A

1ª Questão: Está fixado um sistema de coordenadas arbitrário.
Sejam as retas:

$r : X = (1,1,0) + \lambda(2,1,2) \ (\lambda \in \mathbb{R})$ e $s : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$

(a) (1,0) Estude a posição relativa de r e s.

(b) (1,5) Obtenha uma equação geral para o plano π que passa pela origem e é paralelo às retas r e s.

(a) $s: \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor de s é $\vec{s} = (2,1,1)$ e um ponto de s é $S = (-1,0,-3)$.

Um vetor diretor de r é $\vec{r} = (2,1,2)$ e um ponto de r é $R = (1,1,0)$.

Vamos analisar a dependência linear de $\{\vec{s}, \vec{r}, \vec{RS}\}$ pelo $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 0$. Portanto $\{\vec{s}, \vec{r}, \vec{RS}\}$ é ld e as retas são coplanares

Como os vetores $\vec{s}$ e $\vec{r}$ são l.i. (suas coordenadas não são proporcionais, concluímos que as retas são <u>concorrentes</u>.

(b) Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são diretores do plano procurado. Uma equação geral desse plano é dada pelo $\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$

ou seja $\boxed{\pi : x - 2y = 0}$

A

2ª Questão: Considere o sistema linear nas incógnitas x_1, x_2 e x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_2 + \beta x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

(a) (1,0) Ache os valores de α e β para que o conjunto das soluções do sistema seja infinito.

(b) (0,5) Ache os valores de α e β para que o conjunto das soluções do sistema seja unitário.

(c) (1,0) Supondo $\alpha = 6$ e $\beta = -2$, ache o conjunto das soluções do sistema.

Vamos escalonar a matriz dos coficientes do sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 3 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & -1 & 4-\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha+3\beta \\ 0 & 0 & 4-\alpha-\beta \end{pmatrix}$$

O sistema fica: $\begin{cases} x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ x_2 - \beta x_3 = 0 \\ (\alpha+3\beta) x_3 = 0 \\ (4-\alpha-\beta) x_3 = 0 \end{cases}$

(a) Para que o conjunto das soluções do sistema seja infinito devemos ter $\alpha + 3\beta = 0$ e $4 - \alpha - \beta = 0$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 6 \\ \beta = -2 \end{matrix}$$

(b) Para que o conjunto das soluções seja unitário devemos ter $\alpha + 3\beta \neq 0$ <u>ou</u> $\alpha + \beta \neq 4$

(c) Supondo $\alpha = 6$ e $\beta = -2$ o sistema fica:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{matrix}$$

O conjunto solução é

$\{(-4a, -2a, a) \,/\, a \in \mathbb{R}\}$

3ª Questão: Está fixado um sistema de coordenadas ortogonal $(O, \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$, onde $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal positiva.

(a) (1,5) Seja n a reta que passa pelo ponto $A = (-1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi : x - y - 4 = 0$. Determine o ponto B (diferente de A) da reta n tal que a distância de B ao plano π é igual a distância de A ao plano π.

(b) (1,0) Ache os pontos da reta $s : X = (2, 0, 1) + \lambda(1, -2, 1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ que distam $\frac{9}{\sqrt{5}}$ da reta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

(a) Um vetor normal ao plano π é $\vec{n} = (1, -1, 0)$. A equação vetorial da reta normal ao plano π que passa pelo ponto A é

$$n : X = (-1, 2, 3) + \lambda(1, -1, 0) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Primeira Resolução:

Seja M o ponto de interseção da reta n com o plano π. Como M é um ponto de n temos que $M = (-1 + \lambda, 2 - \lambda, 3)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como M pertence ao plano π temos que $-1 + \lambda - 2 + \lambda - 4 = 0$, isto é, $\lambda = \frac{7}{2}$. Logo $M = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 3)$.
Como $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AM}$ temos:

$$B = A + \overrightarrow{AB} = A + 2\,\overrightarrow{AM} = (-1, 2, 3) + 2\,(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, 0)$$

e portanto $B = (6, -5, 3)$.

Segunda Resolução:

Como B é um ponto de n temos que $B = (-1 + \lambda, 2 - \lambda, 3)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $d(A, \pi) = d(B, \pi)$ temos que

$$\frac{|-1 - 2 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|-1 + \lambda - 2 + \lambda - 4|}{\sqrt{2}}.$$

Simplificando obtemos $|2\lambda - 7| = 7$. Logo $\lambda = 0$ (e neste caso $B = A$ e não é o que queremos) ou $\lambda = 7$ e obtemos $B = (6, -5, 3)$.

(b) Denotemos por X os pontos procurados. Como $X \in s$ temos

$$X = (2 + \lambda, -2\lambda, 1 + \lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Como $d(X, r) = \frac{9}{\sqrt{5}}$ temos

$$\frac{||\overrightarrow{AX} \wedge \vec{r}||}{||\vec{r}||} = \frac{9}{\sqrt{5}},$$

onde $A \in r$ e $\vec{r}$ é um vetor diretor de r. Tomando $A = (0, 0, 0)$ e $\vec{r} = (0, 1, 2)$, temos

$$\overrightarrow{AX} \wedge \vec{r} = (-1 - 5\lambda, -4 - 2\lambda, 2 + \lambda).$$

Logo

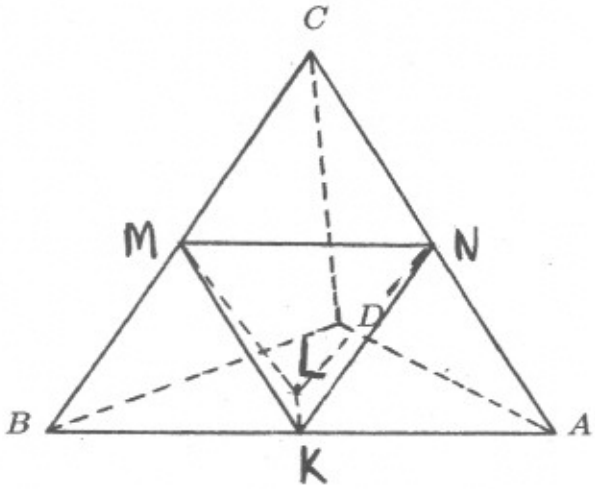
$$\frac{\sqrt{(-1 - 5\lambda)^2 + (-4 - 2\lambda)^2 + (2 + \lambda)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando obtemos $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Portanto,

$$\lambda = 1 \text{ e } X = (3, -2, 2) \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -2 \text{ e } X = (0, 4, -1).$$

4ª Questão: Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal, onde E é uma base ortonormal positiva.

Sejam $C = (-1,-1,-1)_\Sigma$, $\overrightarrow{CB} = (1,1,0)_E$, $\overrightarrow{CD} = (-2,-1,-1)_E$, $\overrightarrow{CA} = (0,1,1)_E$. Considere o tetraedro $MNKL$, onde M, N e K são os pontos médios dos segmentos BC, CA e BA, respectivamente, e o ponto L é o baricentro (intersecção das medianas) do triângulo BDA.



(a) (1,5) Ache as coordenadas dos vértices M, N, K e L.

(a) (1,0) Calcule o volume do tetraedro $MNKL$.

a) $B = C + \overrightarrow{CB} = (0, 0, -1) \Rightarrow M = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$

$A = C + \overrightarrow{CA} = (-1, 0, 0) \Rightarrow N = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$K = B + \overrightarrow{BK} = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = (-3, -2, -1)$

$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BK} = (-\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KD} =$

$= (-\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}) \Rightarrow L = K + \overrightarrow{KL} = (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -1)$

b) $\overrightarrow{LK} = (\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{LM} = (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}, \frac{2}{3} - \frac{1}{2}, 0) = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$

$\overrightarrow{LN} = (\frac{4}{3} - 1, \frac{2}{3} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$

$$V \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6 \cdot 4} - \frac{1}{6 \cdot 4}\right) = \frac{1}{36}.$$