Q1. Seja n um inteiro positivo e sejam $A, M \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(I) se A é simétrica e M^tAM é diagonal, então M^tM é igual à matriz identidade; Falso, p. ex: $A = M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(II) se M^tM é igual à matriz identidade, então as colunas de M constituem uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ com respeito ao produto interno usual; Verdadeiro, se $M = [c_1 | c_2 | \cdots | c_n]$, então $M^tM = I \Rightarrow \langle c_i, c_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(III) se A é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$, então existe uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ com $\det(P) = 1$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. Verdadeiro, se $M^{-1}AM = D$, diagonal e $M = [c_1 | c_2 | \cdots | c_n]$, então $P^{-1}AP = D$, onde $P = \left[\frac{c_1}{\det M} \middle| c_2 \middle| \cdots \middle| c_n \right]$ e $\det P = 1$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira.

Q2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica tal que

$$A \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e suponha que A possua um autovalor não nulo $\lambda \in \mathbb{R}$. O autoespaço de A correspondente ao autovalor λ é igual a:

(a) $[(1, -1, 3)]$;

(b) $[(-3, 0, 1), (1, 1, 0)]$;

(c) $[(-2, 1, 1)]$;

(d) $\{0\}$;

(e) $[(11, 0, 0)]$.

$V(0) = [(-3, 0, 1), (1, 1, 0)]$

$\therefore V(\lambda) = V(0)^{\perp} = [(1, -1, 3)]$

↑ A simétrica

Q3. Seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ um operador linear e seja $A = [T]_{\text{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$. Suponha que A tenha entradas reais e que $\text{Ker}(T - (2+i)\text{I}) = [(i, 1)]$, onde I denota o operador identidade de $\mathbb{C}^2$. Temos que $\det(A)$ é igual a:

(a) 5;

(b) 1;

(c) 0;

(d) -1;

(e) -5.

$V(2+i) = [(i, 1)] \Rightarrow V(2-i) = [(-i, 1)]$

$\therefore A = MDM^{-1}$, onde

$M = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}$

$\therefore \det A = \det(MDM^{-1}) = \det D = (2+i)(2-i) = 5$

Q4. O polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é $p_A(t) = -(t-2)^2(t+1)$ e o autoespaço de A correspondente ao autovalor 2 é $[(-1,1,0),(1,0,1)]$. Considere a quádrica de equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 1 = 0.$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que

$$2u^2 + 2v^2 - w^2 = \alpha$$

é uma equação reduzida para essa quádrica, então α é igual a:

(a) 0;
(b) -1;
(c) -2;
(d) 1;
(e) 2.

A simétrica

$V(-1) = V(2)^\perp = [(1,1,-1)]$

$V(2) = [(-1,1,0),(1,0,1)] =$ (Gram-Schmidt)

$= [(-1,1,0),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1)]$

↳ Fazendo $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, a equação da quádrica fica: $2\underbrace{\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{u}^2 + 2\underbrace{y'^2}_{v} - \underbrace{z'^2}_{w} + 1 = 1$

Q5. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $1+i$ seja um autovalor de A e tal que o autoespaço de A correspondente a esse autovalor seja igual a:

$$[(1,i,0,0),(0,0,1,2-i)].$$

Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0,1,0,1)$. Temos que $X(\pi)$ é igual a:

(a) $e^\pi(0,-1,0,-1)$;
(b) $e^{2\pi}(-1,0,0,1)$;
(c) $e^{2\pi}(0,1,0,-1)$;
(d) $e^\pi(-1,-1,0,0)$;
(e) $e^\pi(1,0,-1,0)$.

$V(1+i) = [(1,i,0,0),(0,0,1,2-i)]$

$\therefore V(1-i) = [(1,-i,0,0),(0,0,1,2+i)]$

$e^{(1+i)t}(1,i,0,0) = e^t(\cos t, -\sin t, 0, 0) + i e^t(\sin t, \cos t, 0, 0)$

$e^{(1+i)t}(0,0,1,2-i) = e^t(0,0,\cos t, 2\cos t + \sin t) +$

$+ i e^t(0,0,\sin t, -\cos t + 2\sin t)$

Solução geral: $X(t) = e^t[c_1(\cos t, -\sin t, 0, 0) + c_2(\sin t, \cos t, 0, 0) +$

$+ c_3(0,0,\cos t, 2\cos t + \sin t) + c_4(0,0,\sin t, -\cos t + 2\sin t)]$

$X(0) = (0,1,0,1) \iff c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0,\ c_4 = -1$

Solução particular: $X(t) = e^t[(\sin t, \cos t, 0, 0) - (0,0,\sin t, -\cos t + 2\sin t)]$

$\therefore X(\pi) = e^\pi(0,-1,0,-1)$

Q6. Sejam $a, b, p, E, F, G \in \mathbb{R}$ e considere a cônica de equação:

$$ax^2 + by^2 + 2pxy + Ex + Fy + G = 0.$$

Suponha que a mudança de variáveis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

transforme essa equação em:

$$2u^2 - v^2 + \alpha u + \beta v + \gamma = 0,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais

$$X'(t) = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix} X(t)$$

que satisfaz a condição $X(0) = (2, 0)$. Temos que $2X(\ln 2)$ é igual a:

(a) $(9, 7)$;
(b) $(1, 3)$;
(c) $(15, 17)$;
(d) $(-3, -5)$;
(e) $(0, 4)$.

$A = \begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}$ tem autovalores 2 e -1

$V(2) = [(1,1)]$

$V(-1) = [(-1,1)]$

Solução geral: $X(t) = c_1 e^{2t}(1,1) + c_2 e^{-t}(-1,1)$

$X(0) = (2,0) \iff c_1 = 1$ e $c_2 = -1$

Solução particular: $X(t) = e^{2t}(1,1) - e^{-t}(-1,1)$

$\therefore 2X(\ln 2) = 2\left(4(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)\right) = 2\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Q7. Sejam n um inteiro positivo, $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear e seja $A = [T]_{\text{can}}$ a matriz que representa T em relação à base canônica do espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$. Suponha que a matriz A tenha entradas reais. Seja $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ um autovalor de T, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Seja $w = u + vi \in \mathbb{C}^n$ um autovetor de T correspondente ao autovalor λ, onde $u, v \in \mathbb{R}^n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) T tem pelo menos um autovalor real; Falso, p. ex $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalores i e $-i$

(II) T é diagonalizável;

(III) no espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, o conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(b) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras.

Verdadeiro: $\lambda \neq \bar{\lambda} \Rightarrow \{w, \bar{w}\}$ li sobre $\mathbb{C}$

Como $[w, \bar{w}]_{\mathbb{C}} = [u, v]_{\mathbb{C}}$, segue que $\{u, v\}$ é li sobre $\mathbb{C}$ e, portanto, sobre $\mathbb{R}$

Falso, p. ex $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalores $\begin{cases} 1 \text{ (de multiplicidade 2)}, \\ i \text{ e } -i \text{ (de mult 1)} \end{cases}$

mas não é diagonalizável, porque $\dim V(1) = 1$

Q8. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Seja $d \in \mathbb{R}$ e considere a equação:

$$9x^2 + 6y^2 - 4xy - 12x - 4y - 8 + d = 0.$$

Se $d < 14$, então o conjunto solução dessa equação é:

(a) uma elipse;
(b) o conjunto vazio;
(c) uma hipérbole;
(d) uma parábola;
(e) um par de retas concorrentes.

Fazendo as mudanças

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad x'' = x' - \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

obtemos

$$(x'')^2/(1/\sqrt{5})^2 + (y'')^2/(1/\sqrt{10})^2 = 14 - d$$

Q9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico. Suponha que o polinômio característico de T seja $p_T(t) = -(t-2)^2(t-3)$ e que

$$\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{I}) = [(1, -1, 0), (1, 0, 1)],$$

onde I denota o operador identidade de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(2, 2, -2)$ é igual a:

(a) $(6, 6, -6)$;
(b) $(-6, 6, -6)$;
(c) $(4, 4, -4)$;
(d) $(-4, 4, -4)$;
(e) $(2, 2, -2)$.

$\ker(T-3I) = \ker(T-2I)^{\perp}$

$\ker(T-3I) = \langle(1,1,-1)\rangle$

$T(2,2,-2) = 2T(1,1,-1) = 2(3)(1,1,-1) = (6,6,-6)$

Q10. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Seja W um subespaço não nulo de V tal que $W \neq V$ e seja $T : V \to V$ o operador linear definido por:

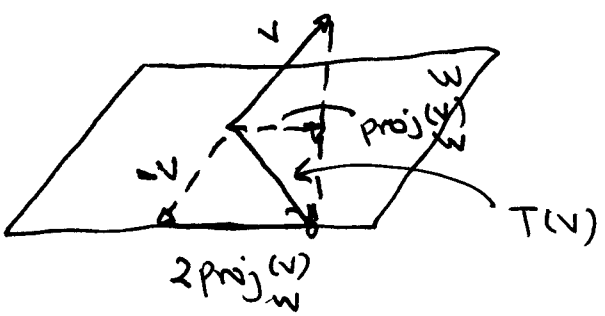
$$T(v) = -v + 2\,\mathrm{proj}_W\, v,$$

para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) o operador T é simétrico;
(II) os autovalores de T são 1 e -1;
(III) os autovalores de T são 2 e 1.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são necessariamente verdadeiras;
(c) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;
(d) apenas a afirmação (II) é necessariamente verdadeira;
(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.



Seja $V = W \oplus W^{\perp}$

Então

$\ker(T-1) = W$

$\ker(T+1) = W^{\perp}$.

Q11. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Temos que A^{60} é igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{60} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{60} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} \end{pmatrix}$;

(d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{60} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Seja $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \zeta z$, onde $\zeta = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. T é $\mathbb{R}$ linear e na base $B = \{1, i\}$. $[T]_B = A$.

Como $\zeta^{12} = 1$, segue que $T^{60} = I$ e $A^{60} = I$.

Q12. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix}$$

seja diagonalizável. Considere a solução X do sistema de equações diferenciais $X'(t) = AX(t)$ satisfazendo a condição $X(0) = (0, 1, 1)$. Se

$$X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big),$$

então $x(t) + y(t) + z(t)$ é igual a:

(a) $2e^{2t}$;

(b) $e^t + e^{2t}$;

(c) $2e^t$;

(d) $3e^t - e^{2t}$;

(e) $3e^{2t} - e^t$.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $[T]_{can} = A$

$\det(T - X\,\mathrm{Id}) = (1-X)(2-X)^2$

$\dim \ker(T - 2\,\mathrm{Id}) = 2 \Rightarrow a = 0$

$\ker(T - \mathrm{Id}) = \langle (1,0,-3) \rangle$

$\ker(T - 2\,\mathrm{Id}) = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$

$\therefore x(t) + y(t) + z(t) = e^{2t} + e^{2t} = 2e^{2t}$

Q13. Seja $(x(t), y(t))$ a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t), \\ y'(t) = 4x(t) + 9y(t), \end{cases}$$

satisfazendo a condição $(x(0), y(0)) = (-2, 1)$. Temos que $x(t) + 2y(t)$ é igual a:

(a) 0;
(b) $e^{-t} + 3e^{11t}$;
(c) $2e^{t} + e^{-11t}$;
(d) $e^{t} + 2e^{3t}$;
(e) $e^{-t} + 2e^{t}$.

Os valores próprios e vetores próprios de matriz associada são

$\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 11$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$X(t) = \begin{bmatrix} -2e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$ $\therefore -2e^{t} + 2e^{t} = 0$

Q14. Seja fixado um sistema de coordenadas ortogonal no plano. Considere a equação:

$$x^2 - 2axy + y^2 - 1 = 0,$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$(x')^2(1+a) + (y')^2(1-a) = 1$

(a) se $0 < a < \frac{1}{2}$, então o conjunto solução dessa equação é uma elipse;
(b) se $\frac{1}{2} < a < 2$, então o conjunto solução dessa equação é uma hipérbole;
(c) se $a > 0$, então o conjunto solução dessa equação não é uma elipse;
(d) se $a > 2$, então o conjunto solução dessa equação é um par de retas concorrentes;
(e) existe $a > 0$ tal que o conjunto solução dessa equação é uma parábola.

Q15. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno. Sejam $T : V \to V$ um operador linear simétrico e W um subespaço de V tal que $T(w) \in W$, para todo $w \in W$. Suponha que $W \neq V$ e que $v \in V$ é tal que $W^{\perp} = [v]$. Pode-se afirmar que:

(a) v é um autovetor de T;
(b) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = v$;
(c) v é um autovetor de T se, e somente se, $T^2 = T$;
(d) v é um autovetor de T se, e somente se, $T(v) = -v$;
(e) v é um autovetor de T se, e somente se, T^2 é igual ao operador identidade de V.

$T|_{W^{\perp}}$ é simétrico. Logo $\exists \tilde{v}$ em $W^{\perp}$ tal que $T(\tilde{v}) = \lambda \tilde{v}$ mas $v = \mu \tilde{v}$, pois $W^{\perp}$ tem dimensão 1. Logo $T(v) = \lambda \mu v$.

Q16. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico tal que $T^2 = T$. Denote por I o operador identidade de V. Pode-se afirmar que:

(a) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$;

(b) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T)$;

(c) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a V;

(d) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ não é um autoespaço de T;

(e) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{I})$.

Seja $v \in V$. Então

$v = v - T(v) + T(v)$ e $T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v)$
$= T(v) - T(v) = 0$

Logo
$V = \ker(T) + T(V)$
Mas se $w = T(v)$, $T(w) = T^2(v) = T(v) = w$
$= 1 \cdot w$

e $V = \ker(T) + \ker(T - I)$
Como T é simétrico a conclusão segue.

Q16. Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $T : V \to V$ um operador linear simétrico tal que $T^2 = T$. Denote por I o operador identidade de V. Pode-se afirmar que:

(a) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{I})$;

(b) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T)$;

(c) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a V;

(d) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ não é um autoespaço de T;

(e) $(\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$ é igual a $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{I})$.

$(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp} = \mathrm{Im}\,T$, pois têm a mesma dimensão e, claramente, $\mathrm{Im}\,T \subseteq (\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$

Agora, $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Ker}\,(T-I)$, pois $\mathrm{Im}\,T = \{v \in V : T(v) = v\}$ e, portanto, é um autoespaço.

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um contra-exemplo para b), c), e)
$(x,y) \mapsto (x,0)$