $(x, x, x, -y, -y, y)$ se $x_1 = x$ e $-x_4 = y$

Resposta: (c)

Um pouquinho mais de teoria:

Todo elemento de E pode ser escrito como: $x = u + v$, com $u \in S$ e $v \in S^{\perp}$. Logo $E = S + S^{\perp}$. Como $S \cap S^{\perp} = \{0\}$, obtemos o teorema:

$$\boxed{E = S + S^{\perp}} \Rightarrow \dim E = \dim S + \dim S^{\perp}$$

E, se tivermos B_0, base de S, e B_1 - base de $S^{\perp}$, $B_0 \cup B_1$ é base do espaço E.

Exercícios sugeridos
- P_1 de 2011: 2, 13, 15
- P_1 de 2012: 1, 3, 4, 5, 15
- (resolução mais a frente)

III - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Será muito importante para resolver problemas de projeção saber obter a partir de uma base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de certo subespaço, outra base $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonal.

(Para lembrar: se B' é ortogonal os vetores v_i são ortogonais dois a dois. Ou seja $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $\forall i, j \in 1, \dots n$ com $i \neq j$)

Como fazer?

i) $v_1 = u_1$

ii) $v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2$

$\vdots$

n) $v_n = u_n - \text{proj}_{v_1} u_n - \text{proj}_{v_2} u_n - \dots - \text{proj}_{v_{n-1}} u_n$

Obs: 1) Se quiser base ortonormal, basta dividir cada v_i pela sua norma

2) Veremos agora como calcular projeção

IV - Projeção de um vetor em outro vetor

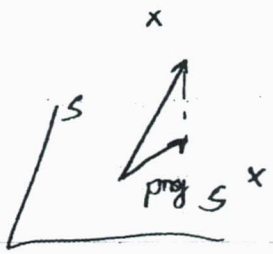
Lembrando que no V^3 : $\text{proj}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \cdot v$

Para um espaço vetorial qualquer a formula é a mesma

$$\boxed{\text{proj}_x y = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} \cdot x}$$

Lembrar que : $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ e que devemos usar $\langle , \rangle$ usual ou o que é dado pelo enunciado

V - Projeção ortogonal de um vetor em um subespaço



o vetor $\text{proj}_S x$ é o único que atende a seguinte propriedade : $x - y \perp S$ $(y \in S)$

Ou seja : $\boxed{x - \text{proj}_S x \perp S}$ $(\in S^\perp)$

Como calcular? Precisamos primeiro obter uma base ortogonal (ou ortonormal) de S, se o enunciado não nos deu uma. Para isso usar Gram-Schmidt.

Depois, se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base {ortogonal}:

$$\boxed{\text{proj}_S w = \text{proj}_{u_1} w + \dots + \text{proj}_{u_n} w}$$

* Melhor aproximação : dado um subespaço S, $\text{proj}_S x$ é o elemento de S que melhor aproxima x. Logo, se um enunciado pedir para calcular a melhor aproximação de x em S basta achar a projeção

* Enfatizando : a fórmula só vale se a base for ortogonal (ou ortonormal)

Exercícios Sugeridos $\begin{cases} P_1\ 2011 - 1, 3, 5, 8, 15 \\ P_1\ 2012 - 7, 11, 16 \end{cases}$

Resolução:

Q1 P1 de 2011

Pela definição de projeção de x em S

$$x = \text{proj}_S x + y, \text{ com } y \perp S \ (y \in S^\perp)$$

Por comparação: $\text{proj}_S x = -7v$ R.: (B)

Q2 P1 de 2011

Lembre que: $\dim E = \dim S + \dim S^\perp$

$$3 = 1 + \dim S \Rightarrow \dim S = 2$$

Assim, uma base de S tem 2 elementos. Fazendo o processo de achar base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-a) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1-a^2 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-a) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & \boxed{a^3-a} \end{pmatrix}$$

Vemos que para ter 2 cores na base, ou seja, dois pivôs na escalonada

$$a^3 - a = 0 \Rightarrow a(a^2-1) = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 1 \end{cases} \quad R.: (A)$$

Q3 P1 de 2011

Vemos de cara que a base dada é ortogonal pois $\langle (1,0,0,0), (0,1,1,0) \rangle = 0$
$\langle (1,0,0,0), (0,0,0,1) \rangle = 0$
$\langle (0,1,1,0), (0,0,0,1) \rangle = 0$

Então podemos usar a fórmula

$\text{proj}_S U = \text{proj}_{U_1} U + \text{proj}_{U_2} U + \text{proj}_{U_3} U$, onde U_1, U_2, U_3 são os vetores dados

$\text{proj}_S U = \frac{\langle U, U_1 \rangle}{\|U_1\|^2} U_1 + \frac{\langle U, U_2 \rangle}{\|U_2\|^2} U_2 + \frac{\langle U, U_3 \rangle}{\|U_3\|^2} U_3$, fazendo $U = (a, b, c, d)$

$$(1,0,0,1) = \frac{a}{1}(1,0,0,0) + \frac{b+c}{2}(0,1,1,0) + \frac{d}{1}(0,0,0,1) = \left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}, d\right)$$

Logo $a = d = 1$, $b + c = 0$ $\Rightarrow \boxed{U = (1, b, -b, 1)}$ R.: A) não confundir os a's e b's
se nosso $b = 1$ e o a do enunciado é 1

Q5 P1 de 2011

(a) Falso - $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$

$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$

Conclusão : $\langle u,v\rangle = 0$

(b) Falso : se $u = 0$ $|\langle u,v\rangle| = 0 = \underbrace{\|u\|}_{0}\|v\|$

Mas v não é $\lambda \cdot u$

(c) Falso : $\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v, u+v\rangle} = \sqrt{\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2}$ só seria $\|u\| + \|v\|$

se $\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|$ sem o módulo.

(d) Falso : só vale a se a base for ortogonal

(e) Verdadeiro : Se u é ortogonal a todos da base de V, então $u \in V^\perp$. Mas $V^\perp = \{0\}$ pois V é o espaço todo

Q8 P1 de 2011

i) Achar uma base ortogonal, partindo de $\{v_1, v_2\} = \{1, t\}$

$v_1 = u_1 = 1$

$v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1} u_2 = t - \text{proj}_1 t = t - \dfrac{\langle 1,t\rangle}{\langle 1,1\rangle} \cdot 1 \underset{(*)}{=} t - \dfrac{1}{2}$

$(*)$ $\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1 \cdot 1\, dt = 1$

$\langle 1,t\rangle = \int_0^1 1 \cdot t\, dt = \dfrac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$

Logo $B' = \{1, t - \frac{1}{2}\}$ é ortogonal

ii) Usar a fórmula : $\text{proj}_{z_1} g = \text{proj}_{v_1} g + \text{proj}_{v_2} g = \dfrac{\langle v_1, g\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \dfrac{\langle v_2, g\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2$

$\langle v_1, g\rangle = \langle 1, t^3\rangle = \int_0^1 1 \cdot t^3 = 1/4$

$\langle v_1, v_1\rangle = \langle 1, 1\rangle = 1$

$\langle v_2, g\rangle = \langle t - \frac{1}{2}, t^3\rangle = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) t^3\, dt = \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{t^4}{8}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{40}$

$\langle v_2, v_2\rangle = \langle t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\, dt = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

Assim: $\text{proj}_{P_1} g = \frac{1}{1} \cdot 1 + \frac{3}{\cancel{40}} \cdot \frac{\cancel{12}^{3}}{1} \left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{10} t - \frac{2}{10}$

R.: (A)

Q13 - P1 de 2011

Se $(u+v) \in S$ e $(u-v) \in S^{\perp} \Rightarrow u+v \perp u-v$

$$\langle u+v, u-v \rangle = 0$$

$$\langle u,u \rangle + \langle u,-v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,-v \rangle = 0$$

$$\langle u,u \rangle - \cancel{\langle u,v \rangle} + \cancel{\langle u,v \rangle} - \langle v,v \rangle = 0$$

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

$$\|u\|^2 = \|v\|^2$$

$$\boxed{\|u\| = \|v\|}$$

R.: (C)

Q15 - P1 de 2011

R.: d) A afirmação é falsa, pois se $S \subseteq W$, então $\dim S \leq \dim W$

Como $\dim V = \dim S + \dim S^{\perp} = \dim W + \dim W^{\perp}$

$$\dim S^{\perp} \geq \dim W^{\perp}$$

Q1 - P1 de 2012

Se $v \perp S$, então v é ortogonal aos geradores de S

$\hookrightarrow v = \alpha - \beta t + t^2$

i) $v \perp (1-t) \Rightarrow \langle \alpha - \beta t + t^2, 1-t \rangle = 0$, Usando a fórmula do enunciado

$$\alpha \cdot 1 + \cancel{(\alpha - \beta + 1) \cdot 0} + (\alpha - 2\beta + 4)(-1) = 0$$

$$\cancel{\alpha - \alpha} + 2\beta - 4 = 0$$

$$\boxed{\beta = 2}$$

ii) $v \perp (1-t^2) \Rightarrow \langle \alpha - 2t + t^2, 1-t^2 \rangle = 0$

$$\alpha \cdot 1 + (\alpha - 2 + 1) \cdot 0 + \cancel{(\alpha - 4 + 4)}(-3) = 0$$

$$\alpha - 3\alpha = 0$$

$$\boxed{\alpha = 0}$$

R.: (c)

13 - P1 de 2012

(I) VERDADE: temos que provar que $\langle A, B \rangle = tr\,(B^t A)$ é produto interno, usando as 4 propriedades

i) $\langle A, B \rangle = tr\, B^t A$

$\langle B, A \rangle = tr\, A^t \cdot B$

Como $tr\, C = tr\, C^t$ (transpor não altera a diagonal)

$$\underbrace{tr\,(B^t A) = tr\,(B^t A)^t = tr\,(A^t (B^t)^t) = tr\,(A^t B)}$$

Logo $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$

ii) $\langle A + A', B \rangle = tr\,(B^t (A + A')) = tr\,(B^t A + B^t A') = \underline{tr(B^t A) + tr(B^t A')}$

$\Rightarrow \langle A + A', B \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A', B \rangle$

iii) $\langle \lambda A, B \rangle = tr\,(B^t (\lambda A)) = tr\,[\lambda (B^t A)] = \underline{\lambda\, tr\,(B^t A)}$

$\Rightarrow \langle \lambda A, B \rangle = \lambda \langle A, B \rangle$

iv) $\langle A, A \rangle = tr(A^t \cdot A)$ = soma dos elementos de A ao quadrado

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \geq 0$$

o mais $\langle A, A \rangle = 0$ só se $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$

ou seja, para o elemento nulo

(II) FALSO: como P_n no caso $n = 4$ temos que usar no mínimo 5 pontos (ver definição do produto usual)

(III) FALSO: no caso o intervalo da integral deve ser o mesmo

(2)

15 - P1 de 2012

Lembre que: $\dim S + \dim S^\perp = \dim E = 4$ ($\mathbb{R}^4$)

Logo, se $\dim (S^\perp) = 1 \Rightarrow \dim (S) = 3$, então uma base de S m 3 elementos. Fazendo o processo de achar base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-a) \ (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Só tem 3 pivôs se $\boxed{a + b \neq 0}$

17 - P1 de 2012

Lembrando que $proj_S\, v = \dfrac{\langle e_1, v \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 + \dots + \dfrac{\langle e_n, v \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} \cdot e_n$

Vemos que a fórmula do enunciado é a da projeção para uma base onde $\langle e_1, e_1 \rangle = \dots = \langle e_n, e_n \rangle = 1$, ou seja, uma base ortonormal

R.: (C)

Q 16 - P2 de 2012

i) Verificando a base mais óbvia que é $\{1, t\}$ sei que é ortogonal pois:

$$\langle 1, t \rangle = 1(-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0$$ (usando fórmula dada)

ii) Aplico a fórmula:

$$\text{proj}_{P_1} v = \text{proj}_1 v + \text{proj}_t v = \frac{\langle 1, t^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 + \frac{\langle t, t^2 \rangle}{\langle t, t \rangle} \cdot t$$

$$\langle 1, t^2 \rangle = 1 \cdot (-1)^2 + 1 (0)^2 + 1 \cdot (1)^2 = 2$$
$$\langle 1, 1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$
$$\langle t, t^2 \rangle = (-1)(-1)^2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1^2 = 0$$

Logo: $\boxed{\text{proj}_{P_1} v = \frac{2}{3}}$ R.: (A)

Q 11 - P2 de 2012

i) A base dada é ortogonal pois, se $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ vemos que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

ii) Usando a fórmula: com $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{proj}_S C = \text{proj}_{v_1} C + \text{proj}_{v_2} C = \frac{\langle v_1, C \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle v_2, C \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

(*) $\langle v_1, C \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\rangle = a + d$

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2$$

$$\langle v_2, C \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\rangle = b - c$$

$$\langle v_2, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2$$

Enunciado

$$\text{proj}_S C = \frac{a+d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b-c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b-c \\ c-b & a+d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{a + d = 1}$ e $\boxed{c - b = 1}$

R.: (C)

VI - Funções Lineares

$E \xrightarrow{T} F$

Uma função T é uma operação que dado um vetor do domínio (E), fornece um vetor do contra-domínio (F)

Ex.: $T(x,y,z) = (x, x, y-z, z)$ é uma função $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

Para T ser uma função linear deve obedecer a:

i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

Esses são os 2 critérios que você deve usar para descobrir se uma função é linear. Além disso, servem de propriedade para funções lineares, de modo que:

$T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n)$ (IMPORTANTE)

Matriz de uma Função Linear: a toda função linear podemos associar uma matriz A de modo que

$$T(x) = A \cdot x$$

A é obtida colocando em cada coluna i $T(e_i)$, onde e_i é o i ésimo elemento da base canônica

Assim: dado A acho $T(e_1), \dots, T(e_n)$ vendo as colunas ou dado a formula de T calculo $T(e_1) \dots T(e_n)$ e monto A

Exemplo: Se $T(x,y,z) = (2x+y, z, 2z, x+y)$. Ache A

Calculo $T(e_1)$: $T(1,0,0) = (2,0,0,1)$

$T(e_2)$: $T(0,1,0) = (1,0,0,1)$

$T(e_3)$: $T(0,0,1) = (0,1,2,0)$

$$A = \begin{array}{ccc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Basicamente o que cai na prova de funções é sobre o núcleo e imagem de T, então preste atenção no que vem agora:

A) Núcleo ou Kernel, representado por Ker (T)

Contém os elementos do domínio para os quais $T(x) = 0$

$Ker(T) = \{ x \in E : T(x) = 0 \}$, se E for o domínio

Teorema: $\boxed{T \text{ é injetora} \Leftrightarrow Ker(T) = \{0\}}$ ou $\dim(Ker(T)) = 0$

B) Imagem, representado por Im (T)

Contém os elementos do contradomínio que são atingidos por T

Ou seja, $Im(T) = \{ y \in F : (\exists x \in E)\ T(x) = y \}$

Teorema: $\boxed{T \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow Im(T) = F \ / \ \dim(Im(T)) = \dim F}$

Obs: Se $E = [v_1, \dots, v_n]$, então, $Im(T) = [T(v_1), \dots, T(v_n)]$

Trabalhando com a matriz

- Achar base e/ou dimensão da IMAGEM
  - ↳ Escalonar a matriz e fazer o processo de achar base: vê onde tem pivôs e as colunas correspondentes formam base de Im (T)

- Achar base e/ou dimensão do KERNEL
  - ↳ uso a matriz já escalonada e resolvo o sistema: $A \cdot x = 0$

$$\left(\underbrace{A'}_{\text{escalonada}} \ \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right)$$

Desse modo achanei uma base do núcleo. Lembrando que o número de caras da base é a dimensão, tenei achado dim (Ker (T))

Teorema do Núcleo e da Imagem

$$\boxed{\underbrace{\dim(E)}_{\text{domínio}} = \dim Ker(T) + \dim Im(T)}$$

Ufa, acabou a teoria...

Exercícios Sugeridos $\begin{cases} P_1 \text{ de } 2011 - 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14 \\ P_1 \text{ de } 2012 - 2, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14 \end{cases}$

Q2 P1 de 2012:

Para T ser injetor $\dim(\ker(T)) = 0$. Pela formula

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

$$4 = 0 + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

Assim, ao escalonar a matriz, devo ter 4 pivôs para dim(Im) ser 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} (-a) \\ \\ (-c) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & c+d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b-a \neq 0 \\ c+d \neq 0 \end{matrix} \quad R: B$$

Q6 P1 de 2012: testar as propriedades

(I) FALSO: $T(u+v) = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + \underline{2\langle u,v \rangle} + \langle v,v \rangle$

$$\neq$$

$$T(u) + T(v) = \langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle$$

(II) VERDADEIRO i) $T(u+v) = \langle u+v, z \rangle = \underbrace{\langle u, z \rangle}_{T(u)} + \underbrace{\langle v, z \rangle}_{T(v)}$

$$\Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v)$$

ii) $T(\lambda u) = \langle \lambda u, z \rangle = \lambda \langle u, z \rangle = \lambda T(u)$

(III) VERDADEIRO:

Dica: proj é uma operação linear

i) $T(u+v) = (u+v) - \mathrm{proj}_s(u+v) = u+v - \mathrm{proj}_s u - \mathrm{proj}_s v$

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

ii) $T(\lambda u) = (\lambda u) - \mathrm{proj}_s(\lambda u) = \lambda u - \lambda\, \mathrm{proj}_s u = \lambda(u - \mathrm{proj}_s u)$

$$T(\lambda u) = \lambda T(u)$$

Q12 - P1 de 2012

Para montar a matriz: $T(e_1) = T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad T(e_3) = T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T(e_2) = T(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad T(e_4) = T(t^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pondo na matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (+1)(+1) \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo $\boxed{\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3}$, pelo teorema:

$$\dim E = \dim \ker + \dim \mathrm{Im}$$

$$4 = \dim \ker + 3$$

$$\therefore \boxed{\dim(\ker(T)) = 1} \quad \text{(c)}$$

Q13 - P1 de 2012

(I) VERDADE: Analisemos $\ker(T) + \mathrm{Im}(T)$

Mas, $\mathrm{Im}(T) = S$ (pois a projeção em $S \in S$)

e $\ker(T) = S^\perp$, pois ($\mathrm{proj}_S\, x = 0$, se $x \in S^\perp$)

Como: $S + S^\perp = V \Rightarrow \ker(T) + \mathrm{Im}(T) = V$

(II) FALSO: Como vimos $\ker(T) = S^\perp$ e $\mathrm{Im}(T) = S$, logo a intersecção é apenas $\{0\}$

(III) FALSO: $S + S^\perp = V$

Q14 - P1 de 2012

R.: d) Se C é LI, além disso é gerador de $\mathrm{Im}(T)$

(Já vimos que se Domínio $= [v_1, \dots, v_n] \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = [T(v_1), \dots, T(v_n)]$

Assim conclui que C é base da Imagem. Logo

$\dim(\mathrm{Im}(T)) = n$ (número de elementos da base)

Pelo teorema: $\dim V = \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(\ker(T))$

$$n = n + \dim(\ker(T))$$

$\dim(\ker(T)) = 0 \Rightarrow T$ é injetora

Q8 - P1 de 2012

Temos que montar a matriz : $\begin{array}{ccc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ \end{array}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

Para T ser sobrejetor, $\dim(Im(T)) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$
↳ contra-domínio

Assim ao escalonar tem que ter 3 pivôs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & -a \end{pmatrix} \begin{matrix} (-a) \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix} \begin{matrix} (-a) \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & +a \\ 0 & 0 & \boxed{a^2 - a} \end{pmatrix}$$

$a^2 - a \neq 0$

$a(a-1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{a \neq 0}$ e $\boxed{a \neq 1}$ R: (d)

Q9 - P1 de 2012

Montando a Matriz: $\begin{matrix} (-2) \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (+1) \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Assim: $Im(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$

Para achar o núcleo : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II \\ \\ \end{matrix}$

de I : $x_3 = -x_1$

de II : $x_2 = x_3$

$\Rightarrow \ker T = (x_1, -x_1, -x_1) = [(1,-1,-1$

$\ker T = [(1 - t - t^2)]$

R.: (D) Vendo as alternativas não tem uma que bata totalmente

Mas $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$, pois esses caras são combinação dos do outro grupo : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Q10 - P1 de 2012 : usar teorema do núcleo e imagem

(I) FALSO : se $\ker(T) = Im(T) \Rightarrow \dim(\ker(T)) = \dim(Im(T))$

$\dim(E) = \dim(Im(T)) + \dim(\ker(T))$

$7 = 2 \dim(\ker(T))$ ↳ IMPOSSÍVEL, pois dim é um número $\in \mathbb{N}$

(II) VERDADE : Analogamente : $8 = 2 \dim(\ker(T))$

$\dim(\ker(T)) = 4$ (POSSÍVEL)

$\therefore \dim(Im(T)) = \dim(\ker(T)) = 4$

(III) FALSO : injetor significa $\dim(\ker(T)) = 0$, logo $\dim E = \dim Im(T)$

Mas $\dim E = 6$ e $\dim(Im(T)) \leq 5$ (pois $Im(T) \subset P_4$)

Q4 - P1 de 2011

IMPORTANTE - operador linear não-nulo $\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(T)) > 0$

Como Im $\subset$ ker e são diferentes, concluo que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) > \dim \mathrm{Im}(T)$

→ Se $(\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$, pelo teorema: $\underset{4}{\dim E} = \dim \mathrm{Ker} + \underset{1}{\dim \mathrm{Im}}$

$\dim \mathrm{Ker} = 3$

→ Se $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, já dá ~~merda~~ errado pois $\dim \mathrm{Ker} = 2$

Mas vimos que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) > \dim \mathrm{Im}(T)$

Chegamos na resposta: $\dim \mathrm{Im} = 1$ e $\dim \mathrm{Ker} = 3$

R.: (B)

Q6 - P1 de 2011

d) FALSA, $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ gera a imagem, para gerar o contradomínio (V) teria que ser LI.

Q7 - P1 de 2011

O núcleo será constituído por x, tal que $\mathrm{proj}_W x = 0$

Ou seja x pertence a $W^\perp$

Achando $W^\perp$, $x = (a, b, c)$, $(a,b,c) \perp (1,-2,1)$

Logo $\langle (a,b,c), (1,-2,1) \rangle = 0$

$a - 2b + c = 0$

$c = 2b - a$

$W^\perp = a(1,0,-1) + b(0,1,2) = [(1,0,-1), (0,1,2)]$

R.: c) $[(3,2,1), (1,2,3)] = [(1,0,-1), (0,1,2)]$

pois $(3,2,1) = 3(1,0,-1) + 2(0,1,-1)$

$(1,2,3) = 1(1,0,-1) + 2(0,1,-1)$

Q9 - P1 de 2011

$\ker(T) = W^{\perp}$, $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim E = 3$

$\dim W^{\perp} = 3 - 2 = 1$

$\therefore \boxed{\dim \ker(T) = 1}$ R.: (B)

Q10 - P1 de 2011 : NÃO CAI (MUDANÇA DE BASE)

Q11 - P1 de 2011

Montando a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\times 2) & (-2) \end{matrix}$$

Escalonando: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim Im(T) = 2$

Pelo teorema: $\dim E = 2 + \dim \ker(T)$

$M_{BC}\, E = M_2$ $\therefore$ $4 = 2 + \dim \ker(T)$

$\boxed{\dim \ker(T) = 2}$

R.: (C)

Q14 - P1 de 2011

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (\times 1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Im(T) = [1 + 2t^3,\ t - t^2]$$

Achando núcleo: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1$ $\Rightarrow \ker(T) = (x_1, -x_1, -x_1)$

$x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = -x_1$ $\ker(T) = [(1, -1, -1)]$

R.: (B)

P1 - 2011 - MAT2458

Nesta prova, se V é um espaço vetorial, o vetor nulo de V será denotado por 0_V. Se $u_1, \ldots, u_n$ forem vetores de V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \ldots, u_n]$. Se V estiver munido de um produto interno e S for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $u \in V$ sobre S será denotada por $\text{proj}_S\, u$.

Q1. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, seja S um subespaço de V e seja $x \in V$. Sabendo que $x = 8u - 7v$, com $v \in S$ e $u \in S^\perp$, podemos afirmar que o vetor de S mais próximo de x é

(a) u.
(b) $-7v$.
(c) $7v$.
(d) $\text{proj}_{[u]}\, x$.
(e) v.

Q2. Dado um número $a \in \mathbb{R}$, considere o subespaço $S = [(1, a, 0), (0, 1, a), (a, 1, 0)]$ de $\mathbb{R}^3$. Se $\mathbb{R}^3$ está munido do produto interno usual, dizemos que a é admissível para S se, e somente se, $\dim(S^\perp) = 1$. Então, podemos afirmar que a soma de todos os números admissíveis para S é igual a

(a) 0.
(b) 2.
(c) -2.
(d) 1.
(e) -1.

Q3. Considere o subespaço $S = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$ de $\mathbb{R}^4$ e seja $u \in \mathbb{R}^4$. Sabendo que, com respeito ao produto interno usual, $\text{proj}_S\, u = (1, 0, 0, 1)$, podemos afirmar que

(a) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (a, 1, -1, a)$.
(b) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (1, a, a, -1)$.
(c) $u = (1, 0, 0, 1)$.
(d) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (1, a, -a, 1)$.
(e) existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = (a, 1, 1, -a)$.

Q4. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear não nulo que satisfaz $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T) \neq \mathrm{Ker}(T)$.

Considere as seguintes afirmações:

(I) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

(II) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$.

(III) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.

(b) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.

(c) Apenas a afirmação (III) é falsa.

(d) Todas as três afirmações são falsas.

(e) Apenas a afirmação (I) é falsa.

Q5. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Assinale a afirmação verdadeira.

(a) Se $u, v \in V$ são tais que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, então $\|u\| = \|v\|$.

(b) Se $u, v \in V$ são tais que $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda u$.

(c) Para todos $u, v \in V$, $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ se, e somente se, $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$.

(d) Se S é um subespaço de V com base $\{u_1, \ldots, u_m\}$ e $v \in V$, então $\mathrm{proj}_S\, v = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{proj}_{[u_j]}\, v$.

(e) Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V e $u \in V$ é um vetor que satisfaz $\langle u, e_j\rangle = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então $u = 0_V$.

Q6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ uma transformação linear. Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores de V. Assinale a alternativa **FALSA**.

(a) T é sobrejetora se, e somente se, T é injetora.

(b) Se T é sobrejetora, então $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$.

(c) Se $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de V, então $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$.

(d) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de V, então $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma base de V.

(e) Se $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$, então T é sobrejetora.

Q7. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o subespaço $W = [(1, -2, 1)]$ de $\mathbb{R}^3$. Então podemos afirmar que o núcleo de T é

(a) $[(2, 1, 0), (1, 1, 2)]$.

(b) $\{(0, 0, 0)\}$.

(c) $[(3, 2, 1), (1, 2, 3)]$.

(d) $[(1, -2, 1)]$.

(e) $[(1, 1, 1), (2, 2, 2)]$.

Q8. Em $P_3(\mathbb{R})$, com o produto interno definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, seja $f(t) = a + bt$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, o polinômio de grau menor ou igual a 1 mais próximo de $g(t) = t^3$. Então, $a + b$ é igual a

(a) $\dfrac{7}{10}$.

(b) 1.

(c) $\dfrac{4}{5}$.

(d) $\dfrac{11}{10}$.

(e) $\dfrac{1}{2}$.

Q9. Considere o subespaço $W = [(1,0,1),(2,0,-1)]$ de $\mathbb{R}^3$ e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(u) = \mathrm{proj}_W\, u$, com respeito ao produto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correta.

(a) T é injetora, mas não invertível.
(b) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.
(c) T é invertível.
(d) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$.
(e) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

Q10. Seja $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear que satisfaz

$$T(t - t^2) = t + t^2, \quad T(1+t) = 1 + t^2 \quad \text{e} \quad T(t + t^2) = 1 + t + 2t^2.$$

Então, podemos afirmar que

(a) $\{1 + t - 2t^2\}$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T)$.
(b) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.
(c) $\{1 + t + 2t^2\}$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T)$.
(d) $\{1 + t, t + t^2\}$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T)$.
(e) $\{t - t^2, t + t^2\}$ é uma base de $\mathrm{Ker}(T)$.

Q11. Seja $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 - 2t + 2t^2, \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3t,$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 + 2t - 2t^2, \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + t + 2t^2.$$

Assinale a afirmação verdadeira.

(a) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.
(b) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 3$.
(c) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$.
(d) T é injetora.
(e) $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \dim(\mathrm{Ker}(T))$.

Q12. Considere as bases $B = \{1, t, t^2\}$ e $C = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear satisfazendo as seguintes condições:

(i) as coordenadas de $T(1)$ na base C são $(0,0,0)$,
(ii) as coordenadas de $T(t)$ na base C são $(1,0,0)$ e
(iii) as coordenadas de $T(t^2)$ na base C são $(0,1,0)$.

Assinale a afirmação **FALSA**.

(a) $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 1$.
(b) $T(t - t^2) = (0,0,1)$.
(c) T não é invertível.
(d) $\{T(1), T(t), T(t^2)\}$ é linearmente dependente.
(e) $\mathrm{Im}(T) = [(1,0,0), (0,1,0)]$.

Q13. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, seja S um subespaço de V e sejam $u, v \in V$ vetores que satisfazem $u + v \in S$ e $u - v \in S^{\perp}$. Podemos, então, afirmar que

(a) $\langle u, v\rangle = \|v\|$.
(b) $\langle u, v\rangle = \|u\|$.
(c) $\|u\| = \|v\|$.
(d) $\{u, v\}$ é linearmente dependente.
(e) $\langle u, v\rangle = 0$.

Q14. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = 1+2t^3$, $T(0,1,0) = t - t^2$ e $T(0,0,1) = 1 - t + t^2 + 2t^3$. Então, podemos afirmar que

(a) $\mathrm{Ker}(T) = [(2,-2,-2)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + 2t^3, t + t^2]$.
(b) $\mathrm{Ker}(T) = [(3,-3,-3)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [2 + 4t^3, 1 - t + t^2 + 2t^3]$.
(c) $\mathrm{Ker}(T) = [(3,3,-3)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [t - t^2, 1 - t + t^2 + 2t^3]$.
(d) $\mathrm{Ker}(T) = [(1,-1,1)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [1 + 2t^3, t - t^2]$.
(e) $\mathrm{Ker}(T) = [(2,2,2)]$ e $\mathrm{Im}(T) = [2 + 4t^3, 1 - t + t^2 + 2t^3]$.

Q15. Seja V um espaço vetorial com produto interno e sejam S e W subespaços de V. Assinale a afirmação **FALSA**.

(a) Se $u \in S$, $v \in S^{\perp}$ e $u + v = 0_V$, então $u = v = 0_V$.

(b) Se $S \subset W$, então $W^{\perp} \subset S^{\perp}$.

(c) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base ortogonal de V, então $v = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{proj}_{[u_j]} v$, para todo $v \in V$.

(d) Se $S \subset W$, então $S^{\perp} \subset W^{\perp}$.

(e) Se $A = \{u_1, \ldots, u_p\} \subset S$, $B = \{v_1, \ldots, v_q\} \subset S^{\perp}$ e A e B são linearmente independentes, então $A \cup B$ é linearmente independente.

Q16. Assinale a afirmação verdadeira.

(a) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

(b) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, T é um operador linear de V e $\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0_V\}$, então $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(c) A função $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ definida por $T(p) = p'$, onde p' denota a derivada de p, é uma transformação linear sobrejetora.

(d) Existe uma transformação linear invertível $T\colon M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to P_6(\mathbb{R})$.

(e) Se U e V são espaços vetoriais de dimensão finita com $\dim(U) \leq \dim(V)$ e $T\colon U \to V$ é uma transformação linear, então T é injetora.

P1 - 2012 - MAT 2451

Nesta prova, se V denota um espaço vetorial, o vetor nulo de V é denotado por 0_V. O subespaço de V gerado pelos vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ é denotado por $[v_1, \ldots, v_n]$. Se o espaço vetorial V está munido de um produto interno e S é um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $v \in V$ sobre S é denotada por $\text{proj}_S\, v$. Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz $n \times n$ então o traço de A é definido por $\text{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Q1. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se $S = [1-t, 1-t^2] \subset P_2(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha - \beta t + t^2 \in S^\perp$ se e somente se:

(a) $\alpha = -2$ e $\beta = 2$;
(b) $\alpha = 0$ e $\beta = 0$;
(c) $\alpha = 0$ e $\beta = 2$;
(d) $\alpha = 2$ e $\beta = -2$;
(e) $\alpha = 0$ e $\beta = -2$.

Q2. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $T : M_{4\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ o operador linear definido por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que T é injetor se e somente se:

(a) $a \neq -b$ e $c \neq d$;
(b) $a \neq b$ e $c \neq -d$;
(c) $a \neq b$ ou $c \neq -d$;
(d) $a \neq -b$ ou $c \neq d$;
(e) $a \neq b$ e $c \neq d$.

Q3. Considere as seguintes afirmações:

(I) a igualdade:

$$\langle A, B\rangle = \text{tr}(B^t A), \quad A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

define um produto interno em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$;

(II) dados $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$, com $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, vale que a igualdade:

$$\langle p, q\rangle = p(t_1)q(t_1) + p(t_2)q(t_2) + p(t_3)q(t_3) + p(t_4)q(t_4), \quad p, q \in P_4(\mathbb{R})$$

define um produto interno em $P_4(\mathbb{R})$;

(III) a igualdade:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \quad f, g \in C([0, 2]).$$

define um produto interno em $C([0, 2])$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q4. Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para todos $u, v \in V$, vale que:

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff |\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|;$$

(II) para todos $u, v \in V$, vale que:

$$\|u + v\| = \|u - v\| \iff \langle u, v\rangle = 0;$$

(III) para todos $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se $v = \lambda u$ então $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q5. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno canônico. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = [(1, a, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, b, 1)].$$

Pode-se afirmar que $\dim(S^{\perp}) = 1$ se e somente se:

(a) $a - b \neq 0$;
(b) $a + b = 0$;
(c) $a + b \neq 0$;
(d) $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
(e) $a - b = 0$.

Q6. Seja V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam S um subespaço de V e $z \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) a transformação $T : V \to \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \langle v, v \rangle$, para todo $v \in V$, é linear;
(II) a transformação $T : V \to \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \langle v, z \rangle$, para todo $v \in V$, é linear;
(III) a transformação $T : V \to V$ definida por $T(v) = v - \text{proj}_S\, v$, para todo $v \in V$, é linear.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q7. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto ortogonal, onde $e_1, \ldots, e_n$ são vetores não nulos e distintos de V. Pode-se afirmar que:

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n, \quad \text{para todo } v \in V,$$

se e somente se:

(a) $\mathcal{B}$ é uma base ortogonal de V;
(b) $\mathcal{B}$ gera V;
(c) $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V;
(d) $\dim(V) = n$;
(e) $\mathcal{B}$ é uma base de V.

Q8. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o único operador linear tal que:

$$T(1,0,0) = (1, a, 0), \quad T(0,1,0) = (0, 1, a), \quad T(0,0,1) = (1, 0, -a).$$

Temos que T é sobrejetor se e somente se:

(a) $a \neq -1$, $a \neq 0$ e $a \neq 1$;
(b) $a \neq 0$ e $a \neq -1$;
(c) $a \neq 0$ ou $a \neq 1$;
(d) $a \neq 0$ e $a \neq 1$;
(e) $a \neq 0$ ou $a \neq -1$.

Q9. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a única transformação linear tal que:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\text{Ker}(T) = [1 + t - t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(b) $\text{Ker}(T) = [1 - t + t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(c) $\text{Ker}(T) = [1 - t - t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(d) $\text{Ker}(T) = [-1 + t + t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(e) $\text{Ker}(T) = [-1 - t + t^2]$ e $\text{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$.

Q10. Considere as seguintes afirmações:

(I) se E é um espaço vetorial de dimensão 7 então existe um operador linear $T : E \to E$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$;
(II) se E é um espaço vetorial de dimensão 8 então existe um operador linear $T : E \to E$ tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$;
(III) existe uma transformação linear injetora $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
(c) apenas a afirmação (III) é falsa;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.

Q11. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Seja S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se a projeção ortogonal de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sobre S é igual a $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pode-se afirmar que:

(a) $a - d - 1 = 0$ e $b - c - 1 = 0$;
(b) $a + d - 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$;
(c) $a + d - 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$;
(d) $a + d + 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$;
(e) $a + d + 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$.

Q12. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2$ e $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$;
(b) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 3$ e $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 1$;
(c) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$ e $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3$;
(d) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 0$ e $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 4$;
(e) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2$ e $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$.

Q13. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Seja S um subespaço de V de dimensão finita e considere o operador linear $T : V \to V$ definido por $T(v) = \operatorname{proj}_S v$, para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) ocorre necessariamente que $V = \operatorname{Ker}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)$;
(II) ocorre necessariamente que $V = \operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T)$, mas pode ocorrer que $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) \neq \{0_V\}$;
(III) ocorre necessariamente que $\operatorname{Ker}(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{0_V\}$, mas pode ocorrer que $V \neq \operatorname{Ker}(T) + \operatorname{Im}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) todas as afirmações são falsas.

Q14. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $T : U \to V$ uma transformação linear. Seja:

$$\mathcal{C} = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$$

e assuma que os vetores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ sejam distintos. Assinale a alternativa correta:

(a) se $\mathcal{C}$ é linearmente independente então T é sobrejetora;
(b) se T é sobrejetora então $\mathcal{C}$ é uma base de V;
(c) se T é injetora então $\mathcal{C}$ é uma base de V;
(d) se $\mathcal{C}$ é linearmente independente então T é injetora;
(e) $\mathcal{C}$ é um conjunto gerador de V, possivelmente linearmente dependente.

Q15. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^6$ munido do produto interno canônico. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^6$ definido por:

$$S = \{(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 : a + b + c = 0,\ d + e - f = 0\}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) $S^\perp = \{(x, x, x, -y, -y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
(b) $S^\perp = \{(x, x, x, -y, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
(c) $S^\perp = \{(x, x, x, -y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
(d) $S^\perp = \{(-x, x, -x, y, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
(e) $S^\perp = \{(x, x, x, y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Q16. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $u(t) = a + bt$ é o polinômio de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $v(t) = t^2$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{2}{3}$;

(b) $-\frac{1}{3}$;

(c) 0;

(d) $-\frac{2}{3}$;

(e) $\frac{1}{3}$.