TIPO - O

Nesta prova considera-se fixada uma orientação do espaço e um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ em E^3, em que $\mathcal{E}$ é uma base ortonormal positiva de V^3. A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e planos e coordenadas de pontos estão escritas no sistema Σ e coordenadas de vetores estão escritas na base $\mathcal{E}$.

Q1. Considere a reta r dada pela equação

$$r : X = (7, -5, 0) + \lambda(-1, 2, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e seja $Q = (a, b, c)$ o ponto simétrico ao ponto $P = (1, 1, 0)$ em relação a r, isto é, o ponto Q tal que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ seja ortogonal a r e o ponto médio do segmento PQ esteja em r. Temos que $a + b + c$ é igual a:

(a) $\frac{41}{3}$;
(b) 13;
(c) 14;
(d) $\frac{25}{3}$;
(e) $\frac{40}{3}$.

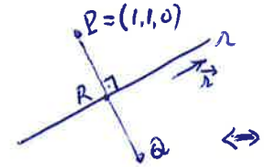
Q2. A distância do ponto $P = (1, 2, 3)$ ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = -1 - \lambda + \mu, \\ y = 2 + \lambda + \mu, \\ z = -2 + 2\lambda - \mu, \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

é igual a:

(a) $\frac{16}{\sqrt{14}}$;
(b) $\sqrt{14}$;
(c) $\frac{16}{\sqrt{12}}$;
(d) $\frac{20}{\sqrt{14}}$;
(e) $\frac{4}{\sqrt{14}}$.

1



$R \in r \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ R = (7-\lambda, -5+2\lambda, \lambda)$

$\therefore \overrightarrow{PR} = (6-\lambda, -6+2\lambda, \lambda)$.

$\overrightarrow{PR} \perp \vec{r} = (-1,2,1) \Leftrightarrow 0 = \vec{r} \cdot \overrightarrow{PR} = -6+\lambda-12+4\lambda+\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 6\lambda - 18 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

$\therefore \overrightarrow{PR} = (3,0,3)$.

Logo, $Q = P + 2\overrightarrow{PR} = (1,1,0) + (6,0,6) = (7,1,6)$.

$\therefore a+b+c = 7+1+6 = \boxed{14}$

2

$\pi : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & y-2 \\ 2 & -1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi : (-3)(x+1) - (y-2)(-1) + (z+2)(-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi : -3x + y - 2z - 9 = 0$

Logo, $d(P,\pi) = \dfrac{|(-3)\cdot 1 + 2 - 2\cdot 3 - 9|}{\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|-16|}{\sqrt{14}} = \boxed{\dfrac{16}{\sqrt{14}}}$

Q3. Considere o vetor $\vec{z} = (1,1,1)$, o plano

$$\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$$

e sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w}$, em que $\vec{v}$ é ortogonal a π e $\vec{w}$ é paralelo a π. Se $\vec{w} = (a,b,c)$, então $a+b+c$ será igual a:

(a) 2;
(b) $\frac{15}{7}$;
(c) 3;
(d) $\frac{19}{7}$;
(e) $\frac{16}{7}$.

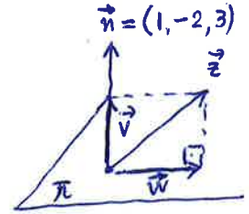
Q4. Considere as retas concorrentes r e s dadas respectivamente pelas equações:

$$r : \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + 3y + z = -2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{-2z-2}{3}.$$

Se $P = (a,b,c)$ for o ponto na interseção de r e s, então $a+b+c$ será igual a:

(a) 2;
(b) -2;
(c) 0;
(d) 1;
(e) -1.

3



Sabe-se que $\vec{n} = (1,-2,3) \perp \pi$.
Logo, $\vec{w} = \vec{z} - \vec{v}$, onde

$$\vec{v} = p^2_{\vec{n}}\,\vec{z} = \left(\frac{\vec{z}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\right)\cdot\vec{n} = \frac{2}{14}\vec{n}.$$

$\therefore \vec{v} = \left(\frac{1}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right)$. $\therefore \vec{w} = (1,1,1) - \left(\frac{1}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{3}{7}\right)$

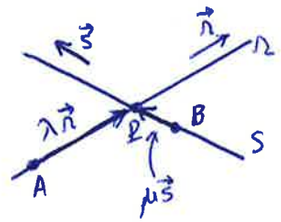
$\therefore \vec{w} = \left(\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right)$ $\therefore a+b+c = \boxed{\frac{19}{7}}$

4

$$r : \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+3z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow r : \begin{cases} x = 5+4\lambda \\ y = -4-3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-(-1)}{1} = \frac{z-(-1)}{-3/2} \Leftrightarrow s : \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = -1-3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$\therefore P \in r \cap s \Leftrightarrow P \in r \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ P = A + \lambda\vec{r} = (5+4\lambda, -4-3\lambda, \lambda)$
e
$P \in s \Leftrightarrow (\exists \mu \in \mathbb{R})\ P = B + \mu\vec{s} = (1+4\mu, -1+2\mu, -1-3\mu)$.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5+4\lambda = 1+4\mu \\ -4-3\lambda = -1+2\mu \\ \lambda = -1-3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ e } \lambda = -1$$

$\therefore P = B = (1,-1,-1)$ $\therefore a+b+c = \boxed{-1}$

Q5. Considere um tetraedro $\mathcal{T}$ de vértices $A, B, C, D \in E^3$ e suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 3$ e $\|\overrightarrow{AD}\| = 5$;
- o triângulo ABC está contido num plano paralelo ao plano de equação $x - 2y + 3z - 1 = 0$;
- a medida do ângulo $B\widehat{A}C$ é $\frac{\pi}{3}$;
- a medida do ângulo entre o vetor $\overrightarrow{AD}$ e o vetor $\vec{n} = (1, -2, 3)$ é $\frac{\pi}{6}$.

Temos que o volume de $\mathcal{T}$ é igual a:

(a) $\frac{15}{4}$;
(b) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$;
(c) $\frac{45}{2}$;
(d) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$;
(e) $\frac{45\sqrt{3}}{2}$.

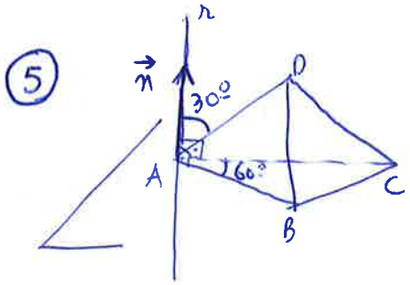
Q6. Considere as retas r e s dadas respectivamente pelas equações:

$$r : X = (4, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s : \frac{x}{2} = -y - 2 = z.$$

Se t for a reta perpendicular comum a r e s e se $P = (a, b, c)$ for o ponto na interseção de r e t, então $a + b + c$ será igual a:

(a) 4;
(b) 10;
(c) 2;
(d) 6;
(e) 8.

5



$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|$

$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \vec{AB} \wedge \vec{AC} \cdot \vec{AD} =$

$= \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \|\vec{AD}\| \cdot \cos\theta$

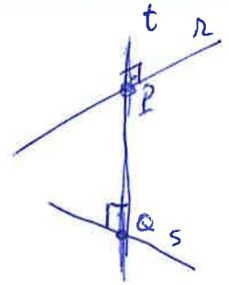
onde θ é o ângulo entre $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ e $\vec{AD}$

Dado que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \parallel \vec{n}$, segue $\theta = 30°$ ou $150°$.

Logo, $|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 \cdot |\cos\theta| = \frac{15\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{45}{2}$

$\therefore V = \frac{1}{6} \cdot \frac{45}{2} = \boxed{\frac{15}{4}}$

6



$P \in r \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ P = (4, \lambda, \lambda)$.

$s: \frac{x-0}{2} = \frac{y-(-2)}{-1} = \frac{z-0}{1}$.

$\therefore Q \in s \Leftrightarrow (\exists \mu \in \mathbb{R})\ Q = (2\mu, -2-\mu, \mu)$.

$\therefore \vec{PQ} = (2\mu - 4, -2-\mu-\lambda, \mu-\lambda)$.

Logo $\vec{PQ} \perp \vec{r}$. $\therefore 0 = \vec{r} \cdot \vec{PQ}$ $(\vec{r} = (0,1,1))$

$\therefore 0 = -2-\mu-\lambda+\mu-\lambda = -2-2\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}$

$\therefore P = (4, -1, -1)$ $\therefore a+b+c = \boxed{2}$

Q7. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{w}\| = 2$ e tais que a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a $\frac{\pi}{3}$. Temos que a equação

$$\|(\alpha\vec{v} - \vec{w}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w})\| = 3$$

na incógnita real α tem duas soluções distintas. A soma dessas duas soluções é igual a:

(a) $-\frac{4}{3}$;
(b) $\frac{2}{3}$;
(c) $\frac{4}{3}$;
(d) $-\frac{2}{3}$;
(e) $-\frac{1}{3}$.

Q8. Considere o plano π dado pela equação

$$\pi : \begin{cases} x = \lambda, \\ y = \mu, \\ z = 3 - \lambda - \mu, \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

e seja $Q = (a, b, c)$ o ponto simétrico ao ponto $P = (1, -2, 1)$ em relação a π, isto é, o ponto Q tal que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ seja ortogonal a π e o ponto médio do segmento PQ esteja em π. Temos que $a + b + c$ é igual a:

(a) -6;
(b) -8;
(c) 8;
(d) 6;
(e) -2.

(7) $(\alpha\vec{v} - \vec{w}) \wedge (2\vec{v} + 3\vec{w}) = 3\alpha \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} - 2\,\vec{w} \wedge \vec{v} = (3\alpha + 2)(\vec{v} \wedge \vec{w})$

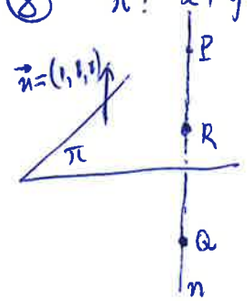
$\therefore\ 3 = \|(3\alpha+2) \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}\| = |3\alpha+2| \cdot \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = |3\alpha+2| \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$.

$\Leftrightarrow\ 3 = |3\alpha+2| \cdot 3 \Leftrightarrow |3\alpha+2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha+2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{3} \\ \text{ou} \qquad \text{ou} \\ 3\alpha+2 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1. \end{cases}$

$\therefore\ \frac{-1}{3} + (-1) = \frac{-4}{3}$.

---

(8) $\pi : x + y + z = 3$. ; $P = (1, -2, 1)$.



$n : X = P + \lambda\vec{n} = (1, -2, 1) + \lambda(1, 1, 1)$.

$\therefore\ R = (1+\lambda, -2+\lambda, 1+\lambda)$ (para algum $\lambda \in \mathbb{R}$)

Mas $R \in \pi$. $\therefore\ (1+\lambda) + (-2+\lambda) + (1+\lambda) = 3$

$\therefore\ \boxed{\lambda = 1}$ $\therefore\ R = (2, -1, 2)$

$\therefore\ \overrightarrow{PR} = (1, 1, 1)$

Finalmente, $Q = P + 2\,\overrightarrow{PR} = (1, -2, 1) + (2, 2, 2)$

$\therefore\ Q = (3, 0, 3)$

$\therefore\ a + b + c = \boxed{6}$.

Q9. Seja π_1 o plano que passa pelo ponto $P = (1,0,1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0,-1,0)$ e $\vec{w} = (1,0,0)$. Seja r a reta dada pela interseção de π_1 com o plano:

$$\pi_2 : x + y + z + 4 = 0.$$

Denote por Q a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano π_2, isto é, o ponto Q de π_2 tal que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ seja normal a π_2. Temos que a distância do ponto Q à reta r é igual a:

(a) $2\sqrt{3}$;
(b) $\sqrt{6}$;
(c) $\sqrt{30}$;
(d) $3\sqrt{2}$;
(e) $2\sqrt{6}$.

Q10. Sejam

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$$

bases de V^3 e considere o vetor $\vec{v} = (2,-1,3)_{\mathcal{B}}$. Denote por $M_{\mathcal{BC}}$ a matriz cujas colunas são $[\vec{f}_1]_{\mathcal{B}}$, $[\vec{f}_2]_{\mathcal{B}}$ e $[\vec{f}_3]_{\mathcal{B}}$. Se

$$M_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

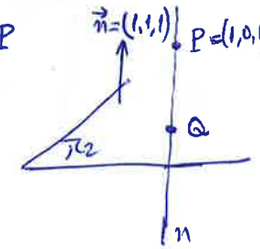
então as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\mathcal{C}$ serão:

(a) $(6,10,-9)$;
(b) $(17,10,-5)$;
(c) $(4,10,-9)$;
(d) $(6,4,-9)$;
(e) $(15,10,-5)$.

(9) $\pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi_1 : z-1=0$; $r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x+y+z+4=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow r : \begin{cases} x = -5-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$. $\therefore \begin{cases} A = (-5,0,1) \in r \\ \vec{r} = (-1,1,0) \parallel r. \end{cases}$

$Q = pr_{\pi_2} P$



$n : X = (1,0,1) + \lambda(1,1,1)$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

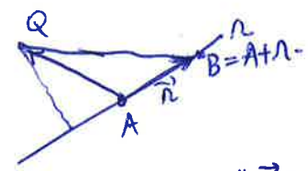
$\therefore \{Q\} = n \cap \pi_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R})\ Q = (1+\lambda, \lambda, 1+\lambda)$

e $(1+\lambda) + \lambda + (1+\lambda) + 4 = 0$.

$\Leftrightarrow 3\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

$\therefore Q = (-1,-2,-1)$.



$\therefore \overrightarrow{AQ} = (4,-2,-2) = 2(2,-1,-1)$.

Agora, $d(Q,r) = \dfrac{\|\vec{r} \wedge \overrightarrow{AQ}\|}{\|\vec{r}\|}$.

e $\|\vec{r} \wedge \overrightarrow{AQ}\|^2 = \|\vec{r}\|^2 \|\overrightarrow{AQ}\|^2 - (\vec{r} \cdot \overrightarrow{AQ})^2 = 2 \cdot 24 - 36 = 12$.

$\therefore d(Q,r) = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{6}}$

(10)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

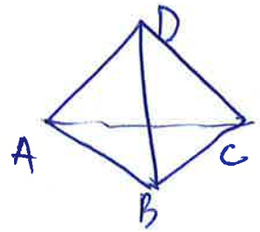
Logo $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\therefore [\vec{v}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 17 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}}$.

Q11. A medida da altura do tetraedro de vértices

$A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 0, 1)$, $C = (0, 2, 1)$ e $D = (4, 1, 3)$

relativa à base ABC é igual a:

(a) $\frac{19}{\sqrt{62}}$;
(b) $\frac{15}{\sqrt{62}}$;
(c) $\frac{17}{8}$;
(d) $\frac{17}{\sqrt{62}}$;
(e) $\frac{19}{8}$.



11

$$h = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}.$$

$\vec{AB} = (2, 1, -1)$; $\vec{AC} = (-1, 3, -1)$; $\vec{AD} = (3, 2, 1)$

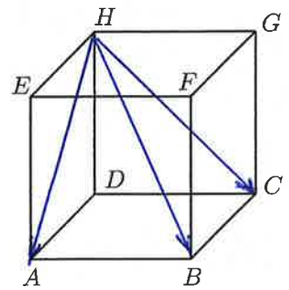
$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \vec{e}_1 \\ 1 & 3 & \vec{e}_2 \\ -1 & -1 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = (2, 3, 7).$$

$\therefore \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{4+9+49} = \sqrt{62}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 19.$

$$\therefore h = \frac{|19|}{\sqrt{62}} = \boxed{\frac{19}{\sqrt{62}}}$$

Q12. Considere no espaço E^3 um cubo cujos vértices são A, B, C, D, E, F, G, H, em que $ABCD$, $ADHE$ e $ABFE$ são faces desse cubo, como ilustrado na figura abaixo:



Considere também os seguintes sistemas de coordenadas em E^3:

$$\Sigma_1 = (A, \{\underbrace{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}}_{\mathcal{B}}\}) \quad \text{e} \quad \Sigma_2 = (H, \{\underbrace{\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HA}}_{\mathcal{C}}\}).$$

Se $P \in E^3$ for o ponto cujas coordenadas no sistema Σ_1 são $(-1, 3, 2)$, então as coordenadas de P no sistema Σ_2 serão:

(a) $(-2, 0, -1)$;
(b) $(1, -2, 0)$;
(c) $(1, -1, 1)$;
(d) $(1, 5, 3)$;
(e) $(-1, 3, 2)$.

Q13. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que $\vec{v} \wedge \vec{w} = (-3, 1, \sqrt{2})$ e tais que a medida do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$. Temos que $\vec{v} \cdot \vec{w}$ é igual a:

(a) 1;
(b) 6;
(c) -4;
(d) 11;
(e) -9.

(12) $P = A + (-1)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} \quad \therefore \quad \overrightarrow{AP} = (-1, 3, 2)_{\mathcal{B}}$

Logo, $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AP}$

i.e. $\overrightarrow{HA} = (0, -1, -1)_{\mathcal{B}} \quad \therefore \quad \overrightarrow{HP} = (-1, 2, 1)_{\mathcal{B}}$.

O que é pedido? $\overrightarrow{HP}_{\mathcal{C}}$. Mas $\overrightarrow{HP}_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot \overrightarrow{HP}_{\mathcal{B}}$.

Devemos pois encontrar $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

Mas, $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)_{\mathcal{B}}$.

$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)_{\mathcal{B}}$.

$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = (0, -1, -1)_{\mathcal{B}}$.

$\therefore \; M_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Conclui-se que $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\therefore \; \overrightarrow{HP}_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot \overrightarrow{HP}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

---

(13) $2\sqrt{3} = \sqrt{12} = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$.

$\therefore \; \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| = 4\sqrt{3}$

Daí, $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$

Q14. Considere as seguintes afirmações:

(I) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$, vale que $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{z} = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{z})$;

(II) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$, vale que:

$$[\vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{z}, \vec{z} + \vec{v}] = 2[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}];$$

(III) para qualquer base ortonormal positiva $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de V^3, vale que:

$$[\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1] = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q15. Considere as retas r e s dadas respectivamente pelas equações:

$$r: \begin{cases} x - 2y + 3z = 1, \\ -x + y - 2z = -2 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \frac{1-x}{3} = y = \frac{z+2}{2}.$$

Temos que r e s são:

(a) concorrentes;
(b) reversas e ortogonais;
(c) coincidentes;
(d) reversas e não ortogonais;
(e) paralelas e distintas.

(14) (I) $\vec{v} \wedge \vec{w} \cdot \vec{z} = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] \underset{\text{propr. cíclica}}{=} [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}] = \vec{w} \wedge \vec{z} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} \wedge \vec{z}$ $\therefore$ (I) V.

(II) $[\vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{v}] + [\vec{w}, \vec{w}+\vec{z}, \vec{z}+\vec{v}] =$

$= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}+\vec{v}] + [\vec{v}, \vec{z}, \vec{z}+\vec{v}] + \cancelto{0}{[\vec{w}, \vec{w}, \vec{z}+\vec{v}]} + [\vec{w}, \vec{z}, \vec{z}+\vec{v}] =$

$= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] + \cancelto{0}{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}]} + \cancelto{0}{[\vec{v}, \vec{z}, \vec{z}]} + \cancelto{0}{[\vec{v}, \vec{z}, \vec{v}]} + [\vec{w}, \vec{z}, \vec{z}] + [\vec{w}, \vec{z}, \vec{v}] \underset{\text{prop. cíclica}}{=}$

$= 2[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}]$ $\therefore$ II) V.

(III) $[\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2, \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3, \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1] = [\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2] \underset{\text{prop cíclica}}{=} [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 =$

$= \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \neq 0$ $\therefore$ III) F.

---

(15) $r: \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -x + y - 2z = -2 \end{cases}$ Resolvendo em rel. a z e fazendo $z = \lambda$, obtemos: $r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\therefore \begin{cases} A = (3,1,0) \in r \\ \vec{r} = (-1,1,1) \parallel r. \end{cases}$; $s: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-(-2)}{2}$.

$\therefore \begin{cases} \vec{s} = (-3,1,2) \parallel s \\ B = (1,0,-2) \in s \end{cases}$ $\therefore \vec{AB} = (-2,-1,-2)$.

Daí, $\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

$\therefore \{\vec{r}, \vec{s}, \vec{AB}\}$ L.I. e $\vec{r} \cdot \vec{s} = 6 \neq 0$

$\therefore$ r e s são reversas e não-ortogonais

Q16. Sejam r e s retas distintas em E^3. Considere as seguintes afirmações:

V (I) a distância entre r e s será igual a zero se, e somente se, r e s forem concorrentes;

V (II) se r e s forem paralelas, então para qualquer ponto $P \in r$, valerá que a distância entre P e s será igual à distância entre r e s;

F (III) se r e s forem reversas, então para qualquer ponto $P \in r$, valerá que a distância entre P e s será igual à distância entre r e s.

Assinale a alternativa correta:

(a) todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;

(b) apenas a afirmação (III) é necessariamente verdadeira;

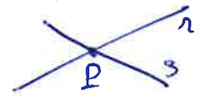
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são necessariamente verdadeiras;

(d) apenas as afirmações (II) e (III) são necessariamente verdadeiras;

(e) apenas a afirmação (I) é necessariamente verdadeira.

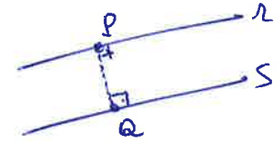
(16) Por definição $d(r,s) = \min\{d(P,Q) \in \mathbb{R} : P \in r \text{ e } Q \in s\}$

Logo, se $r \cap s$ (r e s concorrentes) e $\{P\} = r \cap s$,



então $d(r,s) = d(P,P) = 0$.

Se $r \parallel s$ e $r \neq s$



, sendo $P \in r$ (qualquer) e $Q = \text{proj}_s P$, $d(r,s) = d(P,Q) = d(P,s)$. Logo (II) é V.

Finalm/ se r e s são reversas, $d(r,s) = d(P,Q)$ onde $\{P\} = r \cap t$ e $\{Q\} = s \cap t$, onde t é a perpendicular comum a r e a s.

Logo, (III) é F. ; e da discussão acima conclui-se que $d(r,s) = 0$ $(r \neq s) \iff r \cap s$.

$\therefore$ (I) é V.