A

**1ª Questão:** (3,0) Encontre uma equação reduzida para a quádrica cuja equação em relação ao sistema ortogonal, $\Sigma = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, é: $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ; $\Sigma = (O, \mathcal{B})$

$$P = (x,y,z)_{\Sigma} \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow -2x^2 + y^2 + z^2 + 6yz + 4x + 4\sqrt{2}y + 12\sqrt{2}z - 2 = 0$$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ; $p_A(t) = (-2-t)(t^2-2t-8)$ $\therefore$ os autovalores de $A$ são $-2$ ; $r(-2)=2$
$4$ ; $r(4)=1$.

$x = (a,b,c)_{\mathcal{B}} \in E(-2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow b + c = 0 \Leftrightarrow b = -c$ ; $c, a \in \mathbb{R}$

Logo $x \in E(-2) \Leftrightarrow (\exists\, a, c \in \mathbb{R})$ $x = (a, -c, c) = a(1,0,0) + c(0,-1,1)$. De modo que $\mathcal{B}_0 = \{(1,0,0)_{\mathcal{B}}; (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_{\mathcal{B}}\}$ é base orton. de $E(-2)$.

Da mesma forma, $x = (a,b,c)_{\mathcal{B}} \in E(4) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$ ; $c \in \mathbb{R}$. De modo que $\mathcal{B}_1 = \{(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})_{\mathcal{B}}\}$ é base orton. de $E(4)$.

Assim, $\mathcal{B}' = \{\vec{i}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{j} + \vec{k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})\}$ é uma base ortonormal de $V^3$ formada por autovetores de $A$. Daí, sendo $\Sigma' = (O, \mathcal{B}')$ e $P = (x', y', z')_{\Sigma'}$, $P \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (-2)x'^2 + (-2)y'^2 + 4z'^2 + \begin{pmatrix} 4 & 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2)x'^2 - 2y'^2 + 4z'^2 + 4x' + 8y' + 16z' - 2 = 0 \Leftrightarrow -x'^2 - y'^2 + 2z'^2 + 2x' + 4y' + 8z' - 1 = 0$$

Agora, $-x'^2 + 2x' = -(x'^2 - 2x' + 1 - 1) = -(x'-1)^2 + 1$
$-y'^2 + 4y' = -(y'^2 - 4y' + 4 - 4) = -(y'-2)^2 + 4$
$2z'^2 + 8z' = 2(z'^2 + 4z' + 4 - 4) = 2(z'+2)^2 - 8$

Logo, $P \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow -(x'-1)^2 - (y'-2)^2 + 2(z'+2)^2 - 4 = 0$

Finalmente, sendo $O' = (1, 2, -2)_{\Sigma'}$ e $\Sigma'' = (O', \mathcal{B}')$, $P = (x'', y'', z'')_{\Sigma''} \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x''^2 - y^2 + 2z''^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\frac{-x''^2}{4} - \frac{y''^2}{4} + \frac{z''^2}{2} = 1}$$

(De modo que $\mathcal{Q}$ é um hiperbolóide de 2 folhas) #

**2ª Questão:** Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

e cujo polinômio característico é $p_T(x) = (x^2 - 4x + 8)^2$.

(a) (0,5) Mostre que o operador $T$ é semi-simples;

(b) (1,0) Ache uma base $B$ do $\mathbb{R}^4$ em relação à qual a matriz de $T$ esteja na forma semi-simples;

(c) (0,5) Exiba a matriz $[T]_B$.

(d) (0,5) Determine uma matriz $M$ tal que $A = M[T]_B M^{-1}$.

(e) (1,0) Calcule $A^{500}$.

(a) $T^c : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ tal que $[T^c]_{can} = A$ é o complexificado de

$P_{T^c}(x) = P_T(x) = (x^2 - 4x + 8)^2 = (x - (2+2i))^2 (x - (2-2i))^2$

Os autovalores de $T^c$ são $2+2i$ e $2-2i$ ambos com mult. alg. 2

$V(2+2i) = \ker(T^c - (2+2i)I) = \{((1-i)\frac{z_2}{2}, z_2, -iz_4, z_4) \,/\, z_2, z_4 \in \mathbb{C}\} =$

$= [(1-i, 2, 0, 0), (0, 0, -i, 1)]$ que tem dimensão 2 = mult. geom. de $2+2i$

Sabemos que $V(2-2i) = [(1+i, 2, 0, 0), (0, 0, i, 1)]$ e portanto $2-2i$ tem mult. geom. 2 também, donde concluímos que $T^c$ é diagonalizável e portanto $T$ é semi-simples.

(b) $(1-i, 2, 0, 0) = (1, 2, 0, 0) + i(-1, 0, 0, 0)$

$(0, 0, -i, 1) = (0, 0, 0, 1) + i(0, 0, -1, 0)$

$B = \{(1, 2, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ é uma base tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$ forma semi-simples

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4_{can} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "I"'] & \mathbb{R}^4_{can} \leftrightsquigarrow A \\ \mathbb{R}^4_B \arrow[r, "T"] & \mathbb{R}^4_B \leftrightsquigarrow [T]_B \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

(d) $M = [I]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A = \underbrace{[I]_{B,can}}_{M} [T]_B \underbrace{[I]_{can,B}}_{M^{-1}}$

(e) Como $A = M\,[T]_B\,M^{-1}$ temos que

$$A^{500} = M\,[T]_B^{500}\,M^{-1}$$

Vamos calcular $[T]_B^{500}$

$$[T]_B^{500} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{matrix}^{500} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{matrix}^{500} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2\sqrt{2}\begin{bmatrix} \cos \pi/4 & -\operatorname{sen} \pi/4 \\ \operatorname{sen} \pi/4 & \cos \pi/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{500} = (2\sqrt{2})^{500}\begin{bmatrix} \cos 500\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen} 500\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} 500\frac{\pi}{4} & \cos 500\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = 2^{750}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$500\frac{\pi}{4} = 4.125\frac{\pi}{4} = 62.2\pi + \pi$$

Assim $[T]_B^{500} = -2^{750}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ matriz identidade

Portanto $A^{500} = M^{-1}\,[T]_B^{500}\,M^{-1} = -2^{750}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**3ª Questão:** (3,5) Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 10x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_2(t) + 6x_3(t) \end{cases},$$

satisfazendo às condições iniciais:

$$x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = 5 \quad \text{e} \quad x_3(0) = 1.$$

$X'(t) = AX(t)$, onde $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ e $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq $[T]_{can} = A$. Então $p_T(t) = (4-t)(t^2-6t+10)$

autovalores de $T^c$: $4, 3+i, 3-i$

$(1,0,0) \in V(4)$ e $\dim V(4) = 1 \Rightarrow V(4) = [(1,0,0)]$

$V(3+i) = \ker(T^c - (3+i)I)$.

$[T^c - (3+i)I]_{can} = \begin{bmatrix} 1-i & -1 & -2 \\ 0 & -3-i & 10 \\ 0 & -1 & 3-i \end{bmatrix}$

logo, $(z_1, z_2, z_3) \in V(3+i)$ se

$z_2 = (3-i)z_3$ e $(1-i)z_1 = z_2 + 2z_3 = (5-i)z_3$

$\therefore z_1 = (3+2i)z_3$

$\therefore V(3+i) = [(3+2i, 3-i, 1)]$

$(3+2i, 2-i, 1) = (3,3,1) + i(2,-1,0)$

Portanto, $B = \{(1,0,0), (3,3,1), (-2,1,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ e $[T]_B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Seja $M = [Id]_{B,can} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Se $Y(t) = M^{-1}X(t)$ então $X(t) = MY(t)$ e $Y'(t) = M^{-1}X'(t) = M^{-1}AX(t) = M^{-1}AMY(t) = [T]_B Y(t)$

Solução geral de $Y'(t) = [T]_B Y(t)$:

$$\begin{cases} y_1(t) = ke^{4t} \\ y_2(t) = ce^{3t}\cos t - de^{3t}\operatorname{sen} t \\ y_3(t) = de^{3t}\cos t + ce^{3t}\operatorname{sen} t \end{cases}$$

Condições inicial: $Y(0) = (k, c, d)$ e $X(0) = MY(0)$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow c = 1;\ d = 2,\ k = 5$

Solução do sistema dado: $X(t) = MY(t)$.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5e^{4t} \\ e^{3t}\cos t - 2e^{3t}\operatorname{sen} t \\ 2e^{3t}\cos t + e^{3t}\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 5e^{4t} - e^{3t}\cos t - 8e^{3t}\operatorname{sen} t \\ x_2(t) = 5e^{3t}\cos t - 5e^{3t}\operatorname{sen} t \\ x_3(t) = e^{3t}\cos t - 2e^{3t}\operatorname{sen} t \end{cases}$$