RESUMO ALGELIN P1 2014, Por Arthur Salles

R$ 2,70.

I - Os vetores

" - Filhinho por que está chorando?
- Mamãe o professor falou que existem infinitas dimensões. Não consigo mais dormir "

Em Casa de um Politécnico

Até agora, vimos vetores como grupinhos de números que indicam uma posição ou uma direção no espaço. No entanto, um vetor de forma geral é um conjuntinho de números, por exemplo:

- $(1, 1, 2, 3, 2)$ é um vetor de $\mathbb{R}^5$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ é um vetor de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
- $2x^2 + x - 3$ é um vetor de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Já expliquei o que são esses símbolos

Dica: não tente pensar geometricamente um vetor assim, não é saudável

II - Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial é um conjunto de vetores que tem certas propriedades.

Por exemplo $\mathbb{R}^4$ (vetores na forma (a_1, a_2, a_3, a_4), $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$) com soma e produto por escalar usuais é um espaço vetorial

Será dado sempre um grupo de vetores (E) e a forma de somá-los e multiplicá-los por escalar

Alguns grupos são
- $\mathbb{R}^n$: n-uplas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$
- $M_{p\times n}(\mathbb{R})$: matrizes $p \times n$ com entradas reais
- $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$: polinômios de grau até n

Para saber se é ou não espaço vetorial, devemos testar com vetores genéricos:

SOMA $+ : E \times E \mapsto E$, $(x,y) \mapsto x+y$	PRODUTO POR ESCALAR: $\cdot : \mathbb{R} \times E \mapsto E$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$
1) $x + y = y + x$	5) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
2) $(x+y) + z = x + (y+z)$	6) $1 \cdot x = x$
3) $\exists\, 0 \in E$ tal que $x + 0 = x$ ↳ elemento nulo (não precisa ser 0)	7) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
4) $\forall x \in E$, $\exists (-x) \in E$ tal que $x + (-x) = 0$	8) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

Se uma der errado, o espaço não é vetorial. Se todas derem certo, $(E,+,\cdot)$ é espaço vetorial.

Obs: nunca vi cair em prova, por isso não fará exercício, mas vejam os primeiros da lista 1.

Obs 2: ainda assim, é importante conhecer as operações usuais de cada grupo de vetores. Junto com as operações usuais, o conjunto formará sempre um espaço vetorial

A) $\mathbb{R}^n$:

- SOMA: $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$
- PRODUTO POR ESCALAR: $\alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

B) $M_{p \times m}$: similar a $\mathbb{R}^n$

- SOMA: somo elementos nas posições correspondentes
- PRODUTO POR ESCALAR: multiplico todas entradas por α

C) $P_n(\mathbb{R})$

- SOMA: sendo $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n$,
  $q = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots + \beta_n t^n$,
  $(p+q)(t) = (\alpha_0+\beta_0) + (\alpha_1+\beta_1)t + \dots + (\alpha_n+\beta_n)t^n$
- PRODUTO POR ESCALAR
  $(\lambda p)(t) = \lambda\alpha_0 + (\lambda\alpha_1)t + \dots + (\lambda\alpha_n)t^n$

III - Subespaços

Subespaços vetoriais ou, para os mais íntimos, subespaços são subconjuntos de um espaço vetorial.

Por exemplo: $S = \{p \in P_2(\mathbb{R}) \,/\, p(1) = 0\}$ são todos polinômios do espaço vetorial P_2 que dão 0 calculados em $t=1$.

Para S ser um subespaço de E ($S < E$, em matemátiquês) temos que:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ 0 \in S \\ 2)\ \text{Dado } x, y \in S \Rightarrow (x+y) \in S \\ 3)\ \text{Dado } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } x \in S \Rightarrow (\lambda x) \in S \end{array}}$$

Nesse caso, $(S,+,\cdot)$ é um espaço vetorial contido em E.

Obs: usaremos com subespaço as operações usuais. Nesse caso, o elemento nulo (0) é de fato composto de zeros

- para $\mathbb{R}^n$, $0 = (0, 0, \dots, 0)$
- para $M_{p \times n}(\mathbb{R})$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- para $P_n(\mathbb{R})$, $0 = 0$ ← polinômio nulo

<u>Exemplos</u>:

(1) $S = \{ x \in P(\mathbb{R}) : x(-1) = 0 \}$, $E = P(\mathbb{R})$ com operações usuais

↑ esse é o conjunto dos polinômios de todos graus

Testaremos se valem as três proposições:

1) $0 \in S$? SIM, pois $0(-1) = 0$ (o polinômio nulo da 0 em qualquer ponto)

2) $x, y \in S$. $(x+y) \in S$?

SIM, pois $(x+y)(-1) = x(-1) + y(-1) = 0 + 0 = 0$

pois $x \in S$ logo $x(-1) = 0$ e $y \in S$, logo $y(-1) = 0$

Como $(x+y)(-1) = 0$, $(x+y) \in S$

3) $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in S$. $(\lambda x) \in S$?

SIM, pois $(\lambda x)(-1) = \lambda \cdot x(-1) = \lambda \cdot 0 = 0$

Como $(\lambda x)(-1) = 0$, $(\lambda x) \in S$

Resposta: S é um subespaço de E

(2) $E = M_n(\mathbb{R})$ ← matrizes $n \times n$

$S = \{ x \in M_n(\mathbb{R}) : x^t = -x \}$

1) $0 \in S$? SIM pois $0^t = 0 = -0$ (todas dão a matriz nula)

2) $x, y \in S$. $(x+y) \in S$? SIM, pois $(x+y)^t = x^t + y^t = -x + (-y)$

$(x+y)^t = -(x+y)$ ✓

3) $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in S$. $(\lambda x) \in S$? SIM, pois $(\lambda x)^t = \lambda \cdot x^t = \lambda(-x)$

$(\lambda x)^t = -(\lambda x)$ ✓

IV - Intersecção, União e Soma de subespaços

i) A intersecção de dois subespaços S_1 e S_2, representada por $S_1 \cap S_2$, é um subespaço.

$$S_1 < E \quad e \quad S_2 < E \Rightarrow S_1 \cap S_2 < E$$

ii) Por outro lado a união de dois subespaços $(S_1 \cup S_2)$ não é um geral, um subespaço

Exemplo: $E = \mathbb{R}^2$; S_1 = eixo Ox $= \{(\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$; S_2 = eixo Oy $= \{(0, \beta), \beta \in \mathbb{R}\}$

tomando $x = (1,0) \in S_1$ e $y = (0,1) \in S_2$, ou seja, x e y pertencem a $S_1 \cup S_2$, $x + y = (1,1) \notin S_1 \cup S_2$. Isso prova que neste caso a união não é subespaço.

Obs: $S_1 \cup S_2$ é subespaço se $S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$.

iii) Introduz-se então um novo subespaço que contém todas as somas de elementos de S_1 e S_2. Esse é a soma dos subespaços, representado por $S_1 + S_2$.

Em matematiquês: $S_1 < E$ e $S_2 < E$

$$\boxed{S_1 + S_2 = \{x + y \in E, x \in S_1, y \in S_2\}}$$

Obs: Se $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, dizemos que $S_1 + S_2$ é soma direta de S_1 e S_2.

É fácil ver que $S_1 + S_2$ é subespaço de E.

✓ ① $0 \in S_1 + S_2$, pois $0 \in S_1$ e $0 \in S_2$

Logo $0 = \underset{S_1}{0} + \underset{S_2}{0} \in S_1 + S_2$

✓ ② $z_1, z_2 \in S_1 + S_2$

Se $z_1 \in S_1 + S_2$, $z_1 = x_1 + y_1$ com $x_1 \in S_1$ e $y_1 \in S_2$

Se $z_2 \in S_1 + S_2$, $z_2 = x_2 + y_2$ com $x_2 \in S_1$ e $y_2 \in S_2$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in S_1} + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in S_2} \in S_1 + S_2$$

✓ ③ $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in S_1 + S_2$

Se $z \in S_1 + S_2$, $z = x + y$ com $x \in S_1$ e $y \in S_2$

$$\Rightarrow \lambda z = \underset{\in S_1}{(\lambda x)} + \underset{\in S_2}{(\lambda y)} \in S_1 + S_2$$

II - Combinação Linear e Conjunto de geradores

Um vetor x é <u>combinação linear</u> de outros vetores $y_1, y_2, \dots, y_p$ se existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tal que:

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p$$

<u>Exemplos</u>

① Em $\mathbb{R}^n$, sendo $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$, $\dots$, $e_n = (0,0,\dots,1)$

Todo vetor de $\mathbb{R}^n$ é combinação linear de $e_1, e_2, \dots, e_n$ pois

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1(1,0,\dots,0) + \alpha_2(0,1,\dots,0) + \dots + \alpha_n(0,0,\dots,1)$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

② Seja $E = F(\mathbb{R})$ (conjunto de todas funções reais)

e $S = C(\mathbb{R})$ (conjunto de toda funções reais contínuas)

Tomemos $y_1 = \cos 2t$, $y_2 = 1$ e $x = \cos^2 t$. $(x, y_1, y_2 \in S)$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(\cos 2t) = \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 \therefore x \text{ é combinação linear de } y_1 \text{ e } y_2.$$

Dados alguns vetores $u_1, \dots, u_n$, representamos como $[u_1, \dots, u_n]$ o conjunto dos vetores que são combinação linear de $u_1, \dots, u_n$

<u>Proposição</u>: $[u_1, \dots, u_n]$ é um subespaço e chamamos de <u>subespaço gerado</u> por $u_1, \dots, u_n$

<u>Proposição</u>: em alguns exercícios, chegaremos em respostas na forma $[u_1, \dots, u_n]$ que não estão no gabarito. Aí vem a pergunta como ver quando dois subespaços gerados são iguais?

$[u_1, \dots, u_n] = [v_1, \dots, v_p]$ se, e somente se, todos u_i são combinação linear de $v_1, \dots, v_p$ <u>e</u> se todos v_i são combinação linear de $u_1, \dots, u_n$

CONJUNTO DE GERADORES

$\{u_1, \dots, u_n\}$ é um <u>conjunto de geradores</u> de um subespaço S ($S < E$) se, e somente se, $\boxed{S = [u_1, \dots, u_n]}$

Ou seja: i) Todo elemento de S está em $[u_1, \dots, u_n]$

$\hookrightarrow S \subset [u_1, \dots, u_n] \Rightarrow \forall x \in S, \; x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

ii) Todo elemento de $[u_1, \dots, u_n]$ está em S

$\hookrightarrow$ Basta ver que $u_1, \dots, u_n \in S$

<u>Exemplo</u>:

① $u_1 = (1,1,0)$
$u_2 = (0,1,0)$
$u_3 = (0,0,1)$

$S = \{(\alpha, \beta, 0) ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ não gera S, pois $u_3 \notin S$

② $E = M_2(\mathbb{R})$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é um conjunto gerador de E

③ Veremos um método para achar geradores
- 1° escrever um elemento genérico
- 2° aplicar propriedades e isolar algumas variáveis
- 3° separar variáveis livres
- 4° Os vetores que sobram são geradores

Seja $E = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{x \in P_3(\mathbb{R}) : x(1) = 0 \text{ e } x(-1) = 0\}$

i) Escrevo um x genérico: $x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$

ii) Aplico as propriedades de S: $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ e $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$

iii) Resolvendo: $\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$

$+ \; 2\alpha_0 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_0$

voltando, $\alpha_0 + \alpha_1 + (-\alpha_0) + \alpha_3 = 0$

$\alpha_3 = -\alpha_1$

ir) Assim o vetor $x \in S$ fica:

$x = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$

$x = \alpha_0 + \alpha_1 t - \alpha_0 t^2 - \alpha_1 t^3$

$x = \alpha_0 (1 - t^2) + \alpha_1 (t - t^3)$ ← separa variáveis

GERADORES

$$\boxed{S = [1 - t^2, t - t^3]}$$

<u>Proposição</u>: se tenho os geradores de S_1 e de S_2 e juntá-los, teneis geradores de $S_1 + S_2$

$S_1 = [u_1, \dots, u_n] \Rightarrow S_1 + S_2 = [u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p]$

$S_2 = [v_1, \dots, v_n]$ — —

V - Dependência Linear

Seja $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vetores de E. Consideremos a equação

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ (★)

(1) Se (★) tem uma <u>única solução</u> ($\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$) dizemos que A é <u>linearmente independente</u> (LI)

(2) Se (★) tem <u>pelo menos duas soluções</u> dizemos que A <u>linearmente dependente</u> (LD)

Ou de outra forma se um dos u_i é combinação linear dos demais, A é LD.

Proposições

(1) Se A é LI e tirarmos elementos de A, continua LI

(2) Se A é LD e acrescentarmos elementos em A, continua LD.

(3) Se $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ é LI e tomarmos $v \notin [u_1, \dots, u_n]$, ou seja v não é combinação linear de $u_1, \dots, u_n$, $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ ainda é LI.

Ou seja, podemos "engordar" um conjunto LI de modo a mantê-lo LI, desde que existam elementos do espaço fora de $[u_1, \dots, u_n]$

VI - Base e Coordenadas

Definição: $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base de E se:

→ B é conjunto gerador de E. (todo elemento de E é combinação linear de B).

→ B é Linearmente Independente (LI)

Dada uma base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, podemos escrever qualquer vetor de E como: $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Nesse caso, dizemos que $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B$ e $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ são as <u>coordenadas</u> do vetor x na base B.

<u>Exemplo</u>: Q2 P3 2011. Considere a base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ se (a, b, c, d) são as coordenadas de $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ na base B, calcule a, b, c, d.

Se $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = (a, b, c, d)_B \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

olhando pra cada entrada
$$\begin{cases} -3 = a - b + c + d \\ 1 = a + b + c + d \\ 6 = a + b \quad + d \\ 5 = a + b \end{cases}$$

Resolvendo: $\boxed{a = 3, \ b = 2, \ c = -5 \quad d = 1}$

VIII - Base e Dimensão

Teorema: se um espaço vetorial é gerado por "p" vetores : $V = [v_1, \dots, v_p]$
Um conjunto LI de V possuirá no máximo p elementos

Consequência: Duas bases de um espaço têm sempre o mesmo número de vetores

Definição: Se V tem uma base com n elementos, dizemos que n é a dimensão de V.

$$\boxed{n = \dim V}$$

Exemplos ① $\dim \mathbb{R}^n = n$, pois uma base de $\mathbb{R}^n$ tem n vetores, por exemplo:
$B = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$, $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$ ... $e_n = (0,0,\dots,1)$

② $\dim P_n(\mathbb{R}) = n+1$, pois uma base é $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
↳ $n+1$ elementos

③ $\dim M_{n \times m}(\mathbb{R}) = m \times n$

Conclusão: se eu consegui encontrar uma base do espaço (ou do subespaço), saberei a dimensão pelo número de vetores da base

---

Dica: uma forma possível de determinar dimensão é ver o número de variáveis livres do subespaço

$$\boxed{\#\text{ variáveis livres} = \dim S}$$

Por exemplo $S = \{X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & b \\ a & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Nesse caso S tem três variáveis livres (a, b e c). Logo $\dim S = 3$

Outra forma de ver isso seria achar uma base, o que pode ser feito isolando o que tem em cada variável:

$$X = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é base de S

Note que B tem 3 elementos e $\dim S = 3$

Outro exemplo: $S = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \,/\, p(1)=0\}$. Qual a dimensão de S

Escrevemos um vetor genérico do espaço: $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e vemos a condição:

$$p(1) = a + b + c + d = 0$$

Daí podemos tirar uma variável dependente: $d = -a - b - c$

Ficando: $p \in S \rightarrow p = ax^3 + bx^2 + cx + (-a-b-c)$

Logo $\boxed{\dim S = 3}$, pois tem três variáveis livres (a, b, c)

Obs: se quiser uma base, separa variáveis:

$$p = a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1)$$

base de S

IX - Métodos Práticos

(A) Tirar uma base de um conjunto de geradores

- Teoria: Se $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ é um conjunto gerador de um subespaço S ($S = [u_1, \dots, u_n]$) temos 2 opções
  1) A é LI $\rightarrow$ Logo A é base de S
  2) A é LD $\rightarrow$ Nesse caso, é possível tirar alguns elementos de A de forma a restar uma base de A. Como se faz? Veja a seguir

- Prática:

RECEITA	EXEMPLO: Ache uma base de $S = [(2,1,2,1), (2,0,0,-1), (6,4,8,5)]$
1) Ponha em uma matriz cada vetor numa coluna	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
2) Escalone	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\times 2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3) Marque os pivôs e veja em que colunas estão	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4) Pegue na original os vetores nestas colunas. Eles são uma base	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\{(2,1,2,1), (2,0,0,-1)\}$ é base de S

No exemplo, concluímos que a dimensão de S é 2, pois uma base de S tem 2 elementos.

<u>Observação</u>: uma forma diferente de definir base é: $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de S se, e somente se:

1) $n = \dim S$
2) $\{u_1, \dots, u_n\}$ é LI.

(B) Acrescentar vetores a um conjunto LI para ter base do espaço

Se temos um conjunto $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ LI e queremos encontrar uma base do espaço V que contenha esses vetores, fazemos:

RECEITA	EXEMPLO P3 2012: $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (1,2,2,2,1)$, $v_3 = (1,2,3,2,-1)$. Encontre v_4 e v_5 tal que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ seja base de $\mathbb{R}^5$
1) Ponha os vetores em linhas numa matriz	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
2) Escalone	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \downarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
3) Localize os pivôs e as colunas em que falta pivô	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Faltam pivôs na 2ª e na 4ª linha
4) Os vetores a serem acrescentados devem ter esses pivôs	Acrescenta algo como $(0,1,-,-,-)$ e $(0,0,0,1,-)$ ← pode não ser 1. só não ser nulo Ex.: $v_4 = (0,1,1,1,2)$ e $v_5 = (0,0,0,1,-1)$

Para continuar a matéria, usaremos parte do resumo da P1 de 2013 (até a página 6).

RESUMO - ALGELIN 2 P1 - FUJA DO NABO, por Arthur Salles
+ Provas Corrigidas

I - Revisão: Achar dimensão e base de subespaço

Dado um subespaço, como "aprendemos" para a P3 de Algelin 1 temos dois jeitos de achar dimensão:

1) Número de variáveis livres = dim

Exemplo • $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & b \\ a & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ tem dimensão 3

•• $S = \{ p \in P_3(\mathbb{R}) \ / \ p(1) = 0 \}$

Nesse caso escreve um elemento genérico: $p = a + bx + cx^2 + dx^3$

E aplica a condição: $p(1) = a + b + c + d = 0$

$d = -a - b - c$

Logo $p = a + bx + cx^2 + (-a-b-c)x^3$ e a dimensão é três (tinha as variáveis livres a, b e c)

* Para achar base: isolar o que tem em cada variável

• $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

base de S

•• $a(1 - x^3) + b(x - x^3) + c(x^2 - x^3)$

base de S

2) Número de elementos da base = dim

Usa quando o enunciado nos diz que $S = [v_1, \dots, v_n]$ ou seja, S é gerado por $v_1, \dots, v_n$.

Para achar uma base, ponho cada vetor $(v_1, \dots, v_n)$ numa coluna, escalono; vejo os pivôs e pego os vetores das colunas do pivô.

(Se você não entendeu a aplicação, vire a página e veja um exemplo)

Exemplo

$S = [1+x^2,\ 2+x-x^3,\ -x+2x^2+x^3,\ 1+3x^2+2x^3]$

- Transforme em vetor (na base $\{1, x, x^2, x^3\}$) $\quad S = [(1,0,1,0), (2,1,0,-1), (0,-1,2,1), (1,0,3,2)]$

+ Ponha cada um numa coluna

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \xrightarrow{\text{Escalonar}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (\times 1)\ (\times 2) \\ \\ \end{array}$$

+ Escalone

→ Marque os pivôs e veja as colunas que têm pivô ⇒ formam base

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Conclusão $\quad B = \{(1,0,1,0), (2,1,0,-1), (1,0,3,2)\}$ é base de S

Logo $\dim S = 3$ (3 cores na base)

II - Soma de Subespaços

$S_1 + S_2$ é a soma dos subespaços S_1 e S_2, nele estão contidos todos vetores que são combinações lineares de elementos de S_1 e S_2

Matematicamente falando: $S_1 + S_2 = \{U = U_1 + U_2 \in E,\ U_1 \in S_1,\ U_2 \in S_2\}$

Como achar uma base (e portanto a dimensão) de $S_1 + S_2$?

- Dados os geradores de S_1 e S_2 sei que se juntar vai ser gerador de $S_1 + S_2$

  (Se B_1 é base de S_1 e B_2 base de S_2 → $B_1 \cup B_2$ gera $S_1 + S_2$)

Porém, não sei se ao juntar se forma base, pois pode ser um conjunto LD

(Logo $B_1 \cup B_2$ pode não ser base. Só será se for LI)

Para achar a base faz o processo de por em colunas e escalonar

Exemplo - Q13 da P3 de 2011

$U = [(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)]$

$T = [(1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,-1,1)]$

Juntando, sei que: $U+T = [(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,-1,1)]$

Por na matriz para achar base:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Já está escalonado e tem pivô na 1ª, 2ª, 3ª e 5ª colunas

Logo: $\boxed{\dim U+T = 4}$, pois a base de $U+T$ tem 4 elementos a saber $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,1,1)\}$

Voltando à teoria, muitas vezes queremos descobrir a dimensão da intersecção, então usamos a fórmula:

$$\boxed{\dim(S_1+S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)}$$

No caso do exemplo anterior, usando a fórmula:

$$4 = 3 + 3 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

$$\boxed{\dim(S_1 \cap S_2) = 2}$$

Obs: sei que $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$, pois S_1 e S_2 são gerados por 3 vetores que são LI $\Rightarrow$ esses 3 vetores são base

---

Para treinar: P3 2011 - 13, 14, 15 } de Algelin 1

P3 2012 - 8, 9, 13

A resolução desses exercícios vem a seguir. O enunciado está no site de MAT2457

Q14 da P3 2011

Pela definição de soma de subespaços se $w = a + bx + cx^2$ pertence a $U + T$ então $w = u + v$, onde $u \in U$ e $v \in V$

$$w = u + v \Rightarrow a + bx + cx^2 = \alpha(1 + 2x + 3x^2) + \beta(2 - x + 6x^2)$$

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\beta \\ b = 2\alpha - \beta \\ c = 3\alpha + 6\beta \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} c = 3(\alpha + 2\beta) \\ \boxed{c = 3 \cdot a} \end{array} \quad R: \text{A}$$

Q16 da P3 2011

(I) FALSO: ninguém falou nada sobre relacionar B_1 e B_2 com base de $S_1 \cap S_2$

Por exemplo, se $B_1 = \{(1,1,1)\}$ e $B_2 = \{(2,2,2)\}$

Sei que $S_1 \cap S_2 = [(1,1,1)]$ mas $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ que não é base de $S_1 \cap S_2$

(II) FALSO: como falei antes só será se $B_1 \cup B_2$ for LI

(III) VERDADEIRO: se juntar os conjuntos de geradores de S_1 com os de S_2, terei geradores de $S_1 + S_2$

R: A

Q8 da P3 2012

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & d \\ b & c & a \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

como vimos no tópico I

$$\begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \text{é base de } S \text{ (suponha variável)} \\ \dim S = 4 \end{cases}$$

$$T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

vamos achar uma base de T

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ & & & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & +1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

continuando fica

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, como tem pivô nas 4 colunas, $\dim T = 4$ e os vetores dados são base de T

Vamos achar uma base de $S+T$. Para tanto, juntamos os vetores das bases de S e T e escalonamos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} (\times -2)$$

Rearrumando e fazendo a operação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\times 1) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Conclusão $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

é base de $S+T$. Logo $\dim S+T = 6$. Como isso é a dimensão do espaço $(M_{2\times 3})$:

$$\boxed{S+T = M_{2\times 3}} \quad R: (e)$$

* Se quiser $\dim S \cap T$:

$$\dim S \cap T = -\dim S+T + \dim S + \dim T = -6 + 4 + 4 = 2$$

Q9 da P3 2012

(I) FALSO: se $\dim(V+W) = \dim(U)$, como $V+W$ está contido em U, conclui que $U = V+W$, ou seja, qualquer vetor do espaço se escreve como combinação de um cara de V e outro de W

Porém isso não tem que ser de modo único (posso fazer de vários modos)

(II) FALSO: Voltemos ao exemplo $B = \{(1,1,1)\}$ base de V e $C = \{(2,2,2)\}$ base de W. $\dim(V \cap W) = 1$, mas as bases não têm elementos em comum.

(III) VERDADEIRO: ~~Da seg~~ Se $V \cap W = \{0\}$ sabemos que os elementos de V não são combinação dos de W e vice-versa. Assim se eu juntar um conjunto LI de V com um outro conjunto LI de W, o todo ainda será LI