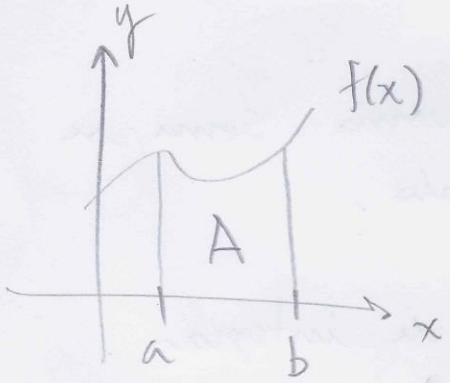
FUJA CÁLCULO III (RESUMO)

- O que mudou?

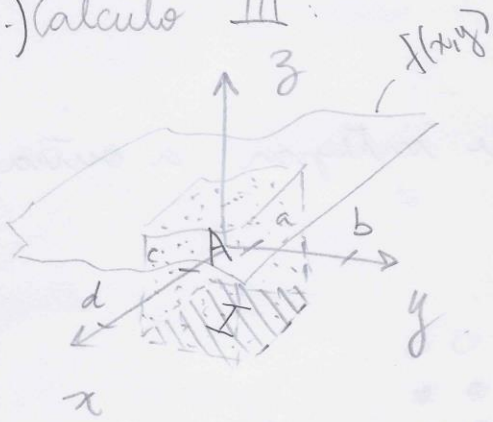
.·) Cálculo I:



$$\int_b^a f(x)\,dx \overset{N}{=} A$$

→ As integrais correspondiam à área embaixo do gráfico de uma função $f(x)$, em um determinado intervalo $[a,b]$.

·) Cálculo III:

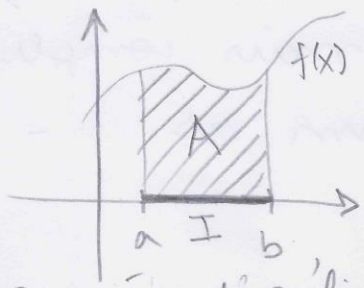


$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \overset{N}{=} A$$

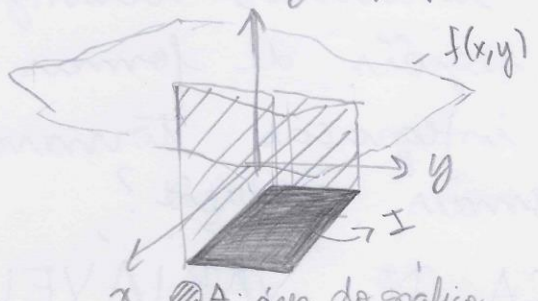
→ As integrais continuam correspondendo à área embaixo do gráfico. Contudo, agora seu intervalo de integração I abrange mais de uma variável.

→ É importante saber distinguir o que é intervalo e o que é área embaixo do gráfico. É comum confundir as áreas de gráficos de funções $f(x,y)$ com os intervalos de funções $f(x,y,z)$:

•) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (graf: $\mathbb{R}^2$) •) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (graf: $\mathbb{R}^3$) •) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (graf: $\mathbb{R}^4$)



A - área do gráfico
I: [a,b] - intervalo

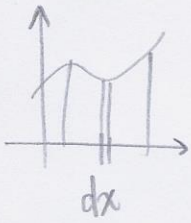


A: área do gráfico
I: intervalo

A - área do gráfico: não pode ser representada
I - intervalo

→ Mas como integrar?

•) CÁLCULO I:



Em cálculo I, o processo de integração se tratava de somar as "áreas" de cada dx do intervalo, resultando em um valor.

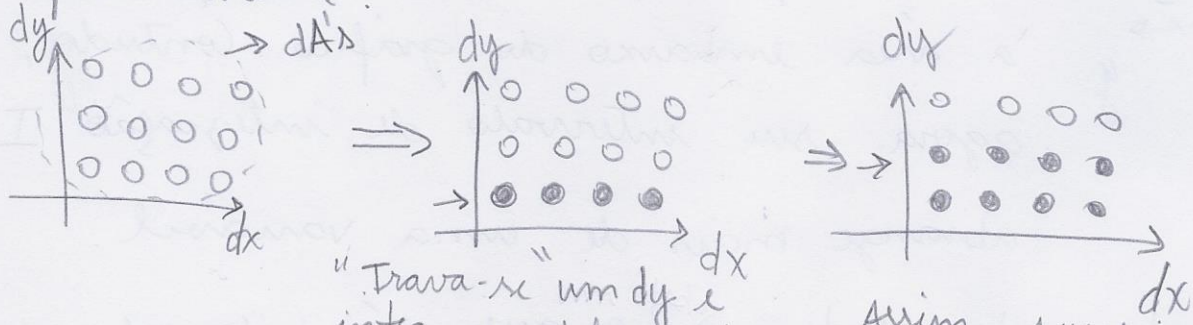
•) CÁLCULO III:

Em cálculo III, a premissa é a mesma. Soma-se as áreas de cada dA do intervalo.

O problema era ordenar esse dA na hora de integrar. Onde eu começo? Onde eu termino? Como percorrer todo o intervalo?

⇒ TEOREMA DE FUBINI

→ A idéia era "travar" uma variável e integrar a outra, repetidamente.



"Trava-se" um dy e integra-se todos os dx nessa "linha".

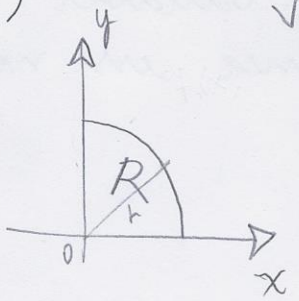
Assim, sucessivamente.

Isso evitava que um dA fosse somado duas vezes. E ainda permitia a escolha de qual variável travar.

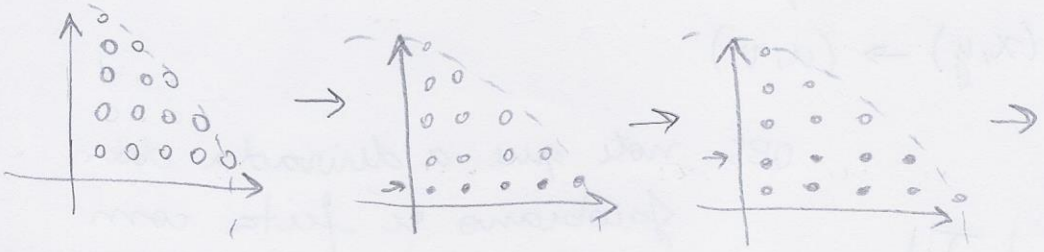
O segundo problema é que esse jeito funciona perfeitamente para intervalos retangulares. Mas, em se tratando de regiões de formas mais complexas, os intervalo de integração tornavam as integrais difíceis demais. Solução?

⇒ MUDANÇA DE VARIÁVEL

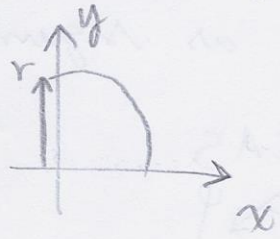
Ex.)



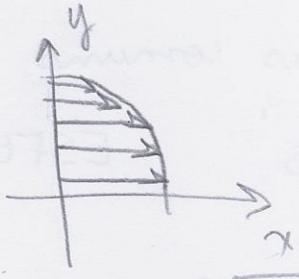
Vamos supor que essa seja a região de integração de uma $f(x,y)$. A função que delimita essa região é $x^2+y^2=r^2$, ou seja, para percorrer essa região inteira, é preciso que a integração pare na borda dessa circunferência.



Seguindo o exemplo, usando y como a variável que é travada, os intervalos de integração são:



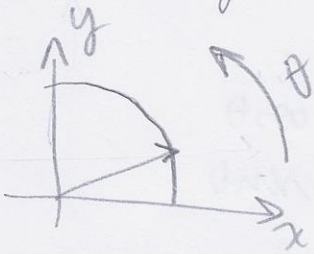
$0 \leq y \leq r$

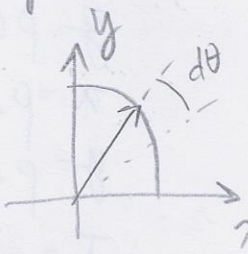


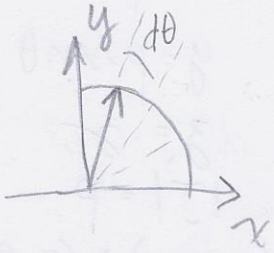
$0 \leq x \leq \sqrt{r^2-y^2}$

$$\Rightarrow \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Devido ao intervalo, essa integral pode ser complicadíssima, então olha-se o problema de outro jeito. Trava-se um ângulo e percorre-se um raio.







Essa forma simplica muito a integração:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^r f(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta \Rightarrow$$

sendo ·) ρ: raio

·) θ: ângulo

Assim como nas integrais simples, mudar a variável implica em adicionar um termo que compense esse novo dA:

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx \Rightarrow \int u \, du$$

$u = \operatorname{sen} x$

$du = \underbrace{\cos x}\, dx$

Esse termo é denominado jacobiano e é calculado da seguinte forma: $(x,y) \to (u,v)$

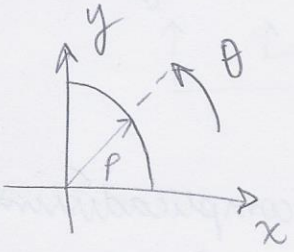
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = |J|$$

(módulo)

OBS: note que a derivada do jacobiano é feita com (x,y) em relação a (u,v) e não o contrário.

As mudanças de variáveis mais comuns são as seguintes:

POLARES



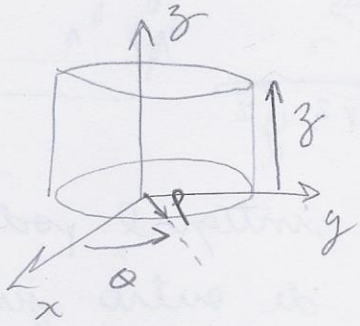
$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \operatorname{sen}\theta$

$J = \rho$

$(x,y) \to (\rho, \theta)$

CILÍNDRICAS



$x = \rho \cos\theta$

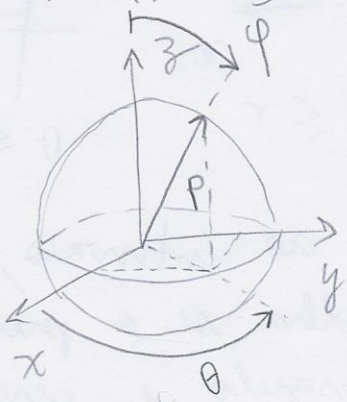
$y = \rho \operatorname{sen}\theta$

$z = z$

$|J| = \rho$

$(x,y,z) \to (\rho, \theta, z)$

ESFÉRICAS



$z = \rho \cos\varphi$

$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$

$y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$

$J = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

Por serem as mais comuns, é interessante saber transformá-las e seus jacobianos de cor. Quanto às integrais triplas, o processo é o mesmo que o das duplas, apenas com uma variável a mais. Explico mais na aula.