Prova 0

Gabarito

VEJA MAIS EM:
WWW.POLITECNICOS.COM.BR

Q1: Sejam $\mathcal{E}$ uma base de V^3, a um número real e sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ os vetores

$$\vec{v} = (2,0,1)_{\mathcal{E}}, \quad \vec{w} = (-1,0,2)_{\mathcal{E}}, \quad z = (0,a,1)_{\mathcal{E}}$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais

(II) O conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{w}\}$ não é base de V^3

(III) Se $\vec{z}$ não é ortogonal à $\vec{v}$ e $\vec{w}$ então

$\{\text{proj}_{\vec{v}}\vec{z}, \text{proj}_{\vec{w}}\vec{z}, \vec{z}\}$ é L.D. se e somente se $a = 0$

Quais afirmações são necessariamente verdadeiras?

(I) NÃO é necessariamente verdadeira. Como a base $\mathcal{E}$ não é ortonormal, o produto escalar de $\vec{v}$ com $\vec{w}$ não pode ser calculado como a soma dos produtos das coordenadas.

Este produto pode dar qualquer valor, dependendo da base.

Por exemplo, suponha que $\mathcal{B}$ é uma base O.N. e sejam

$$\vec{e}_1 = (1,1,0)_B$$
$$\vec{e}_2 = (2,0,0)_B$$
$$\vec{e}_3 = (0,0,-1)_B$$

Seja $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base. Note que

$\langle e_1, e_1 \rangle = 2$	$\langle e_2, e_2 \rangle = 4$
$\langle e_1, e_2 \rangle = 2$	$\langle e_2, e_3 \rangle = 0$
$\langle e_1, e_3 \rangle = 0$	$\langle e_3, e_3 \rangle = 1$

Logo,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle 2e_1 + e_3, -e_1 + 2e_3 \rangle = -2\langle e_1, e_1 \rangle + 4\langle e_1, e_3 \rangle - \langle e_1, e_3 \rangle + 2\langle e_3, e_3 \rangle$$

$$= -4 + 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \not\perp \vec{v} \quad \text{(para esta base } \mathcal{E}\text{)}$$

(II) Verdade:

A projeção ortogonal de $\vec{w}$ em $\vec{v}$ é paralela à $\vec{v}$, ou seja

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \lambda \vec{v}$$

Logo, $\{\vec{v}, \vec{w}, (1-\lambda)\vec{v}\}$ não é L.I.

$\Rightarrow$ Não é base

III) Verdadeira

$$\left.\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{v}}\vec{z} &= \lambda\vec{v} \\ \text{proj}_{\vec{w}}\vec{z} &= \mu\vec{w} \end{aligned}\right\} \lambda, \mu \neq 0 \text{ pois } \vec{z} \text{ não é ortogonal à } \vec{v} \text{ ou } \vec{w}$$

O conjunto $\{\text{proj}_{\vec{v}}\vec{z}, \text{proj}_{\vec{w}}\vec{z}, \vec{z}\}$ é L.D.

se e somente se $\{\lambda\vec{v}, \mu\vec{w}, \vec{z}\}$ é L.D.

$\Leftrightarrow \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ L.D. $\Leftrightarrow a = 0$

Q.2 Seja n um inteiro positivo, A, B matrizes $n \times n$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $-A = A^T \Rightarrow \det(A) = -1$

(II) $\det(A+B) = \det A + \det B$

(III) $\det(AB) = \det(BA)$

Quais afirmações são necessariamente verdadeiras?

(I) FALSA considere $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = A^T$

mas $\det A = 0 \neq -1$

(II) Falsa Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det A + \det B = 1 + 0 = 1$

$$\det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

(III) Verdadeiro

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$$

Q3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule $\det(A^3) - \det\left(3(A^t)^{-1}\right)$

Note que:

$$\det(A^3) = (\det A)^3$$

$$\det A^t = \det A$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\det(3A) = 3^4 \det A = 81 \det A$$

Logo,

$$\det(A^3) - \det\left(3(A^t)^{-1}\right) = (\det A)^3 - \frac{81}{\det A}$$

Calculando:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 + 4 + 2 - 2 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \det(A^3) - \det\left(3(A^t)^{-1}\right) = 3^3 - \frac{3^4}{3} = 3^3 - 3^3 = 0$$

Q4) $\mathcal{E}$ base ort. de V^3

$\vec{v} = (1,-1,1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{w} = (-1,1,1)_{\mathcal{E}}$, $\vec{z} = (1,2,-1)_{\mathcal{E}}$

Se $\vec{x} = (a,b,c)_{\mathcal{E}}$ é ortogonal à $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e

$\text{proj}_{\vec{z}}\vec{x} = \vec{z}$, determine $a+b+c$

$\vec{x} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \langle (a,b,c), (1,-1,1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0$ (i)

$x \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle (a,b,c), (-1,1,1) \rangle = 0 \Leftrightarrow -a + b + c = 0$ (ii)

(i)+(ii) $\Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$.

$\Rightarrow a = b$

$\Rightarrow \vec{x} = (a,a,0)_{\mathcal{E}}$

$\text{proj}_{\vec{z}}\vec{x} = \vec{z} \Leftrightarrow \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle}{\|\vec{z}\|^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3a}{6} = 1$

$\Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow a+b+c =$

$\Rightarrow \vec{x} = (2,2,0) \Rightarrow \boxed{a+b+c = 4}$

Q5: A matriz $n \times n$

y matriz $n \times 1$

Sistema linear $AX = Y$ onde X é matriz $n \times 1$

Pode-se afirmar que:

(a) Se o sistema possui solução $\Rightarrow \det A = 0$

(b) Se o sistema não possui solução $\Rightarrow \det A = 0$

(c) Se o sistema possui solução $\Rightarrow \det A \neq 0$

(d) se $\det A = 0 \Rightarrow$ o sistema não possui solução

(e) Se $\det A = 0 \Rightarrow$ o sistema possui infinitas soluções

Alternativa Correta: (b)

Pois se $\det A \neq 0 \Rightarrow$ o sistema possui (uma única) solução

Logo, se o sistema não possui solução

$\Rightarrow \det A = 0$

Q11 ABC triângulo equilátero de lado unitário

$\vec{v}$ unitário e ortogonal à $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$

Se $\vec{w} = 2\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{v}$

$\vec{z} = \vec{AB} + \vec{AC}$

Então as coordenadas de $\text{proj}_{\vec{z}}\vec{w}$ na base $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{v}\}$ são:

Solução:

$$\text{proj}_{\vec{z}}\vec{w} = \frac{\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle}{\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle}\vec{z}$$

Note que:

$\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle = 1$

$\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\langle \vec{AB}, \vec{v} \rangle = 0$

$\langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle = 1$

$\langle \vec{AC}, \vec{v} \rangle = 0$

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$

Logo

$$\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{AB} + \vec{AC}, \vec{AB} + \vec{AC} \rangle = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle + 2\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle$$

$$= 3$$

$$\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = \langle 2\vec{AB} + \vec{AC} + 2\vec{v}, \vec{AB} + \vec{AC} \rangle = 2\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle + 3\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle + \langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{AB} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{AC} \rangle$$

$$= 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \text{proj}_{\vec{z}}\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} = \boxed{\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)}$$

Q12: $n \geq 2$. Assinale a alternativa correta:

(a) A, B matrizes $n \times n$ tais que $AB = 0$

$\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

(b) Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $\det A = 0$, então existe uma matriz B $n \times n$ tal que

$B \neq 0$ e $AB = 0$

(c) Se A & C são matrizes $n \times n$ tal que $\det A = 0$ então existem infinitas matrizes B tais que $AB = C$

(d) A matriz $n \times n$ tal que $\det A = 0$, B matriz $n \times n$ arbitrária

$\Rightarrow AB = 0$

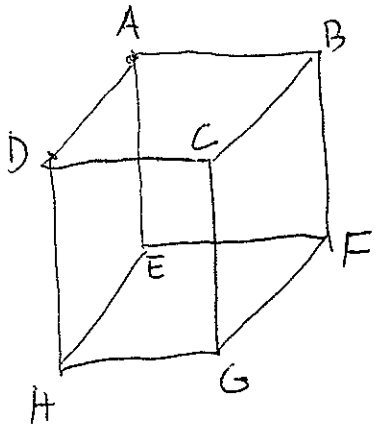
(e) A & B matriz $n \times n$ tais que $\det A \neq 0$ & $\det B \neq 0 \Rightarrow AB = BA$

Alternativa Correta (b)

Pois se $\det A = 0 \Rightarrow$ o sistema homogêneo $AB = 0$ é possível indeterminado

$\Rightarrow$ existe solução não nula B.

Q14



cubo de aresta unitária

Assinale a alternativa <u>falsa</u>

(a) $\{\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AE}\}$ é base O.N. de V^3

(b) $\langle \vec{AF}, \vec{AG} \rangle = -1$

(c) $\{\vec{AF}, \vec{AG}, \vec{AH}\}$ é L.I.

(d) $\vec{AG} + \vec{HE} + \vec{FD} = \vec{BC}$

(e) $\{\vec{AD}, \vec{GC}, \vec{HG}\}$ é base de V^3 e as coordenadas de $\vec{AG}$ nessa base são $(1, -1, 1)$

<u>Resposta</u>: (b) é a alternativa falsa:

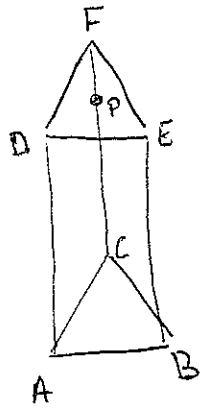
Vamos escrever os vetores na base O.N. $\{\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AE}\}$

$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \vec{AE} = (0, 1, 1)$

$\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DH} + \vec{HG} = \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AB} = (1, 1, 1)$

Logo, $\langle \vec{AF}, \vec{AG} \rangle = 2 \neq -1$

Q16:



$\vec{CP} = 5\vec{PF}$

Determine a soma das coordenadas de $\vec{DP}$ na base $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AF}\}$

Solução:

$$\vec{DP} = \vec{DF} + \vec{FP} = \vec{AC} + \vec{FP} \quad (*)$$

$$\vec{FP} + \vec{PC} + \vec{CA} = \vec{FA} = -\vec{AF}$$

$$\Rightarrow \vec{FP} + \vec{PC} = \vec{AC} - \vec{AF}$$

Mas $\vec{PC} = -\vec{CP} = -5\vec{PF} = 5\vec{FP}$

$$\Rightarrow 6\vec{FP} = \vec{AC} - \vec{AF}$$

$$\Rightarrow \vec{FP} = \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AF}$$

Substitui em $(*) \Rightarrow \frac{7}{6}\vec{AC} + -\frac{1}{6}\vec{AF} = \vec{DP} \Rightarrow$ Soma das coord.

$$\frac{7}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

①/

Soluções da P1

Q9) - Como qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de u, v e w, estes vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Logo, o determinante da matriz de suas coordenadas é $\neq 0$.

Q10) $w = \text{proj}_w(v)$ pois o triângulo com lados $\|v\|=13$, $\|w\|=12$, $\|v-w\|=5$ é retângulo

Q11)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 1 & b \\ 1 & a^2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & (1-a) & 1 & (b-2a) \\ 0 & (a^2-1) & 0 & (2-2a) \end{bmatrix}$$

$a \neq \pm 1$

Q13) $\|u+v\|^2 = 676 = 169 + 361 + 2\langle u, v\rangle$

$2\langle u, v\rangle = 146$

$\langle u, v\rangle = 73$

$\|u - \pi v\|^2 = 169 - 146\pi + 361\pi^2$

Q14) Só (III) é verdadeira, pois

(I) $A^t = -A \Rightarrow \det A = -1$. é falsa

Tome $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) (II) $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Falso. Tome $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4 \quad e$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1+1 = 2$$

Q 15)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & b \\ 3 & -1 & 2 & 2b \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 5 & 5 & 5b \\ 0 & (1+2a) & (1+a) & (1+ab) \end{bmatrix}$$

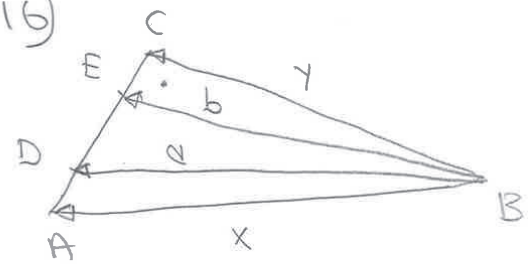
$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -a & (1-b-ab) \end{bmatrix}$$

A equação

$$-az = 1-b-ab$$

só terá solução se $a \neq 0$ ou $b = 1$

Q 16)



$$\overline{AD} = \frac{1}{5}\overline{AC}$$

$$\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AC}$$

$$\vec{BD} = a = x + \frac{1}{5}(y-x) = x + \frac{y}{5} - \frac{x}{5} = \frac{4}{5}x + \frac{y}{5}$$

$$= \alpha x + \beta y$$

$$\alpha = \frac{4}{5}, \quad \beta = \frac{1}{5}$$

(3)

$$\overrightarrow{BE} = b = \gamma x + \delta y = x + \frac{3}{4}(y - x) =$$

$$x - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}y = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}y$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \;,\; \delta = \frac{3}{4}$$