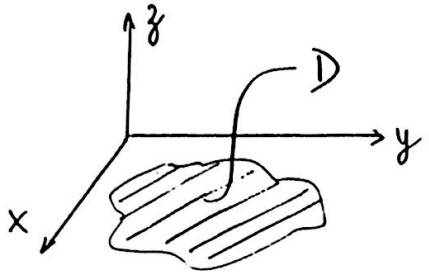
Resumo P2 - Cálculo III - 2017 R$ 8,00

Autor: Douglas Siqueira (Douglasiqueira@gmail.com)

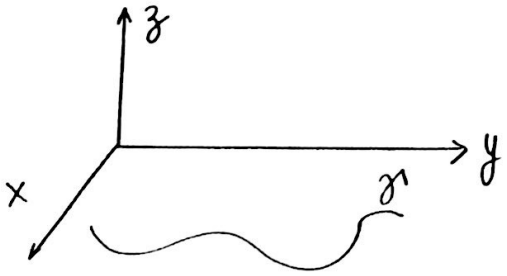
Eventuais erros ou dúvidas, reportem pelo Facebook/Email.

① Integral de Linha

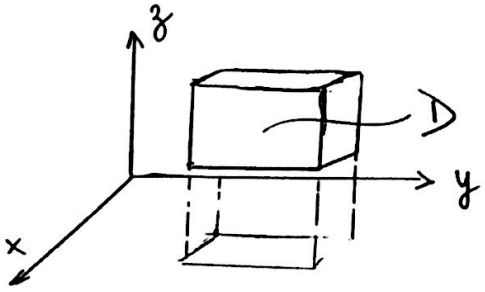
Nas integrais estudadas até aqui, o domínio de integração podia ser uma área (integral dupla) ou um volume (integral tripla). Dá-se o nome de integral de linha integral que tem como domínio uma curva. Podemos entender curva como sendo uma figura gerada pelo movimento contínuo de um ponto no espaço.



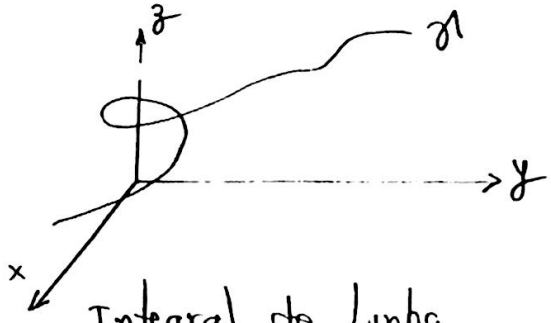
Integral dupla sobre $D \subset \mathbb{R}^2$



Integral de linha sobre $\gamma \subset \mathbb{R}$
(γ: curva)



Integral tripla sobre $D \subset \mathbb{R}^3$



Integral de Linha sobre $\gamma \subset \mathbb{R}^3$

A função a ser integrada em uma curva pode ser um <u>campo escalar</u> ou um <u>campo vetorial</u>. A notação usual para cada caso é apresentada a seguir.

$$\int_\gamma F\,ds \equiv \text{Integral do campo escalar } F \text{ sobre a curva } \gamma$$

$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ≡ Integral do campo vetorial $\vec{F}$ sobre a curva γ.

Obs.: $\vec{F}$ é um campo vetorial se todo ponto do seu domínio está associado a um vetor $(\vec{F}: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$.

F é um campo escalar se todo ponto do seu domínio está associado a um escalar $(F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$.

---

② Parametrização de Curvas

Parametrizar uma curva consiste em criar funções coordenadas com auxílio de parâmetros auxiliares. De modo geral, usaremos o parâmetro t para criar as funções coordenadas $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$. Assim, para cada valor de t, um ponto $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ é determinado.

$\boxed{\text{Exemplo 2.1}}$ Parametrizar as curvas a seguir.

(a) $y = x$ para $0 \leq x \leq 2$.

(b) $y = x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

(c) $x^2 + y^2 = a^2$ (circunferência de raio a)

(d) γ é composta dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$, depois a $(1,1,0)$ e depois a $(1,1,1)$.

(e) γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$ a $(3,2)$.

(f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Elipse)

Resolução: Exemplo 2.1

(a) $(x,y) = (x,x)$

Fazendo $x = t$,

$$\begin{cases} \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t,t) \\ 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

(b) $(x,y) = (x, x^2)$

Fazendo $x = t$,

$$\begin{cases} \gamma(t) = (t, t^2) \\ 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

(c) $x = a\cos t$

$y = a \operatorname{sen} t$

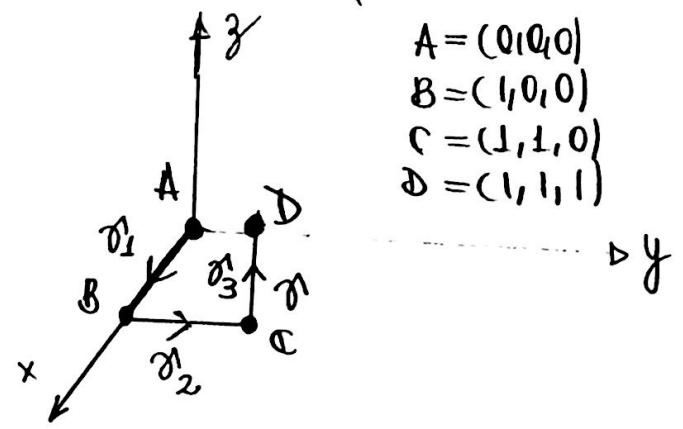
$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 2\pi \\ \gamma(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t) \end{cases}$$

Observe que a parametrização satisfaz a equação da circunferência.

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t =$$

$$= a^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = a^2$$

(d) Vamos esboçar γ:



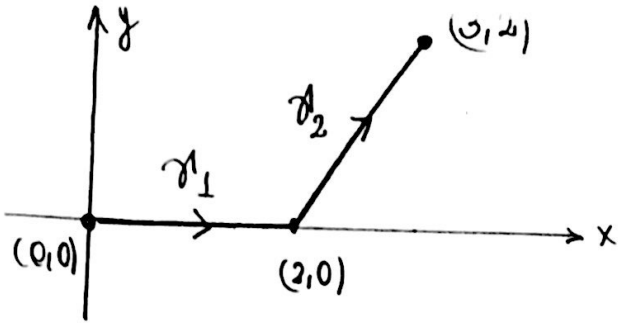
$A = (0,0,0)$
$B = (1,0,0)$
$C = (1,1,0)$
$D = (1,1,1)$

Podemos parametrizar γ usando 3 curvas auxiliares γ_1, γ_2 e γ_3 tal que $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

$\cup \equiv$ União

Parametrizando:

$$\begin{cases} \gamma_1 = (t, 0, 0), \ 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2 = (1, t, 0), \ 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_3 = (1, 1, t), \ 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \end{cases}$$



$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2$

$\gamma_2(t) = (t, 2t-4), \quad 2 \leq t \leq 3$

Obs.: para determinar a parametrização de γ_2, determinamos a equação da reta que passa por $(2,0)$ e $(3,2)$.

$$\begin{cases} y = ax+b = 2x+b \\ y(2)=0 \Rightarrow b = -4 \end{cases} \Rightarrow y = 2x-4$$

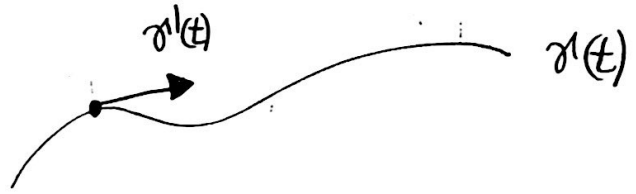
(f) $x = a\cos t$
$y = b\,\text{sen}\,t$
$\gamma(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$
$0 \leq t \leq 2\pi$

verificando a parametrização:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\,\text{sen}^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$$

---

(3) VETOR TANGENTE γ'



Para obter o vetor tangente $\gamma'(t)$ de uma curva parametrizada $\gamma(t)$, basta derivar as funções coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$ em relação ao parâmetro t.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Obs.: $\|\gamma'(t)\|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2$ (módulo do vetor tangente)

④ Integral de Linha para Campo Escalar

$$\int_{\gamma} F\,ds = \int_{t_0}^{t_f} F(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt$$

- $\gamma(t)$ é a curva parametrizada com t variando no intervalo $t_0 \leq t \leq t_f$.
- $\|\gamma'(t)\|$ é o módulo do vetor tangente da curva $\gamma(t)$
- $F(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t))$

Exemplo 4.1

Calcule $\int_{\gamma} F\,ds$, γ é a semi-circunferência $x^2+y^2=16$, $x \geq 0$, e $F(x,y) = xy^4$.

Resolução:

1.) Parametrização para γ.

$$\gamma(t) = (4\cos t, 4\,\text{sen}\,t), \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

2.) Vetor tangente (módulo)

$$\gamma'(t) = (-4\,\text{sen}\,t, 4\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 4^2\,\text{sen}^2 t + 4^2\cos^2 t = 4^2 \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = 4$$

3) $F(\gamma(t)) = x(t) \cdot y(t)^4 = 4\cos t \cdot 4^4\,\text{sen}^4 t = 4^5 \cos t\,\text{sen}^4 t$

4) $$\int_{\gamma} F\,ds = \int_{t_0}^{t_f} F(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4^5 \cdot \cos t \cdot \text{sen}^4 t \cdot 4\,dt =$$

$$= 4^6 \left[\frac{1}{5} \cdot \operatorname{sen}^5 t\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4^6 \left[\frac{1}{5}\left(1-(-1)\right)\right] = 2 \cdot \frac{4^6}{5} = 1638,4$$

4.1 Comprimento de curvas

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} 1\, ds = \int_{t_0}^{t_f} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

4.2 Massa de curvas

$$M(\gamma) = \int_{\gamma} \delta\, ds = \int_{t_0}^{t_f} \delta(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt$$

δ: densidade de massa

$\boxed{\text{Exemplo 4.2}}$ Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Resolução:

1) $\|\gamma'(t)\| = ?$

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t\cos t, 1)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \cos^2 t - \cancel{2\operatorname{sen} t\cos t \cdot t} + t^2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2\cos^2 t + \cancel{2\operatorname{sen} t\cos t \cdot t} + 1$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = t^2 + 2 \Rightarrow \|\gamma(t)\| = \sqrt{t^2+2}$$

2) $$L(\gamma) = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{t^2+2}\, dt = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right]}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\, dt \overset{*}{=} \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{tg^2u+1}\ \sqrt{2}\sec^2u\,du =$$

$$* \quad tgu = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \sqrt{2}\,tgu \Rightarrow \frac{dt}{du} = \sqrt{2}.\sec^2u \Rightarrow dt = \sqrt{2}\sec^2u\,du$$

$$\begin{cases} t=0 \Rightarrow tgu=0 \Rightarrow u=0 \\ t=\sqrt{2} \Rightarrow tgu=1 \Rightarrow u=\pi/4 \end{cases}$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \sec^2u\,\sec u\,du \underset{\text{"PARTES"}}{=} 2\left[tgu\sec u\Big|_0^{\pi/4} - \underbrace{\int_0^{\pi/4} tgu.\,tgu\sec u\,du}_{**}\right]$$

$$** \quad \int_0^{\pi/4} tg^2u\sec u\,du = \int_0^{\pi/4}\sec^3u\,du - \int_0^{\pi/4}\sec u\,du$$

$$\therefore \int_0^{\pi/4}\sec^3u\,du = \sqrt{2} - ** = \sqrt{2} - \int_0^{\pi/4}\sec^3u\,du + \int_0^{\pi/4}\sec u\,du$$

$$2\int_0^{\pi/4}\sec^3u\,du = \sqrt{2} + \ln(\sec u + tg\,u)\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$\therefore \boxed{L(\sigma) = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)}$$

Exemplo 4.8 Determine a massa de um arame cujo formato é o da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, t^2)$, onde $0 \leq t \leq 1$, e a densidade de massa em cada ponto é $\delta(x,y,z) = x$.

Resolução:

$$\gamma'(t) = (2, 2t, 2t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{4+4t^2+4t^2} = \sqrt{4(1+2t^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = 2\sqrt{1+2t^2}$$

$$m(\gamma) = \int_0^1 (2t) \cdot 2\sqrt{1+2t^2}\, dt = \int_0^1 4t \cdot \sqrt{1+2t^2}\, dt =$$

$$= \frac{2}{3}(1+2t^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(3)^{3/2} - \frac{2}{3}(1) = 2\sqrt{3} - 2/3$$

---

5 Integral de Linha para Campo Vetorial

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma'}(t)\, dt$$

Produto ESCALAR

Notação: $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

$$= P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$= (P, Q, R)$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma (P,Q,R) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Exemplo 5.1 Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ para

(a) $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}$, onde γ é o arco de circunferência $\gamma(x) = (x, \sqrt{4-x^2})$, ligando $(-2,0)$ a $(2,0)$.

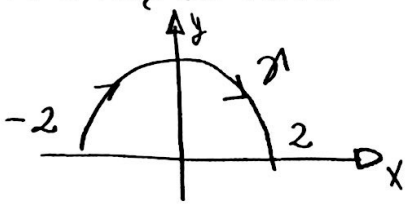
(b) $\vec{F}(x,y,z) = 2(x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$, onde γ é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, percorrida uma vez em sentido anti-horário.

(c) $\int_\gamma x^3y^2z\,dz$, γ é dada por $x=2t$, $y=t^2$, $z=t^2$, $0\leq t\leq 1$.

(d) $\int_\gamma z^2dx - z\,dy + zy\,dz$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(0,1,1)$, de $(0,1,1)$ a $(1,2,3)$ e de $(1,2,3)$ a $(1,2,4)$.

Resolução - Exemplo 5.1

(a) (I) Esboço da curva γ



(II) Parametrização de γ

$\gamma(t) = (2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)$

$-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

$\gamma'(t) = (2\cos t, -2\,\text{sen}\,t)$

(III) Integral

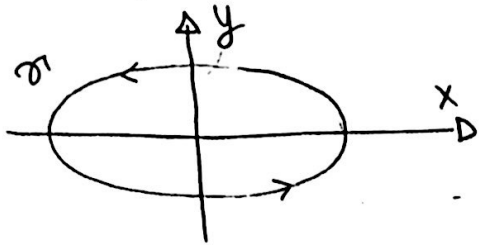
$$\int_\gamma \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (2\cos t, 4), (2\cos t, -2\,\text{sen}\,t)\rangle dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2 t - 8\,\text{sen}^3 t - 8\cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt +$$

$$-8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\text{sen}^3 t\,dt - 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt +$$

$$-8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} t - \cos^2 t \operatorname{sen} t \, dt - 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \operatorname{sen} t \, dt = (\ldots) = 2\pi$$

(b) (I) esboço da curva γ



(II) Parametrização

$\gamma(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\gamma'(t) = (-a \operatorname{sen} t, b\cos t)$

(III) Integral

$F(\gamma(t)) = (2(a\cos t + b \operatorname{sen} t), a\cos t - b \operatorname{sen} t)$

$$\int_\gamma F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \langle (2a\cos t + 2b \operatorname{sen} t, a\cos t - b \operatorname{sen} t), (-a \operatorname{sen} t,$$

$$b\cos t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} -2a^2 \operatorname{sen} t \cos t - 2ab \operatorname{sen}^2 t + ab\cos^2 t +$$

$$-b^2 \operatorname{sen} t \cos t \, dt = (\ldots) = -ab\pi$$

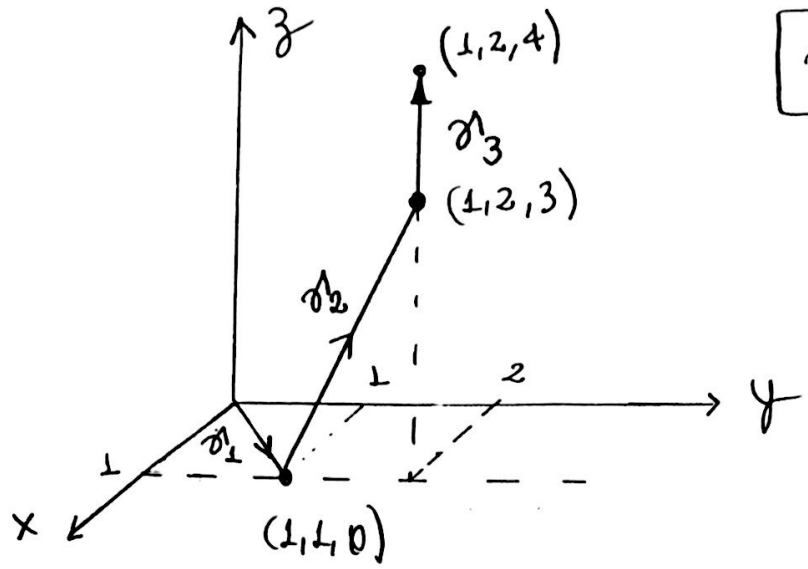
(c) $\gamma(t) = (2t, t^3, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$

$\gamma'(t) = (2, 2t, 2t)$

$$\int_\gamma x^3 y^3 z \, dz = \int_0^1 8t^3 \cdot t^4 \cdot t^2 \cdot (2t)\, dt = 16\int_0^1 t^{10} dt =$$

$$= \frac{16}{11}$$

(d) (I) Esboço de γ



$$\boxed{\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3}$$

(II) Parametrização das curvas

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (0, t, t), & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_1'(t) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_2(t) = (t, t+1, 2t+1), & 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2'(t) = (1, 1, 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_3(t) = (1, 2, t), & 3 \leq t \leq 4 \\ \gamma_3'(t) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

(III) Integral

$$\int_\gamma \underbrace{z^2 dx - z\,dy + 2y\,dz}_{\circledast} = \int_{\gamma_1} \circledast + \int_{\gamma_2} \circledast + \int_{\gamma_3} \circledast$$

$$\int_{\gamma_1} \circledast = \int_0^1 t^2 \cdot 0 - t \cdot 1 + 2t \cdot 1\, dt = 1/2$$

$$\int_{\gamma_2} \circledast = \int_0^1 (2t+1)^2 \cdot 1 - (2t+1)\cdot(1) + 2(t+1)(2)\, dt = \frac{25}{3}$$

$$\int_{\gamma_3} \circledast = \int_3^4 t^2 \cdot 0 - t \cdot 0 + 2(2)\cdot(1)\, dt = 4$$

$$\int_{\gamma} \circledast = \frac{1}{2} + \frac{25}{3} + 4 = \frac{3 + 50 + 24}{6} = \frac{77}{6}$$

---

⑥ Rotacional de um campo vetorial

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$
$$= P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$$

O rotacional do campo $\vec{F}$ ($\text{rot}\,\vec{F}$) é dado por:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \rightarrow$$

determinante!

$$\Rightarrow \quad \text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$\boxed{\text{Exemplo 6.1}}$ Calcular o rotacional do campo $\vec{F} = (2xe^y - x^2y - y^3/3,\ x^2e^y + \text{sen}\,y,\ 10)$.

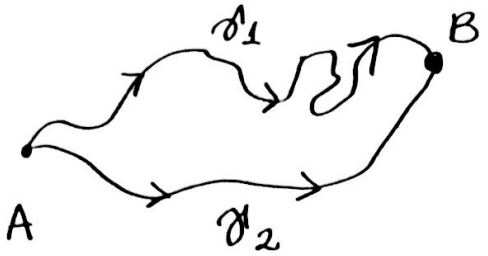
$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xe^y - x^2y - y^3/3 & x^2e^y + \text{sen}\,y & 10 \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} - (0-0)\vec{j} +$$

$$+ \left(2xe^y - 2xe^y + x^2 + y^2\right)\vec{k} = (x^2 + y^2)\,\vec{k}$$

(7) Campo Conservativo

Um campo vetorial $\vec{F}$ é dito conservativo se satisfaz as seguintes propriedades:

(1) A integral de $\vec{F}$ não depende do caminho. (depende apenas do ponto inicial e do ponto final)



$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(2) A integral de $\vec{F}$ sobre uma curva fechada dá zero.

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

(3) $\vec{F}$ possui função potencial, ou seja, existe $\varphi(x,y,z)$ tal que:

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{F}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = (P, Q, R)$$

Obs.: Se $\vec{F}$ é conservativo,

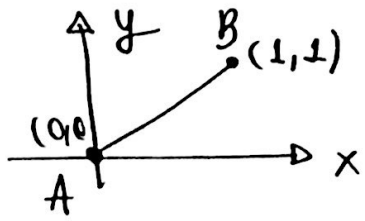
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

φ: Função Potencial de $\vec{F}$

(VER EXEMPLO A SEGUIR)

Exemplo: $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (conservativo)

γ: $(0,0)$ a $(1,1)$



$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$$

Vamos resolver usando o fato de $\vec{F}$ ser conservativo. Existe $\varphi(x,y)$ tal que $\vec{\nabla}\varphi = \vec{F}$.

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (x, y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x \Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + \underbrace{f(y)}_{\circledast}$$

integrando em relação a x

Derivando (*) em relação a y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f'(y) = y \Rightarrow f(y) = y^2/2 \quad (**)$$

$$(**) \rightarrow (*): \quad \varphi(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$\begin{cases} \gamma(A) = (0,0) \\ \gamma(B) = (1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(\gamma(A)) = 0 \\ \varphi(\gamma(B)) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(B)) - \varphi(\gamma(A)) = 1 - 0 = 1$$

$\circledast$ Quando integramos, precisamos somar uma constante ao final da integração. Como estamos integrando em relação a x, funções que dependem exclusivamente de y são consideradas constantes.

Conferindo o resultado:

$$\begin{cases} \gamma(t) = (t,t) \\ 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma'(t) = (1,1) \\ \vec{F}(\gamma(t)) = (t,t) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (t,t)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 2t\,dt = t^2\Big|_0^1 = 1 \checkmark$$

Voltando às propriedades de campo conservativo...

(4) se $\vec{F}$ é conservativo, $\text{rot}\,\vec{F} = 0$

(Não vale a volta, isto é, o fato do rotacional ser nulo não garante que $\vec{F}$ é conservativo).

- Resumindo: $\vec{F}$ é conservativo

$$\underbrace{\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi \Leftrightarrow \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \Leftrightarrow \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$$

$$\Downarrow \quad \not\Uparrow \quad \text{não vale a volta!}$$

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{F} = 0}$$

---

8 Teorema de Green ($\mathbb{R}^2$)

↳ Teorema que relaciona a integral de linha ao longo de uma curva FECHADA no plano Oxy com a integral dupla sobre a região limitada por essa curva. Denotando por ∂D a curva e por D a região, podemos escrever:

$$\int_{\partial D} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{k}\,dx\,dy$$

Produto escalar!

Condições para usar o teorema de Green:

1) $\vec{F}$ é um campo de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

2) O domínio D é fechado, limitado pela curva ∂D.

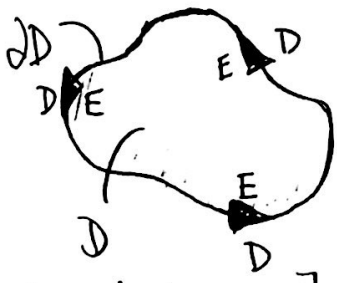
3) A curva ∂D é formada por um número finito de curvas regulares por partes que estão orientadas positivamente.

Obs: $\boxed{\text{curva regular}}$ possui vetor tangente não nulo.

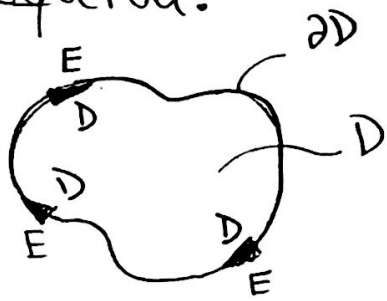
$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é regular $\Leftrightarrow$
$\gamma'(t) \neq 0, \ \forall t \in I$.

$\boxed{\text{Orientação de Curvas}}$

No contexto do teorema de Green, dizemos que ∂D está orientada positivamente se, ao percorrer ∂D (bordo da região), a região permanece à esquerda.

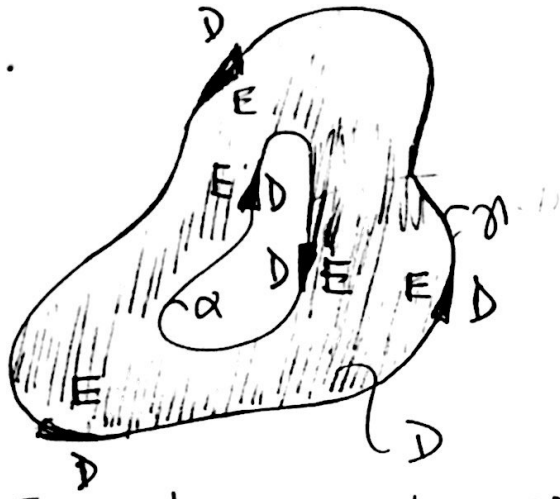


[∂D Orientada Positivamente]

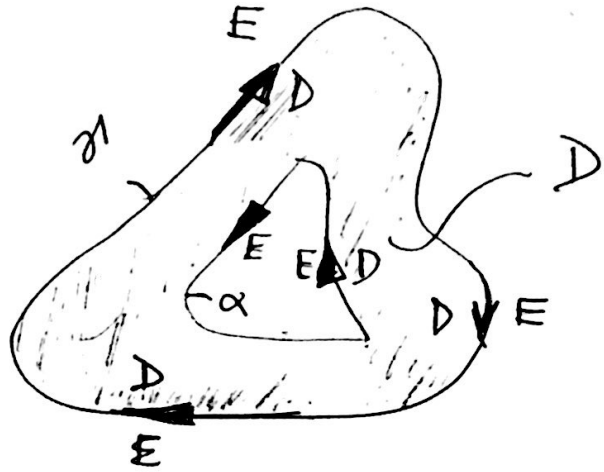


[∂D Orientada Negativamente]

$\begin{cases} E \equiv \text{Lado esquerdo} \\ D \equiv \text{Lado direito} \end{cases}$



[Orientação Positiva ∂D
$\partial D = \alpha \cup \gamma$]



[Orientação Negativa ∂D
$\partial D = \alpha \cup \gamma$]

<u>Obs</u>: O teorema de Green pode ser escrito de outro modo:

(a) $$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{D} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{k}\, dx\,dy \quad (\gamma = \partial D)$$

(b) $$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \quad (\gamma = \partial D)$$

As formas (a) e (b) são equivalentes

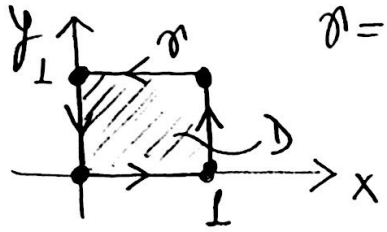
$$\left(\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \,;\ \text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \right)$$

⑨ Aplicações do Teorema de Green

Exemplo 9.1

Calcule $\oint_{\gamma} x^2y\,dx + xy^3\,dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado positivamente.

Ⓘ Esboço da região:



$\gamma = \partial D$

Ⓘⓘ Rotacional

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^3 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{rot}\vec{F} = (y^3 - x^2)\vec{k}$$

Para $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ convém decorar esse resultado

Ⓘⓘⓘ Teo. Green

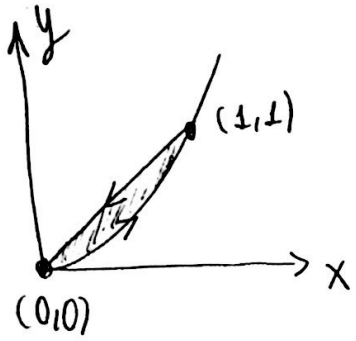
$$\int_{\gamma} x^2y\,dx + xy^3\,dy = \iint_D (y^3 - x^2)\,\vec{k}\cdot\vec{k}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^1 y^3 - x^2\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 y^3x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 dy = \int_0^1 y^3 - \frac{1}{3}\,dy = y^4/4 - y/3\Big|_0^1 = \frac{-1}{12}$$

Exemplo 9.2

Calcule $\oint_{\gamma} (x+2y)dx + (x-2y)dy$, onde γ consiste do arco de parábola de $(0,0)$ a $(1,1)$ e do segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$, orientada positivamente.

(I) Esboço



(II) Rotacional

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = (1-2)\vec{k} = -\vec{k}$$

(III) Teorema de Green

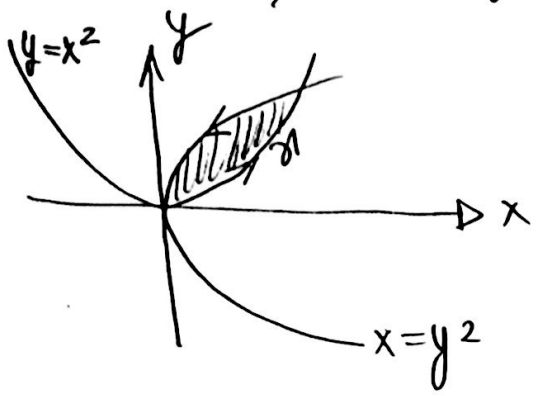
$$\oint_{\gamma} (x+2y)dx + (x-2y)dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (-\vec{k})\cdot\vec{k}\, dy\, dx =$$

$$= -\int_0^1 y\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 x^2 - x\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$$

Exemplo 9.3

Calcule $\oint_{\gamma} (y+e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy$, onde γ é a fronteira da região limitadas pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário

(I) Esboço da Região



(II) Rotacional

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{k} = \vec{k}$$

(III) teorema de Green

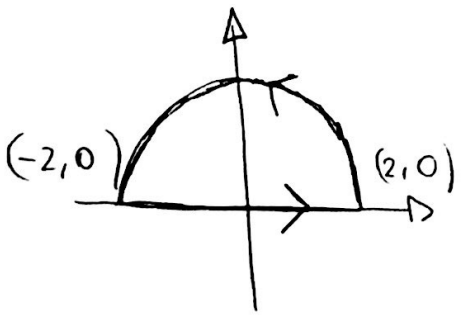
$$\oint_\gamma (y+e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x+\cos y^2)\,dy = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}-x^2\,dx = \frac{2}{3}\cdot x^{3/2} - \frac{x^3}{3} = \hookrightarrow = 1/3$$

$\boxed{\text{Exemplo 9.4}}$

Calcule $\oint_\gamma xy\,dx + 2x^2\,dy$, γ consiste do segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2+y^2=4$, $y\geq 0$, orientada positivamente.

(I) Esboço da Região



(II) Rotacional

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{k} = 3x\vec{k}$$

(III). Teorema de Green

$$\oint_{\gamma} xy\,dx + 2x^2 dy = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} 3x\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} 3xy\Big|_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} 3x\sqrt{4-x^2}\,dx = 3\left[\frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2}\cdot\frac{1}{(-2)}\right]\Bigg|_{-2}^{2} = 0$$

Obs: Por mudança de variável

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $J = r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2$

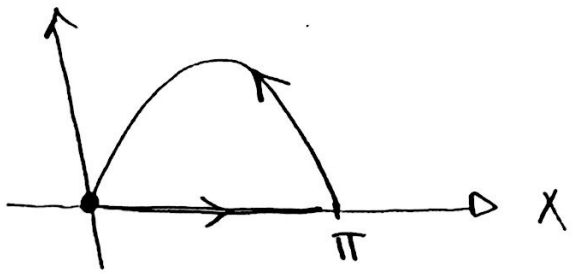
$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2} (3r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_{0}^{\pi} r^3\cos\theta\Big|_{0}^{2} d\theta = \int_{0}^{\pi} 8\cos\theta\,d\theta =$$

$$= 8.\,\text{sen}\,\theta\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

$\boxed{\text{Exemplo 9.5}}$

$\oint_{\gamma} (xy + e^{x^2})dx + (x^2 - \ln(1+y))dy$, γ consiste do segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y = \text{sen}\,x$, orientada positivamente.

(I) Esboço da Região



(II) Rotacional

$$\text{rot}\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\vec{k} =$$

$$= 2x - x\,\vec{k} = x\,\vec{k}$$

(III) teorema de Green

$$\int (xy + e^{x^2})\,dx + (x^2 - \ln(1+y))\,dy =$$

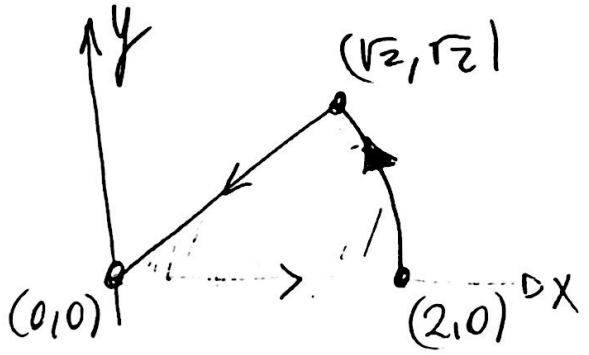
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}x} x\,dy\,dx = \int_0^{\pi} x\operatorname{sen}x\,dx \underset{\text{PARTES}}{=} -x\cos x\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ \int_0^{\pi}\cos x\,dx = -\pi\cdot(-1) + \operatorname{sen}x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$\boxed{\text{Exemplo 9.6}}$

Calcule $\oint_{\gamma} (y^2 - x^2y)\,dx + (xy^2)\,dy$, γ consiste do arco de circunferência $x^2+y^2=4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$.

(I) Esboço da Região



(II) Rotacional

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\vec{k} =$$

$$= y^2 - (2y - x^2)\,\vec{k} =$$

$$= y^2 - 2y + x^2\,\vec{k}$$

(III) Teorema de Green

$$\oint_{\partial} (y^2 - x^2 y)\,dx + (xy^2)\,dy \overset{*}{=} \int_0^{\pi/4}\int_0^{2} (r^2 - 2r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, d\theta \overset{**}{=}$$

$*$ $x = r\cos\theta$; $y = r\,\text{sen}\,\theta$; $0 \leq \theta \leq \pi/4$; $0 \leq r \leq 2$;
$J = r$

$$\overset{**}{=} \int_0^{\pi/4} \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3}{3}\text{sen}\,\theta \Big|_0^2 d\theta = \int_0^{\pi/4} 4 - \frac{16}{3}\text{sen}\,\theta\, d\theta =$$

$$= \left(4\theta + \frac{16}{3}\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} = \pi + \frac{16}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{16}{3} =$$

$$= \pi + \frac{16}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

(10) <u>CURVAS AUXILIARES</u>

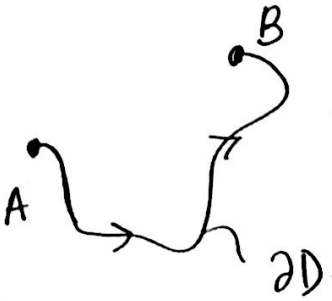
Conforme vimos, para poder aplicar Green, a curva ∂D deve ser fechada, regular por partes e orientada positivamente. Existem casos em que ∂D não satisfaz essas propriedades:

(1) ∂D orientada negativamente:

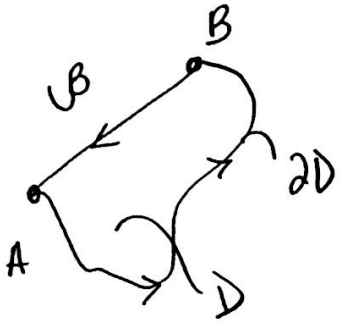
$$\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\iint_D \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dx\,dy$$

colocamos o sinal negativo

(2) ∂D é aberta



Neste caso, criamos uma curva de forma geométrica ARBITRÁRIA PARA LIGAR o ponto B AO ponto A. Como A FORMA É ARBITRÁRIA, DE MODO GERAL, A CURVA AUXILIAR SERÁ UMA RETA (CURVA MAIS SIMPLES possível).



$\beta \equiv$ CURVA AUXILIAR

O teorema de Green fica:

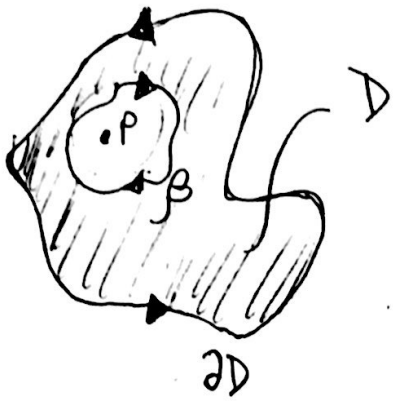
$$\oint_{\beta \cup \partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\, dy$$

$$\int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\, dy$$

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\, dy - \int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(3) Isolar singularidades

Imagine que ∂D enlaça um ponto em que o campo vetorial $\vec{F}$ não está definido. Para poder aplicar o teorema de Green, usamos uma curva auxiliar β para isolar esse ponto (ver pág. a seguir).



$P \equiv$ ponto em que $\vec{F}$ não está definido.

$\beta \equiv$ curva auxiliar para isolar P (de modo geral, usamos circunferências e elipses).

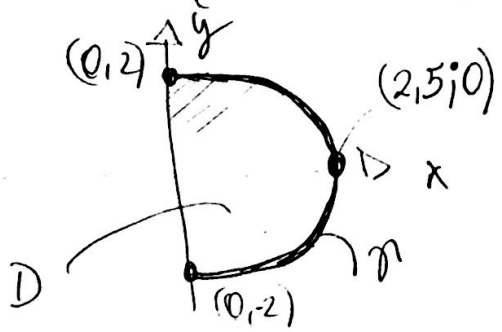
Aplicando o teorema de Green:

$$\int_{\partial D \cup \beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\,dy \Rightarrow \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\,dy - \int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$\boxed{\text{EXEMPLO 10.1}}$

Calcule $\int_\gamma x^2(5y\,dx + 7x\,dy) + e^y dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0,-2)$ a $(0,2)$ com $x \geq 0$.

(I) Esboço da Região



(II) γ <u>não</u> é <u>FECHADA</u>.

Vamos criar uma curva auxiliar β que vai de $(0,2)$ a $(0,-2)$

$$\begin{cases} \beta(t) = (0,2) + t\,(0,-4) \quad (*) \\ 0 \leq t \leq 1 \\ \beta(1) = (0,-4) \end{cases}$$

(*) $\beta(t)$ é obtido usando a eq. da reta do alg. linear:

$P + \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ($P \in \mathbb{R}$), $\vec{v}$ = vetor diretor

$\beta(t) = A + t \cdot \beta'(t) = (0,-4) + \ldots$

(III) Teorema de Green

Seja $\varphi = \gamma \cup \beta$ (curva fechada orientada positivamente)

$$\int_{\varphi} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\, dy$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\, dy}_{(A)} - \underbrace{\int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{(B)}$$

(A) A.1 - Rotacional de $\vec{F} \Rightarrow \text{rot}\vec{F} = 16x^3 \vec{k}$

A.2 - Mudança de Variável:

$x = 2{,}5\, r\cos\theta$; $y = 2{,}0\, r\,\text{sen}\,\theta$; $0 \leq r \leq 1$;

$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$; $J = 2 \cdot (2{,}5) \cdot r = 5r$

$\mathbb{C} = 5 \cdot 16 \cdot (2{,}5$

A.3 - $$\iint_D \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 (16(2{,}5)^2 r^2 \cos^2\theta)\, 5r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbb{C} \cos^2\theta \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathbb{C}}{4} \cdot \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\mathbb{C}}{4}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta\right] =$$

$$= \frac{\mathbb{C}}{8}\left(\theta + \underbrace{\frac{\text{sen}\,2\theta}{2}}_{0}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mathbb{C}}{8}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathbb{C}\pi}{8} = \frac{5 \cdot 16 \cdot (2{,}5)^2 \cdot \pi}{8} =$$

$$= \frac{125\pi}{2}$$

(B). B.1 $F'(\beta(t)) = e^{2-4t}\,\vec{j}$

B.2 $$\int_{\beta} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int^{1} (0, e^{2-4t})(0,-4)\,dt =$$

$$= \int_0^1 -4\cdot e^{2-4t}\,dt = e^{2-4t}\Big|_0^1 = e^{-2} - e^{2}$$

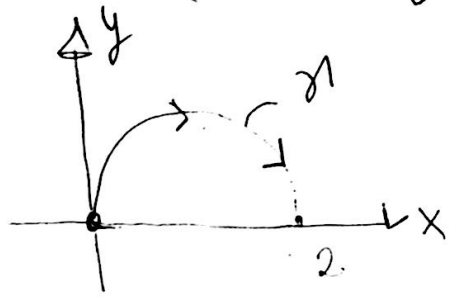
$$\therefore \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = A - B = \frac{125\pi}{2} + e^{2} - \frac{1}{e^{2}}$$

$\boxed{\text{EXEMPLO 10.2}}$

Calcule $\int_{\gamma} (2xe^{y} - x^2y - y^3/3)\,dx + (x^2e^{y} + \operatorname{sen} y)\,dy$,

sendo γ a circunferência $x^2+y^2-2x=0$, percorrida de $(0,0)$ a $(2,0)$ com $y \geq 0$.

(I) Esboço da Região

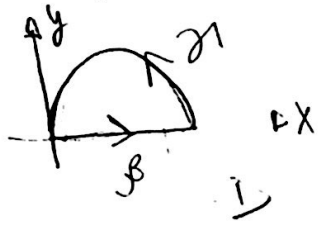


(II) Curva auxiliar

$\beta(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq 2$

$\beta'(t) = (1, 0)$

Então $\beta \cup (-\gamma)$:



(III) Teorema de Green

$$\int_{\beta\cup(-\gamma)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dx\,dy \Rightarrow \int_{\beta} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \iint_D \text{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dx\,dy \Rightarrow \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_\beta \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{A} - \underbrace{\iint_D \text{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dy\,dx}_{B}$$

(IV) (A) $$\int_\beta \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 2t\,dt = t^2\Big|_0^2 = 4$$

Obs: $\vec{F}(\beta(t))\cdot\beta'(t) = (2t, t^2)(1,0) = 2t$

(B) B.1: $$\text{rot}\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{k} = 2xe^y - (2xe^y - x^2 - y^2)\,\vec{k}$$
$$= x^2 + y^2\,\vec{k}$$

B.2: $$\iint_D \text{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dy\,dx = \int_0^\pi\int_0^1 (r^2\cos^2\theta + + 2r\cos\theta + 1 + r^2\text{sen}^2\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + 1 \\ y = r\,\text{sen}\theta \\ J = r \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$= \int_0^\pi (r^2 + 2r\cos\theta + 1)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \frac{r^4}{4} + \frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\theta + \frac{2}{3}\text{sen}\theta\Big|_0^\pi = \frac{3}{4}\pi$$

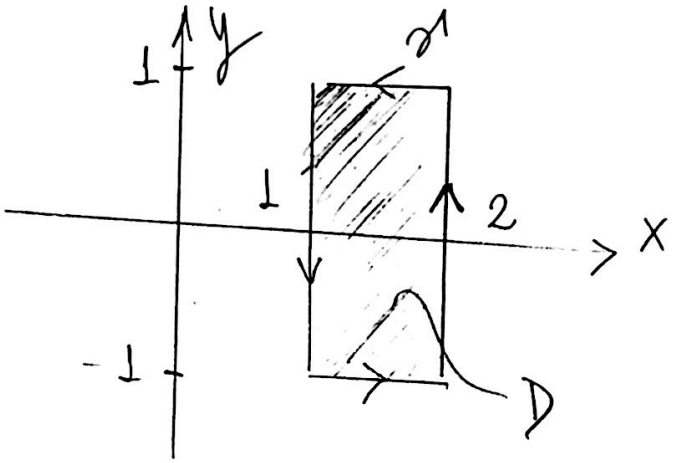
(V) $$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = A - B = 4 - \frac{3\pi}{4}$$

EXEMPLO 10.3

Calcule $\int_{\gamma} \vec{v}\, dr$, sendo γ a fronteira do retângulo $[1,2] \times [-1,1]$ e $\vec{v}(x,y) =$

$= 2\,\mathrm{arctg}(y/x)\,\vec{i} + \left(\ln(x^2+y^2) + 2x\right)\vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário.

(I) Esboço da Região



(II) Rotacional

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 2\right) + \frac{2}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x}\,\vec{k} = 2\vec{k}$$

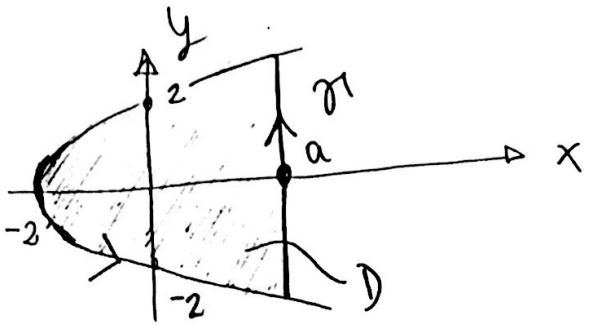
(III) teorema de Green

$$\int_{\gamma} \vec{v}\, dr = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} 2\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} 2x\Big|_{1}^{2} dy = \int_{-1}^{1} 2\, dy = 4$$

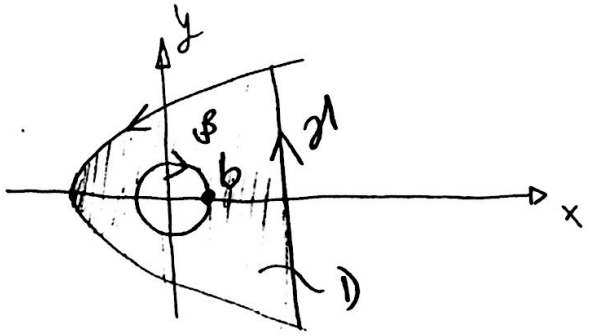
Exemplo 10.4

Calcule $\int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas curvas $y^2 = 2(x+2)$ e $x = a$, com $a > 0$, orientada no sentido horário.

(I) Esboço da Região



O campo deste exercício não está definido na origem. Para aplicar o teorema de Green, iremos criar uma curva auxiliar β para isolar a singularidade em $(0,0)$.



$\beta(t) = (b\,\text{sen}\,t,\ b\cos t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\beta'(t) = (b\cos t,\ -b\,\text{sen}\,t)$

(II) Pelo teorema de Green

$$\int_{\gamma \cup \beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{k}\,dy\,dx$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\iint_D \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{k}\,dy\,dx}_{A} - \underbrace{\int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{B}$$

(III) (A) (A.1) Rotacional

$$\text{rot}\,\vec{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{k} = \left[\frac{(x^2+y^2)-(x)(2x)}{[x^2+y^2]^2}\right] +$$

$$- \left[\frac{(-1)(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right]\vec{k} = 0$$

(A.2) $$\iint_D \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dx\,dy = 0$$

(B) $$\int_\beta \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{-b\cos t\, b\cos t + b\,\text{sen}\,t(-b\,\text{sen}\,t)}{b^2}\,dt =$$

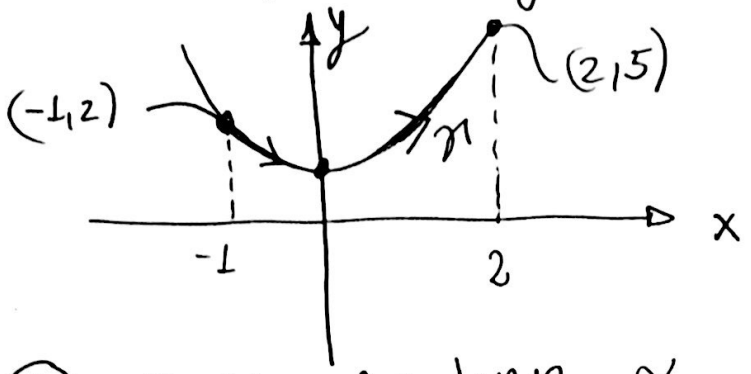
$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

(IV) $$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = A - B = 0 - 2\pi = -2\pi$$

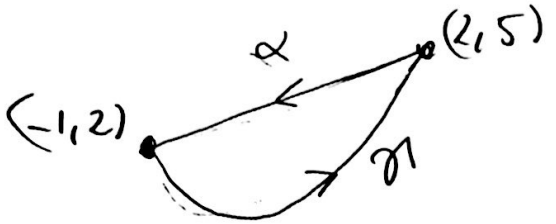
$\boxed{\text{Exemplo 10.5}}$

Calcule $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a curva $y = x^2+1$, $-1 \leq x \leq 2$, percorrida do ponto $(-1,2)$ a $(2,5)$.

(I) Esboço da Região



(II) CURVA AUXILIAR α



$$\alpha(t) = (2,5) + t(-3,-3)$$

$$\alpha(t) = (2-3t,\ 5-3t)$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\alpha'(t) = (-3,-3)$$

(III) Teorema de Green

$$\int_{\alpha \cup \gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \cancel{\text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{k}}^{\,0}\, dy\,dx$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \frac{(2-3t)(-3) + (5-3t)(-3)\,dt}{(2-3t)^2 + (5-3t)^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{18t - 21}{18t^2 - 42t + 29}\,dt = \frac{\ln(18t^2 - 42t + 29)}{2}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\ln(5)}{2} - \frac{\ln(29)}{2} \Rightarrow \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\ln 29}{2} - \frac{\ln 5}{2}$$

Exemplo 10.6

Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2/9} + y, \frac{x}{x^2+y^2/9} + 3x \right)$

e γ é a curva $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário.

(I) Dividir o campo $\vec{F}$:

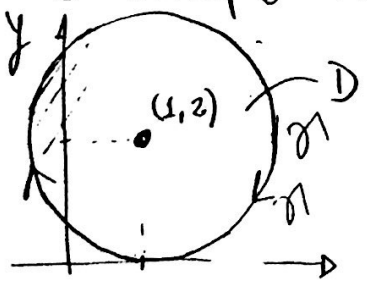
$$\vec{F} = \underbrace{\left(\frac{-y}{x^2+y^2/9}, \frac{x}{x^2+y^2/9} \right)}_{\vec{F_1}} + \underbrace{\left(y, 3x \right)}_{\vec{F_2}}$$

(II) Teorema de Green

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$$

(III) Singularidades?

O campo $\vec{F_1}$ não está definido em $(0,0)$



Como γ não enlaça a origem, podemos aplicar o teo. Green em D.

(IV)

$$\int_{\gamma} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = -\iint_D \text{rot}\vec{F_1} \cdot \vec{k}\, dy\, dx = 0$$

$$\text{rot}\vec{F_1} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{k} = \left[\frac{(x^2+y^2/9) - x(2x)}{(x^2+y^2/9)^2}\right] +$$

$$-\left[\frac{(-1)\left[x^2+y^2/9\right] + y\frac{2}{9}y}{(x^2+y^2/9)^2}\right]\vec{k} = 0\,\vec{k}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -\iint_D \text{rot}\vec{F_2} \cdot \vec{k}\, dy\, dx = -\iint_D 2\, dx\, dy =$$

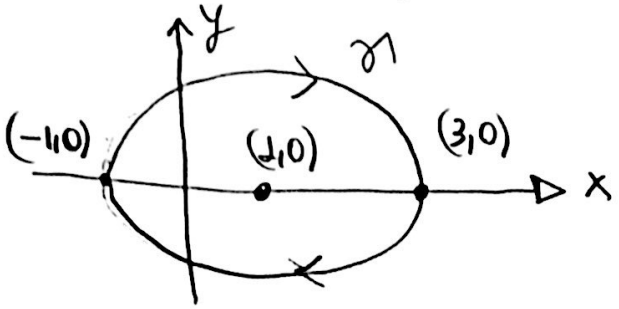
$$= -2 \cdot \text{Área círculo} = -2 \cdot \pi\, 2^2 = -8\pi$$

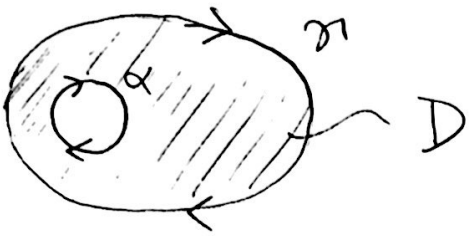
$$\therefore \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 - 8\pi = -8\pi$$

$\boxed{\text{Exemplo 10.7}}$

Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}$ é o mesmo do exempo 10.6 e γ é a curva $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário.

(I) Esboço da Região





(II) Singularidades?

O campo $\vec{F}$ não está definido em (0,0), vamos criar α (curva auxiliar) para isolar a singularidade

$$\alpha(t) = (a\,\text{sen}\,t,\ 3a\cos t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha'(t) = (a\cos t,\ -3a\,\text{sen}\,t)$$

A constante "a" é suficientemente pequena para que α fique no interior de γ.

(III) Teorema de Green

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r}}_{A} + \underbrace{\int_\gamma \vec{F_2}\cdot d\vec{r}}_{B}$$

(A) $$\int_{(-\gamma)\cup\alpha} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \iint_D \cancel{\text{rot}\,\vec{F_1}\cdot\vec{k}}^{\,0}\,dy\,dx \Rightarrow \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha \vec{F_1}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{F_1}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F_1}(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{-3a^2\cos^2 t - 3a^2\,\text{sen}^2 t}{a^2}\,dt =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} dt = -6\pi$$

(B) $$\iint_{\gamma} \vec{F_2}\cdot d\vec{r} = -\iint_D \text{rot}\vec{F_2}\cdot\vec{k}\,dy\,dx = -\iint_D 2\,dx\,dy = -2\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{área do círculo}} =$$

$$= -8\pi$$

$$\int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F_1}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F_2}\cdot d\vec{r} = -6\pi - 8\pi = -14\pi$$

(*) OBS.: Na integral $\int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, e em casos similares, usamos uma circunferência para isolar a singularidade na origem, pois o denominador fica igual ao raio da circunferência ao quadrado quando fazemos $F(\beta(t))$, com $\beta(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t)$, facilitando as contas. Por outro lado, se a integral for da forma $\int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2/9}$, ou similar, usamos uma elipse para isolar a singularidade. Por exemplo, $\beta(t) = (a\cos t, 3a\,\text{sen}\,t)$ é uma elipse. A integra fica:

$$\int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2/9} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{-3a\,\text{sen}\,t(-a\,\text{sen}\,t) + a\cos t\,(3a\cos t)}{\frac{a^2\cos^2 t}{1} + \frac{9a^2\,\text{sen}^2 t}{9}}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \frac{3a^2\,\text{sen}^2 t + 3a^2\cos^2 t}{a^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_f} 3\,dt$$

Resumindo, o denominador é quem define a curva (circunferência ou elipse, que iremos usar.

(11) Função Potencial

Na pág. 13 deste resumo, vimos que um campo conservativo (gradiente) possui função potencial $\varphi(x,y,z)$ tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$. Neste tópico, iremos verificar se $\vec{F}$ é conservativo usando o critério da função potencial.

Exemplo 11.1

Verifique se $\vec{F}(x,y) = (2xe^y + y)\vec{i} + (x^2e^y + x - 2y)\vec{j}$ é um campo gradiente e determine um potencial de $\vec{F}$.

$$\nabla\varphi = \vec{F} \Rightarrow \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(2xe^y + y,\ x^2e^y + x - 2y\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xe^y + y & (1) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y & (2) \end{cases}$$

Como (1) é mais simples que (2) em termos de integração iniciamos por (1):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xe^y + y \overset{(*)}{\Rightarrow} \varphi(x,y) = \frac{2x^2}{2}e^y + xy + g(y) \Rightarrow \underbrace{\varphi(x,y) = x^2e^y + xy + g(y)}_{(3)}$$

(*) integrando em x

Derivando (3) em relação a y:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2 + x + g'(y) \quad (4)$$

$$(4) \to (2): x^2e^y + xy + g'(y) = x^2e^y + x - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + C$$

Retornando à equação (3):

$$\varphi(x,y) = x^2e^y + xy - y^2 + C \qquad (**)$$

Como encontramos φ, $\vec{F}$ é um campo gradiente

Obs.: A expressão (**) fornece infinitas funções potenciais que diferem pela constante $C \in \mathbb{R}$. Para obter UMA função potencial, de modo geral, admite-se $C=0$.

$\boxed{\text{Exemplo 11.2}}$

$$\vec{F} = \left(x^2 + \operatorname{sen}x + \operatorname{arctg}x \cdot e^x + \frac{\ln(x^2+x)}{x^3+2x}\right)\vec{i} + \left(x + \operatorname{sen}y + \operatorname{arctg}y \cdot e^y\right)\vec{j}$$

é conservativo?

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{k} = (-0+1)\vec{k} = \vec{k} \neq 0$$

Como $\operatorname{rot}\vec{F} \neq 0$, $\vec{F}$ NÃO é conservativo.

(12) DOMÍNIO SIMPLESMENTE CONEXO

$D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio simplismente conexo se toda curva fechada em D puder ser contraída a um ponto em D. Em outras palavras, $D \subset \mathbb{R}^2$ é conexo se não apresenta singularidades ("buracos").

A definição informal para $D \subset \mathbb{R}^3$ é análoga, isto é, $D \subset \mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo se não apresenta singularidades ("buracos").

Teorema: Se $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial e D é um domínio simplismente conexo, o rotacional <u>nulo</u> garante que $\vec{F}$ é conservativo:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \text{ é conservativo}}$$

passa a valer a volta

Exemplo 12.1 Seja o campo

$$\vec{F} = (ayz\,\text{sen}(xy) + \text{sen}(yz),\ bxz\,\text{sen}(xy) + xz\cos(yz),\ cxy\cos(yz) + \cos(xy))$$

Determine as constantes reais a, b e c de modo que $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$.

<u>1º modo</u>: Aplicar a definição de rotacional, derivar esse campo gigante e resolver o sistema gerado nas variáveis a, b e c.

2º modo: Como o domínio de $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto simplismente conexo, rot $\vec{F} = \vec{0}$ garante que $\vec{F}$ é um campo gradiente.
Vamos encontrar $\varphi(x,y,z)$, função potencial de $\vec{F}$, tal que:

$$\nabla\varphi = \vec{F}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = ayz \cdot \operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}(yz) & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = bxz \operatorname{sen}(xy) + xz \cos(yz) & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = cxy \cos(yz) + \cos(xy) & (3) \end{cases}$$

Integrando (1) em x:

$$\varphi(x,y,z) = -ayz \frac{\cos(xy)}{y} + \operatorname{sen}(yz)x + g(y,z) \quad (4)$$

Derivando (4) em y e igualando a (2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = +az \operatorname{sen}(xy) \cdot x + \cancel{\cos(yz) \cdot zx} + \frac{\partial}{\partial y}(g(y,z)) = \cancel{xz \cos(yz)} +$$

$$+ bxz \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow axz \operatorname{sen}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(g(y,z)) = bxz \operatorname{sen}(xy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(g(y,z)) = 0 \Rightarrow g(z) \end{cases}$$

$$\therefore \varphi(x,y,z) = -az \cos(xy) + x \operatorname{sen}(yz) + g(z) \quad (5)$$

Derivando (5) em z e igualando a (3):

$$-a \cos(xy) + xy \cos(yz) + g'(z) = cxy \cos(yz) + \cos(xy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ c = 1 \\ g(z) = cte \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$