**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**2a. Prova - 1o. Semestre 2015 - 19/05/2015**

**Turma A**
**Questão 1:**

(a) Calcule $\int_\gamma e^z\,dx + xz\,dy + zy\,dz$ sendo $\gamma$ a curva dada pela intersecção das superfícies $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $y + x = 2$, percorrida de $(1, 1, -1)$ a $(1, 1, 1)$

(b) Seja $\vec{F}(x, y) = (y^2 - 2xy, \frac{2y}{y^2+1} - x^2 + 2xy)$.

(i) $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.

(ii) Calcule $\int_\alpha \vec{F}\,d\vec{r}$, para $\alpha$ a curva dada por $\alpha(t) = (t^3 - t, \sqrt{e^{t^2} - 1})$, $0 \le t \le 1$.

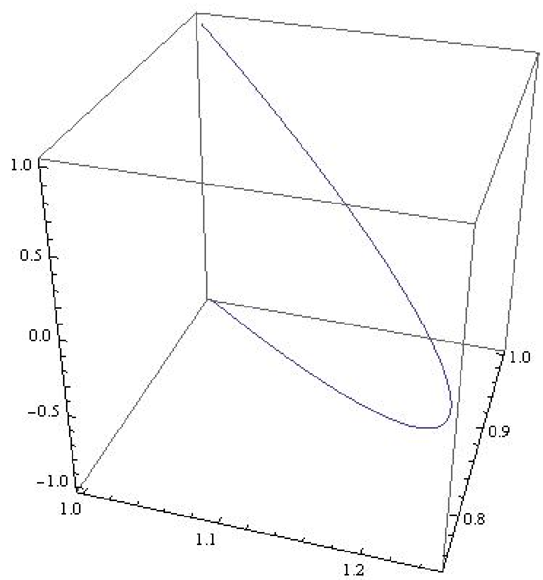
**Solução:**

(a) Inicialmente encontra-se uma parametrização para a curva $\gamma$. Da equação do plano dado, $y = 2 - x$. Substituindo na experssão do hiperbolóide de uma folha, vem que:

$$x^2 - (2 - x)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 4x + z^2 = 5 \Rightarrow x = \frac{5 - z^2}{4}$$

Como $y = 2 - x$, vem que $y = \frac{3+z^2}{4}$. Dessa forma, uma parametrização para a curva $\gamma$ é:

$$\gamma(t) = \left(\frac{5 - t^2}{4}, \frac{3 + t^2}{4}, t\right),\ -1 \le t \le 1$$



Calculando a integral:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt &= \int_{-1}^{1} \left(e^t, \frac{5t-t^3}{4}, \frac{3t+t^3}{4}\right).\left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 1\right)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} -\frac{te^t}{2} + \frac{5t^2-t^4}{8} + \frac{3t+t^3}{4}\,dt \\
&= \left(-\frac{1}{2}e^t(t-1) + \frac{5t^3}{24} - \frac{t^5}{40} + \frac{3t^2}{8} + t^4 16\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= -e^{-1} + \frac{5}{12} - \frac{1}{20} \\
&= \frac{11}{30} - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(b)

(i) O domínio do campo é o conjunto $\mathbb{R}^2$, que é um conjunto simplesmente conexo. Além disso verifica-se que

$$rot\vec{F} = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}).\vec{k} = ((-2x+2y) - (2y-2x))\vec{k} = \vec{0}.$$

Logo, o campo é conservativo.

(ii) Como o campo é conservativo, há uma função $\phi$, potencial, definida no mesmo domínio que $\vec{F}$, tal que $\nabla\phi = \vec{F}$. Dessa sentença, decorre que:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 - 2xy \underbrace{\Rightarrow}_{\int dx} \phi(x,y) = xy^2 - x^2y + h(y)$$

Derivando a função potencial em relação a $y$ e, em seguida, comparando-a com a seguinda componente do campo $\vec{F}$, encontra-se $h(y)$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2xy - x^2 + h'(y) = \frac{2y}{y^2+1} - x^2 + 2xy \Rightarrow h'(y) = \frac{2y}{y^2+1}$$

Assim:

$$h(y) = \int \frac{2y}{y^2+1} = \ln(y^2+1)$$

Logo um potencial é dado por:

$$\phi(x,y) = xy^2 - x^2y + ln(y^2+1)$$

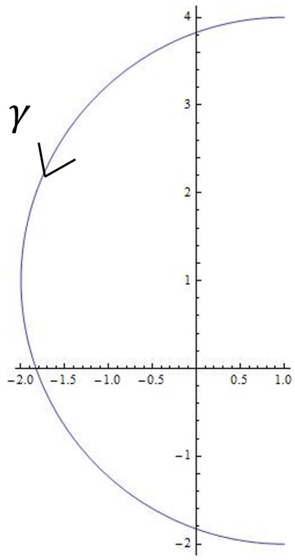
A curva é percorrida entre os pontos $\alpha(0) = (0,0)$ e $\alpha(1) = (0, \sqrt{e-1})$. Sendo assim a integral pedida é dada por:

$$\int_\alpha \vec{F}\,d\vec{r} = \phi(0,\sqrt{e-1}) - \phi(0,0) = 1 - 0 = 1$$

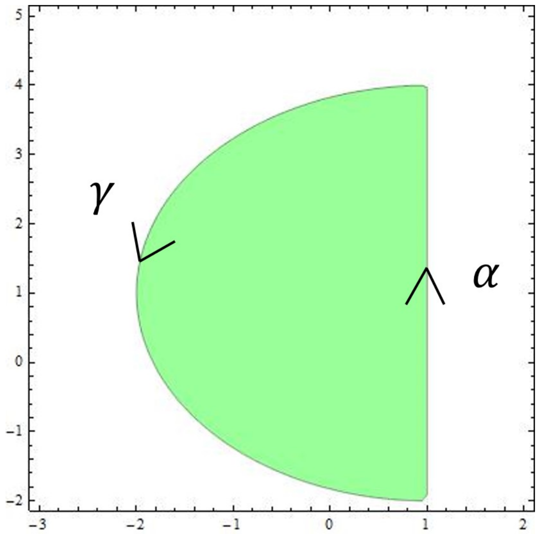
**Questão 2:**

Calcule $\int_\gamma (\operatorname{sen}(x^2) - y^2)dx + (xy + y^3)dy$ para $\gamma$ a curva dada por $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 7$ com $x \leq 1$ percorrida no sentido anti-horário.

**Solução:** A curva $\gamma$ é exibida na figura abaixo:




Para aplicação do Teorema de Green, os pontos $(1, -2)$ e $(1, 4)$ serão unidos por uma curva auxiliar $\alpha(t)$ de maneira a formar uma região fechada $R$ na qual $\gamma \cup \alpha = \partial R$:




A curva auxiliar é dada por $\alpha(t) = (1, t)\ \ -2 \leq t \leq 4$. Como $R$ está contido no domínio do campo e ambas as curvas estão orientadas positivamente em relação a $R$, pelo Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_R 3y\, dx\, dy$$

Para calcular a integral dupla utilizam-se coordenadas polares, com $x = r\cos\theta + 1$,$y = r\ \operatorname{sen}\theta + 1$ e $|J| = r$. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
\iint_R 3y\,dx\,dy &= 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^3 r^2\ \operatorname{sen}\theta + r\,dr\,d\theta \\
&= 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\ \operatorname{sen}\theta + \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^3 d\theta \\
&= 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 9\ \operatorname{sen}\theta + \frac{9}{2}\,d\theta \\
&= \left(-9\cos\theta + \frac{3\theta}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{27\pi}{2}
\end{aligned}$$

Calculando a integral sobre a curva auxiliar $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \vec{F}\,d\vec{r} &= \int_{-2}^{4} (\ \operatorname{sen} 1 - t^2, t + t^3).(0,1)\,dt \\
&= \int_{-2}^{4} t + t^3\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right)\Big|_{-2}^{4} = 8 + 4 - 2 - 4 = 66
\end{aligned}$$

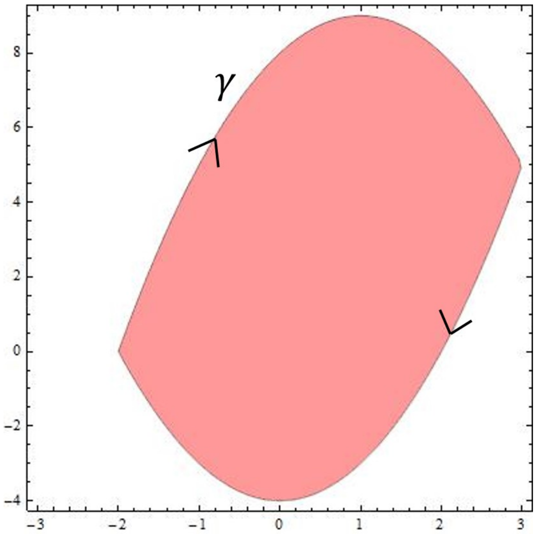
Com isso:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \frac{27\pi}{2} - 66$$

**Questão 3:**

Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{y}{(x-1)^2+4y^2}, \dfrac{-(x-1)}{(x-1)^2+4y^2}\right) + (-xy + \operatorname{sen} y, x^2 + x\cos y)$ e seja $\gamma$ a curva que é fronteira da região limitada pelos gráficos das funções $y = 8 + 2x - x^2$ e $y = x^2 - 4$ percorrida no sentido horário. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$.

**Solução:** A região compreendida entre as funções é exibida abaixo:

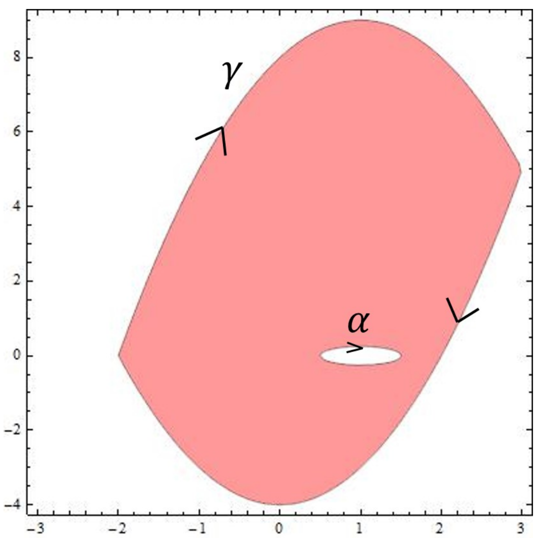



Sendo que a intersecção das parábolas ocorre quando $8 + 2x - x^2 = x^2 - 4 \Rightarrow x = 3, x = -2$

Seja $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, sendo $\vec{F_1}(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+4y^2}, \frac{-(x-1)}{(x-1)^2+4y^2}\right)$ e $\vec{F_2}(x,y) = (-xy + \operatorname{sen} y, x^2 + x\cos y)$. Vamos calcular a integral de cada campo separadamente.

O campo $\vec{F_1}$ tem singularidade em $(1,0)$, ponto que está no interior da região limitada por $\gamma$. Para utilizar o Teorema de Green, será utilizada uma curva $\alpha(t)$ que isole a singularidade de $\vec{F_1}$.

Seja $a$ suficientemente pequeno para que a curva $\alpha(t) = (a \operatorname{sen} t + 1, \dfrac{a\cos t}{2})$, $t \in [0, 2\pi]$, esteja contida no interior de $\gamma$. Note que $\alpha$ está orientada no sentido horário.



Seja $R$ a região limitada por $\alpha$ e $\gamma$. Logo a fronteira de $R$, $\partial R$ é $\alpha \cup \gamma$. O campo é de classe $C^1$ em todo $R$.

Como $rot\vec{F}_1.\vec{k} = \frac{-1[(x-1)^2+4y^2]+(x-1)2(x-1)}{((x-1)^2+4y^2)^2} - \frac{1[(x-1)^2+4y^2]+y8y}{((x-1)^2+4y^2)^2} = 0$, e $\gamma$ está orientada negativamente, o Teorema de Green fornece:

$$-\int_\gamma \vec{F}_1\,d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F}_1\,d\vec{r} = 0.$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}_1 d\,\vec{r} &= \int_\alpha \vec{F}_1\,d\vec{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t/2, -a\ \operatorname{sen} t)}{a^2}.(a\cos t, -a\ \operatorname{sen} t/2)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \ \operatorname{sen}^2 t}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi
\end{aligned}$$

O campo $\vec{F}_2$ é de classe $C^1$ em todo o $\mathbb{R}^2$. Logo não é necessário utilizar uma curva auxiliar visto que o domínio do campo contem a região $D$ interior a $\gamma$. Temos que $rot\vec{F}_2 = 2x + \cos y - (-x + \cos y) = 3x$, logo, pelo Teorema de Green vem que:

$$-\int_\gamma \vec{F}_2\,d\vec{r} = \iint_D 3x\,dx\,dy$$

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned}
-\int_\gamma \vec{F}_2\,d\vec{r} &= \iint_D 3x\,dx\,dy \\
&= 3\int_{-2}^{3}\int_{x^2-4}^{8+2x-x^2} x\,dx\,dy \\
&= 3\int_{-2}^{3} -2x^3 + 2x^2 + 12x\,dx \\
&= 6\int_{-2}^{3} -x^3 + x^2 + 6x\,dx \\
&= 6\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= 6\left(-\frac{81}{4} + 9 + 27 + 4 + \frac{8}{3} - 12\right) = \frac{125}{2}
\end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}_2\,d\vec{r} = -\frac{125}{2}$

Por fim, a integral pedida é:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \pi - \frac{125}{2}$$

**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**2a. Prova - 1o. Semestre 2015 - 19/05/2015**

**Turma B**
**Questão 1:**

(a) Calcule $\int_\gamma e^z\,dx + xz\,dy + zy\,dz$ sendo $\gamma$ a curva dada pela intersecção das superfícies $y^2 - x^2 + z^2 = 1$ e $y + x = 2$, percorrida de $(1,1,-1)$ a $(1,1,1)$

(b) Seja $\vec{F}(x,y) = (\frac{2x}{x^2+1} - y^2 + 2xy, x^2 - 2xy)$.

  (i) $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta.

  (ii) Calcule $\int_\alpha \vec{F}\,d\vec{r}$, para $\alpha$ a curva dada por $\alpha(t) = (\sqrt{e^{t^2} - 1}, t^3 - t), 0 \le t \le 1$.

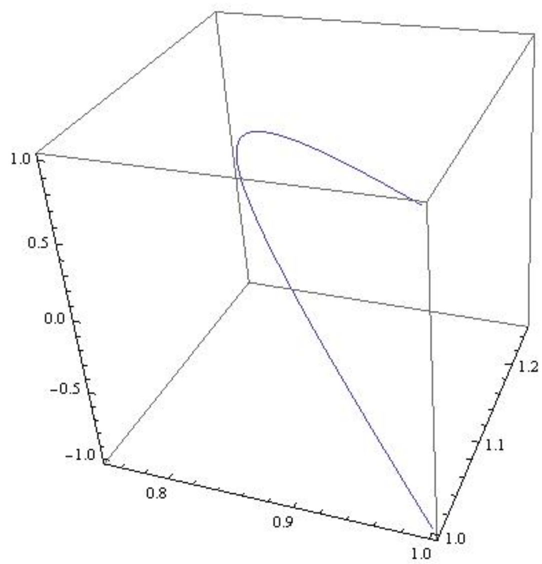
**Solução:**

(a) Inicialmente encontra-se uma parametrização para a curva $\gamma$. Da equação do plano dado, $y = 2 - x$. Substituindo na experssão do hiperbolóide de uma folha, vem que:

$$(2-x)^2 - x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow -4x + z^2 = -3 \Rightarrow x = \frac{3+z^2}{4}$$

Como $y = 2 - x$, vem que $y = \frac{5-z^2}{4}$. Dessa forma, uma parametrização para a curva $\gamma$ é:

$$\gamma(t) = \left(\frac{3+t^2}{4}, \frac{5-t^2}{4}, t\right) \quad -1 \le t \le 1$$



Calculando a integral:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}(\gamma(t)).\gamma'(t)\,dt &= \int_{-1}^{1} \left(e^t, \frac{3t+t^3}{4}, \frac{5t-t^3}{4}\right) \cdot \left(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, 1\right) dt \\
&= \int_{-1}^{1} -\frac{te^t}{2} - \frac{3t^2+t^4}{8} + \frac{5t-t^3}{4}\,dt \\
&= \left(\frac{1}{2}e^t(t-1) - \frac{t^5}{40} - \frac{t^3}{8} + \frac{5t^2}{8} - \frac{t^4}{16}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= e^{-1} - \frac{1}{20} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{e} - \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

(b)

(i) O domínio do campo é o conjunto $\mathbb{R}^2$, que é um conjunto simplesmente conexo. Além disso, verifica-se que

$$rot\vec{F} = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}).\vec{k} = ((2x-2y) - (-2y+2x))\vec{k} = \vec{0}.$$

Logo, o campo é conservativo.

(ii) Como o campo é conservativo, há uma função $\phi$, potencial, tal que $\nabla\phi = \vec{F}$. Dessa sentença, decorre que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+1} - y^2 + 2xy \underbrace{\Rightarrow}_{\int dx} \phi(x,y) = ln(x^2+1) - y^2x + x^2y + h(y)$$

Derivando a função potencial em relação a $y$ e, em seguida, comparando-a com a 2a componente do campo $\vec{F}$, encontra-se $h(y)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - 2xy = -2xy + x^2 + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 0$$

Assim:

$$h(y) = cte$$

E um potencial é dado por:

$$\phi(x,y) = ln(x^2+1) - y^2x + x^2y$$

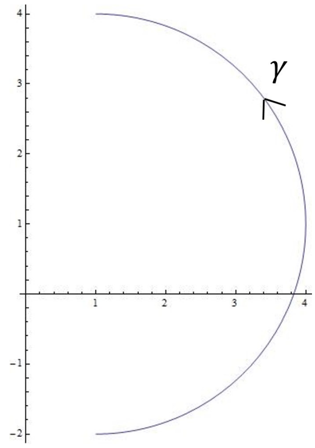
A curva é percorrida entre os pontos $\alpha(0) = (0,0)$ e $\alpha(1) = (\sqrt{e-1}, 0)$. Sendo assim a integral pedida é dada por:

$$\int_\alpha \vec{F}\,d\vec{r} = \phi(\sqrt{e-1}, 0) - \phi(0,0) = 1 - 0 = 1$$

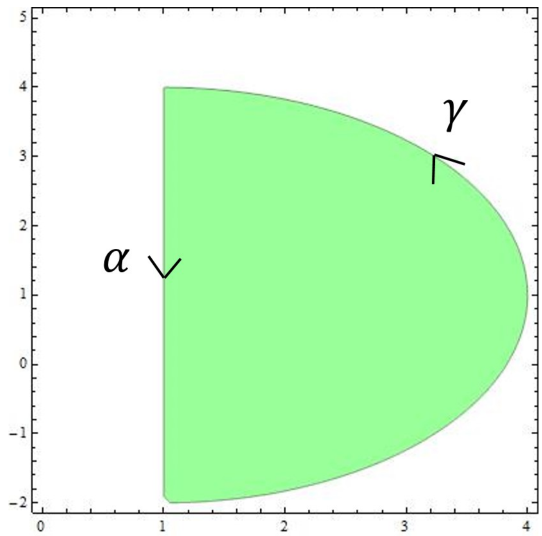
**Questão 2:**

Calcule $\displaystyle\int_\gamma (\operatorname{sen}(x^2) - y^2)dx + (xy + y^3)dy$ para $\gamma$ a curva dada por $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 7$ com $x \geq 1$ percorrida no sentido anti-horário.

**Solução:** A curva $\gamma$ é exibida na figura abaixo:




Para aplicação do Teorema de Green, os pontos $(1, -2)$ e $(1, 4)$ serão unidos por uma curva auxiliar $\alpha(t)$ de maneira a formar uma região fechada $R$ na qual $\gamma \cup \alpha = \partial R$:




A curva auxiliar é dada por $\alpha(t) = (1, -t)$ $-4 \leq t \leq 2$. Como o dominio do campo contem $R$ e ambas as curvas estão orientadas positivamente em relação a $R$, pelo Teorema de Green:

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_R 3y\, dx\, dy$$

Para calcular a integral dupla utilizam-se coordenadas polares, com $x = r\cos\theta + 1$, $y = r\ \operatorname{sen}\theta + 1$ e $|J| = r$.

Sendo assim:

$$\begin{aligned}
\iint_R 3y\,dx\,dy &= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 r^2\ \operatorname{sen}\theta + r\,dr\,d\theta \\
&= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\ \operatorname{sen}\theta + \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^3 d\theta \\
&= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9\ \operatorname{sen}\theta + \frac{9}{2}\,d\theta \\
&= \left(-9\cos\theta + \frac{3\theta}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{27\pi}{2}
\end{aligned}$$

Calculando a integral sobre a curva auxiliar $\alpha(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha \vec{F}\,d\vec{r} &= \int_{-4}^{2}(\ \operatorname{sen}1 - t^2, -t - t^3).(0,-1)\,dt \\
&= \int_{-4}^{2} t + t^3\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right)\Big|_{-4}^{2} = -66
\end{aligned}$$

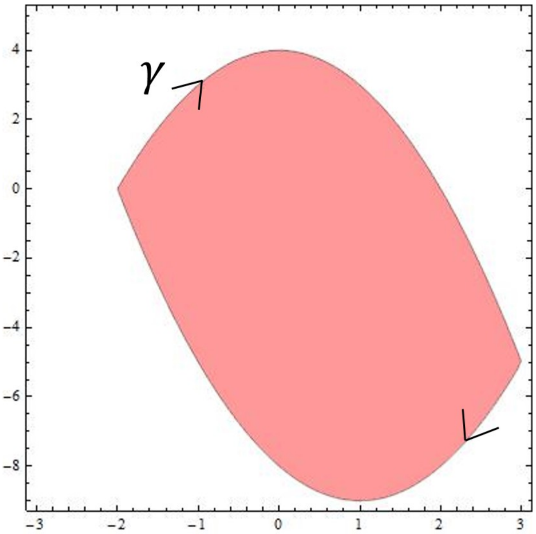
Com isso:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \frac{27\pi}{2} + 66$$

**Questão 3:**

Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{y}{(x-1)^2+4y^2}, \dfrac{-(x-1)}{(x-1)^2+4y^2}\right) + (-xy + \operatorname{sen} y, x^2 + x\cos y)$ e seja $\gamma$ a curva que é fronteira da região limitada pelos gráficos das funções $y = x^2 - 2x - 8$ e $y = 4 - x^2$ percorrida no sentido horário.Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r}$.

**Solução:** A região compreendida entre as funções é exibida abaixo:




Seja $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, sendo $\vec{F_1}(x,y) = \left(\frac{y}{(x-1)^2+4y^2}, \frac{-(x-1)}{(x-1)^2+4y^2}\right)$ e $\vec{F_2}(x,y) = (-xy + \operatorname{sen} y, x^2 + x\cos y)$. Vamos calcular a integral de cada campo separadamente.

Iniciando pela integral de $\vec{F_1}$ tem singularidade em $(1,0)$, ponto que está no interior da região limitada por $\gamma$.

Seja $a$ suficientemente grande para que a curva $\alpha(t) = (a\cos t + 1, \frac{a \operatorname{sen} t}{2})$, $t \in [0, 2\pi]$, contenha a curva $\gamma$ no seu interior. Note que $\alpha$ está orientada no sentido anti-horário.

Seja $R$ a região limitada por $\alpha$ e $\gamma$. Logo a fronteira de $R$, $\partial R = \alpha \cup \gamma$. O campo é de classe $C^1$ em todo $R$.

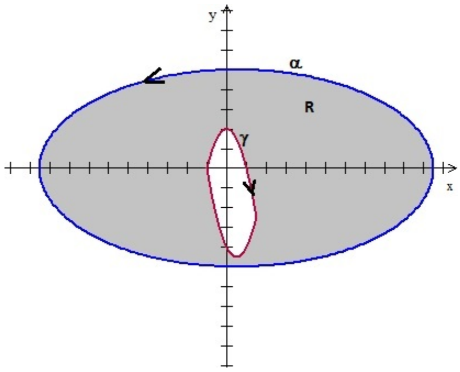
Como $rot\vec{F_1}.\vec{k} = \frac{-1[(x-1)^2+4y^2]+(x-1)2(x-1)}{((x-1)^2+4y^2)^2} - \frac{1[(x-1)^2+4y^2]+y8y}{((x-1)^2+4y^2)^2} = 0$, o Teorema de Green fornece:

$$\int_\gamma \vec{F_1}\, d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F_1}\, d\vec{r} = 0$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F_1} d\,\vec{r} &= -\int_\alpha \vec{F_1}\, d\vec{r} \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{(a \operatorname{sen} t/2, -a\cos t)}{a^2}.(-a \operatorname{sen} t, a\cos t/2)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi
\end{aligned}$$

O campo $\vec{F_2}$ é de classe $C^1$ em todo o $\mathbb{R}^2$. Logo não é necessário utilizar uma curva auxiliar visto que o domínio do campo contem a região $D$ interior a $\gamma$. Temos que $rot\vec{F_2} = 2x + \cos y - (-x + \cos y) = 3x$, logo,




pelo Teorema de Green vem que:

$$-\int_\gamma \vec{F}_2\, d\vec{r} = \iint_D 3x\, dx\, dy$$

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned}
-\int_\gamma \vec{F}_2\, d\vec{r} &= \iint_D 3x\, dx\, dy \\
&= 3\int_{-2}^{3}\int_{x^2-2x+8}^{4-x^2} x\, dx\, dy \\
&= 3\int_{-2}^{3} -2x^3 + 2x^2 + 12x\, dx \\
&= 6\int_{-2}^{3} -x^3 + x^2 + 6x\, dx \\
&= 6\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= 6\left(-\frac{81}{4} + 9 + 27 + 4 + \frac{8}{3} - 12\right) = \frac{125}{2}
\end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}_2\, d\vec{r} = -\frac{125}{2}$

Por fim, a integral pedida é:

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \pi - \frac{125}{2}$$