P2_2011) 1:

O núcleo será formado por (x,y,z) tais que:

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\\1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}_C \rightarrow \begin{matrix}1x+0y+2z=0\\0x+1y+3z=0\\1x+0y+2z=0\\0x+1y+3z=0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1x=-2z\\1y=-3z\\1z=1z\end{matrix} \rightarrow z(-2,-3,1)_B$$

Sendo o núcleo $(-2,-3,1)$ na base B, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

↳ $-2.1-3x+1x^2=+x^2-3x-2 \therefore Ker(1)=x^2-3x-2$

→ Para a determinação da imagem teríamos:

$1(1,0,0)_B = 1(1)=(1,0,1,0)_C$
$1(0,1,0)_B = 1(x)=(0,1,0,1)_C$
$1(0,0,1)_B = 1(x^2)=(2,3,2,3)_C$

Como a última linha é uma combinação linear das outras, apenas as duas primeiras formam a imagem.

↳ $Im(1)=[(1,0,1,0)_C,(0,1,0,1)_C]$
$Im(1)=[(1,0,1,2),(0,1,0,2)]$

Passar da base C para a canônica

Alt. B

P2_2011) 4:

$1(x)=(0,1)_B=0x+1.(x-1)=x-1$
$1(x-1)=(1,-3)_B=1x-3(x-1)=-2x+3$

$1(1)=1(x)-1(x-1)=1(x-x+1)$
$1(1)=x-1+2x-3=3x-4$

↳ $1(a+bx)=1(a)+1(bx)=a1(1)+b1(x)=a(3x-4)+b(x-1)=-4a-b+x(3a+b)$

Portanto, a afirmativa I é verdadeira.

$q(x)=3+2x=-4a-b+x(3a+b)$

→ $\begin{cases}-4a-b=3\\3a+b=2\end{cases}$ → Como sistema é possível e determinado, existem únicos a e b que satisfazem-no, portanto a afirmativa II é verdadeira.

→ $\begin{bmatrix}0&1\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}0x+1y=0\\1x-3y=0\end{matrix} \sim 1x=3y \therefore (x,y)=(3y,y)=y(3,1)_B$

↳ $3(x)+1(x-1)=2x-1$

Determinar núcleo

A afirmativa III é falsa

Alt. C

P2 2011) 6.

$[G]_{CB} \cdot [F]_{BC} = [G \circ F]_{BB}$

$$[G \circ F]_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -3 & -1 & -4 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

Determinação do núcleo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ -3 & -1 & -4 \\ 7 & 4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} 4x + 3y + 7z = 0 \\ -3x - 1y - 4z = 0 \\ 7x + 4y + 11z = 0 \end{cases} \rightarrow (x, y, z)_B = (-z, -z, z)_B = z(-1, -1, 1)_B = \{-1 - x - x + x + x^2 = \{-1 - x + x^2\}$$

P2 2011) 9

$$T(1,0)_B = (1, 0, 2, 1)_C = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(1,1)_B = (0, 1, -1, 3)_C = 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T(3,2) = T(1,0) + 2T(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \quad \det: 3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 1 \cdot 7 = 7$$

P2 2011) 10.

u é autovetor de T associado ao autovalor α } $T(u) = \alpha u$
v é autovetor de T associado ao autovalor β } $T(v) = \beta v$

I. $T(u+v) = \alpha(u+v)$
$T(u) + T(v) = \alpha(u+v)$
$\alpha u + \beta v = \alpha(u+v)$
$\alpha u + \alpha v = \alpha(u+v)$

→ I: Verdadeira
Pois a recíproca é sempre verdadeira

II. $T(2u + 3v) = k(2u + 3v)$
$2T(u) + 3T(v) = k(2u + 3v)$
$2\alpha u + 3\beta v = 2ku + 3kv$

→ II: Verdadeira
(Ex: $\beta = 0$ e $\alpha = k$)

III. $T(u+v) = k(u+v)$
$T(u) + T(v) = ku + kv$
$\alpha u + \alpha v = ku + kv$
$\alpha u + \alpha v = 0$
$u + v = 0$

→ III: falsa
$u + v = 0$ não pode ser um autovetor.

P2 2011) 5.

Sendo λ^2 um autovalor de T^2 associado ao autovetor u, temos:

$$T^2(u) = \lambda^2 . u$$

→ A alternativa b é falsa pois afirma que λ é autovalor de T, o que não é necessariamente verdade, o autovalor poderia ser $-\lambda$ ($T^2 \sim \lambda^2$; $T \sim \pm\lambda$)

P2 2011) 7.

Como $M^{-1}T_{[B]}M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ → Os autovalores são (de $T_{[B]}$) 1 e 4

A matriz M, por sua vez, é composta pelos autovetores, podendo assim ser determinada

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2a+b=a \\ 2a+3b=b \end{matrix} \therefore a=-b \therefore \text{autovetor: } (1,-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2c+d=4c \\ 2c+3d=4d \end{matrix} \therefore a=2b \therefore \text{autovetor: } (1,2)$$

Logo: $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ Alt. B.

P2 2011) 8.

I. Verdadeira. Pois não pode haver número ímpar de raízes complexas e já sabemos que duas delas são reais, uma vez que são autovalores.

II. Falsa, para ser invertível: $\det[T] \neq 0$

III. Sabendo-se que $P_1(t) = (t-\alpha).q(t)$ e $q(\alpha) \neq 0$, conclui-se que α tem multiplicidade algébrica 1 e, portanto, multiplicidade geométrica 1 ($0 < mg \leq ma$). Sendo T diagonalizável, $m_{\alpha\beta} = mg\,\beta$, mas não podemos afirmar que $\dim(V(\beta)) = 2$ pois desconhecemos sua m.a., ou seja, não sabemos se β é raiz simples ou dupla → FALSA.

Alt. C

P2.2011) 12.

Como a imagem é determinada pelas colunas, são elas que deverão ser escalonadas. Logo, usaremos a transposta de $[T]_E$

Determinação da imagem:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim(Im) = 2$ (Alt.C incorreta)

$Im(T) = [(-1,1,0,1)_E, (0,1,0,2)_E]$ (Alt.D incorreta)

Determinação do núcleo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} -x+z+w=0 \\ x+y-2w=0 \\ \cancel{z=0} \\ x+2y+z-3w=0 \end{array} \rightarrow Ker(T) = [(1,1,0,1)_E]$$

P2.2011) 15.

$T(\text{autovetor}) = \text{autovalor} \cdot \text{autovetor}$

$T(1,0,2) = 1 \cdot (1,0,2) = (1,0,2)$

$T(0,1,1) = -1 \cdot (0,1,1) = (0,-1,-1)$

Ainda, como $Ker(T) = [(1,0,0)]$:

$T(1,0,0) = (0,0,0)$

$T(1,3,7) = 3T(0,1,1) + 2T(1,0,2) - 1T(1,0,0)$

$T(1,3,7) = 3(0,1,1) + 2(1,0,2) - 1(0,0,0)$

$T(1,3,7) = (2,3,1)$ Alt A

P2.2011) 2.

$A^{10} = M \cdot D^{10} \cdot M^{-1}$

Sendo os autovalores -1 e 3, temos:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \therefore D^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$$

Sendo os autovalores $(1,-1)$ e $(1,1)$, temos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Para } M^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, teremos: $a = 1/2$, $b = -1/2$, $c = 1/2$, $d = 1/2$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \cdot 3^{10} & -1 \cdot 3^{10} \\ -1 \cdot 3^{10} & 1 \cdot 3^{10} \end{bmatrix}$$

Alt. D

P2 2011) 11.

Sendo 1 um autovalor, 1 é uma das raízes de $P_t(1)$

Como $\ker(1) = [x-1, x^2+1]$

$1(x-1, \underbrace{x^2+1}_{\text{↳ sabemos que é diferente de zero}}) = 0 = \underbrace{0(x-1, x^2+1)}_{\text{↳ zero é autovalor.}}$

✱ Resposta excelente e duvidosa. Melhor conferirem :)

Sabendo que 0 e 1 são raízes de $P_t(t)$, chegamos na alt. A

P2 2011) 13.

$P_t(t) = (t-1)^2(t-3)^2$

1 é uma raiz de multiplicidade algébrica 2 e o mesmo ocorre para a raiz 3. Dessa forma, tanto 1 quanto 3 devem ter multiplicidade geométrica 2 para T ser diagonalizável. Sabendo que $0 <$ mult. geométrica $\leq$ mult. algébrica, ao afirmar que $\underbrace{M_2(\mathbb{R})}_{2\times 2 = 4} = V(1) + V(3)$, tal condição é satisfeita.

(Não, não poderíamos ter $4+0$, $1+3$, $3+1$ ou $0+4$ para $V(1)+V(3)$ pois $0 <$ m.geom $\leq$ m algébrica $= 2$)

Alt. D.

P2 2011) 14.

$$[T]_C - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ -2 & 0-t & -2 \\ 1 & 1 & -2-t \end{bmatrix} \rightarrow P_t(t) = \det([T]_C - \lambda) = \cancel{(2-t)}(0-t)(-2-t) = -2\cancel{(2-t)}$$

↳ $t=2$ ou $t^2+2t-2=0$, $\Delta = -4$

$P_t(t)$ não tem todas as raízes reais ∴ não é diagonalizável

Alt. D.

P2 2011) 16.

Se λ_1 e λ_2 são autovalores, não pode haver "dimensões em comum", caso contrário a soma das multiplicidades geométricas $[V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2)]$ poderia ser maior que a soma das multiplicidades algébricas (n).

Alt. E.