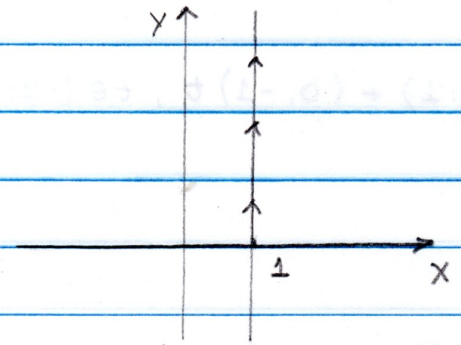
CÁLCULO II - Lista 1

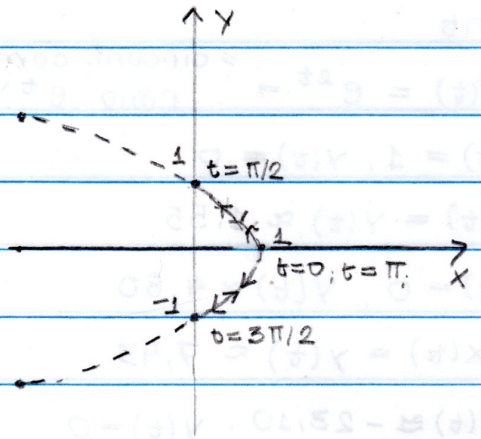
1a) $\gamma(t) = (1, t)$, $t \in \mathbb{R}$



$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (1,0) + (0,1)t$$

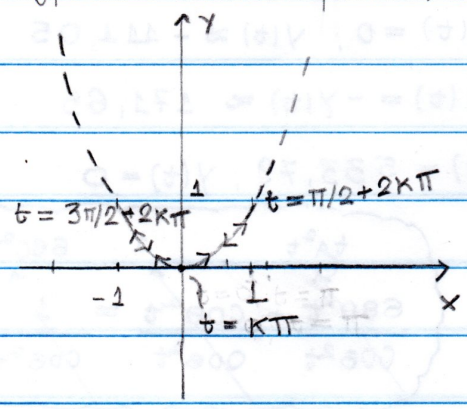
b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) + y^2(t) = 1 \Rightarrow x(t) = 1 - y^2(t)$$

c) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$

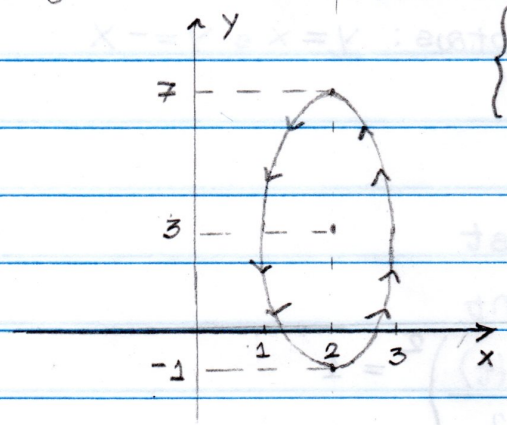


$x(t) = \operatorname{sen} t$

$y(t) = \operatorname{sen}^2 t$

$\Rightarrow y(t) = x^2(t)$

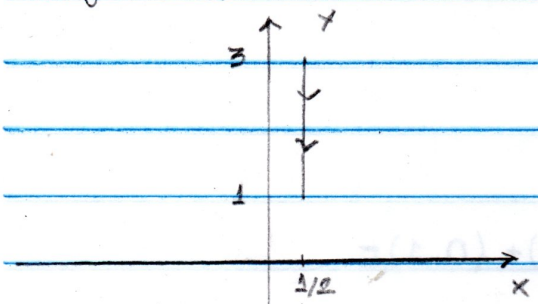
d) $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + 4\operatorname{sen} t)$, $t \in [-\pi, \pi)$



$$\begin{cases} x(t) = 2 + \cos t \\ y(t) = 3 + 4\operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x(t) - 2)^2 + \frac{(y(t) - 3)^2}{4^2} = 1$$

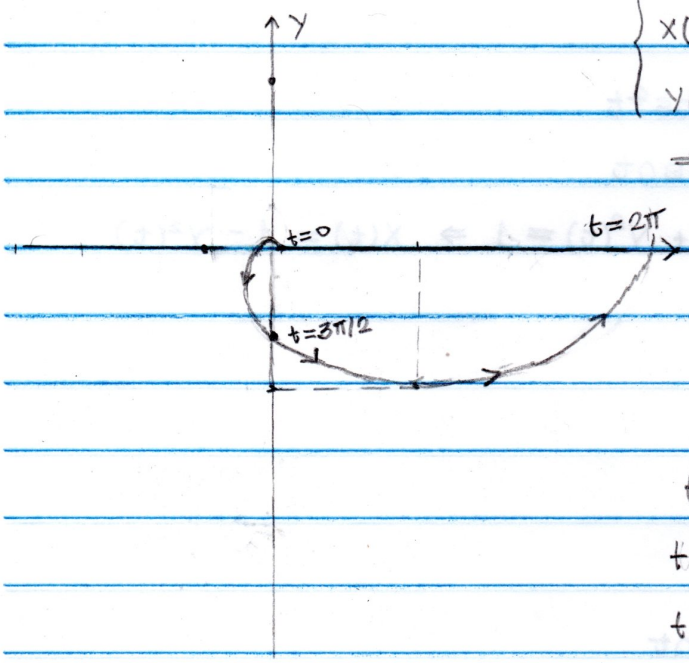
e) $\gamma(t) = (1/2, 1-t)$, $t \in [-2, 0]$



$$\begin{cases} x(t) = 1/2 \\ y(t) = 1-t \end{cases}$$

$\Rightarrow \gamma(t) = (1/2, 1) + (0, -1)\,t$, $t \in [-2, 0]$

f) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$



$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = e^{2t} \Rightarrow$ = circunf. com raio e^t

$t = 0 \Rightarrow x(t) = 1,\ y(t) = 0$

$t = \pi/4 \Rightarrow x(t) = y(t) \approx 1{,}55$

$t = \pi/2 \Rightarrow x(t) = 0,\ y(t) \approx 4{,}80$

$t = 3\pi/4 \Rightarrow -x(t) = y(t) \approx 7{,}43$

$t = \pi \Rightarrow x(t) \approx -23{,}10;\ y(t) = 0$

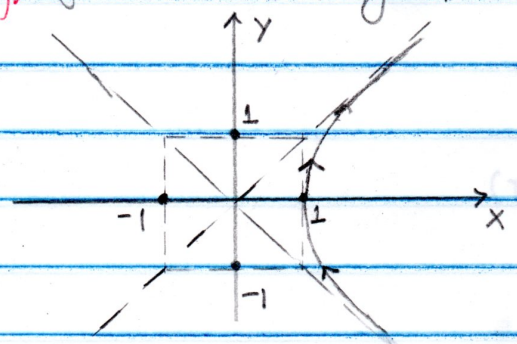
$t = 5\pi/4 \Rightarrow x(t) = y(t) \approx -35{,}71$

$t = 3\pi/2 \Rightarrow x(t) = 0;\ y(t) \approx -111{,}05$

$t = 7\pi/4 \Rightarrow x(t) = -y(t) \approx 171{,}65$

$t = 2\pi \Rightarrow x(t) = 533{,}79;\ y(t) = 0$

g) $\gamma(t) = (\sec t, \operatorname{tg} t)$; $t \in]-\pi/2; \pi/2[$



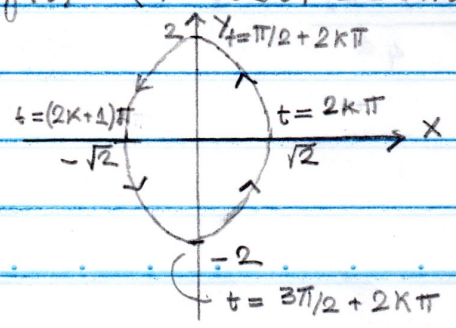
$$\begin{cases} x(t) = \sec t \\ y(t) = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$\frac{\overset{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}}{\cos^2 t} + \frac{\overset{1}{\cos^2 t}}{\cos^2 t} = \frac{\overset{\sec^2 t}{1}}{\cos^2 t}$$

$\Rightarrow y^2(t) + 1 = x^2(t) \Rightarrow x^2(t) - y^2(t) = 1$

assíntotas: $y = x$ e $y = -x$

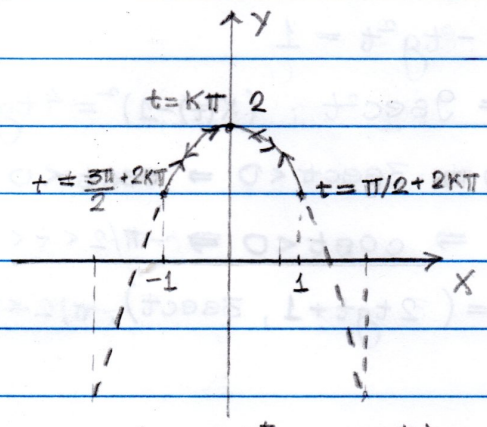
h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $t \in \mathbb{R}$



$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 2\operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x(t)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{2}\right)^2 = 1$$

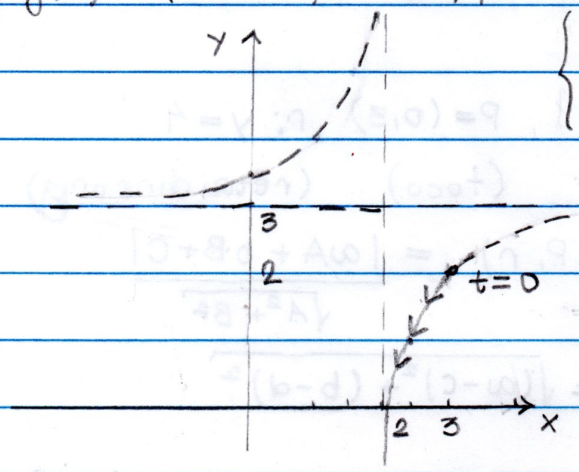
i) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos^2 t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$



$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen}(t) \\ y(t) = \cos^2 t + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2(t) + y(t) - 2 = 1 \Rightarrow y(t) = 2 - x^2(t)$$

j) $\gamma(t) = (2 + e^{-t}, 3 - e^{t})$, $t \geq 0$

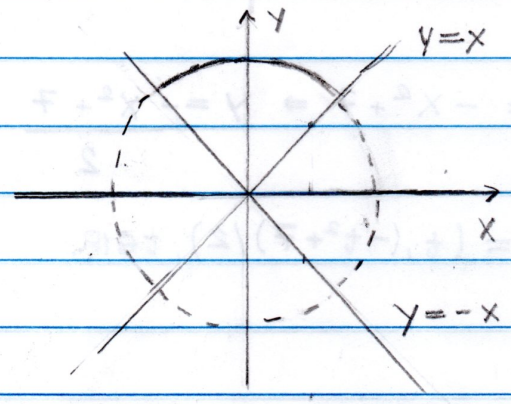


$$\begin{cases} x(t) = 2 + e^{-t} \\ y(t) = 3 - e^{t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{t} = \frac{1}{x(t) - 2} = 3 - y(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = 3 - \frac{1}{x(t) - 2}$$

2a) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 ; y \geq -x \text{ e } y \geq x\}$



$$4(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = 4$$

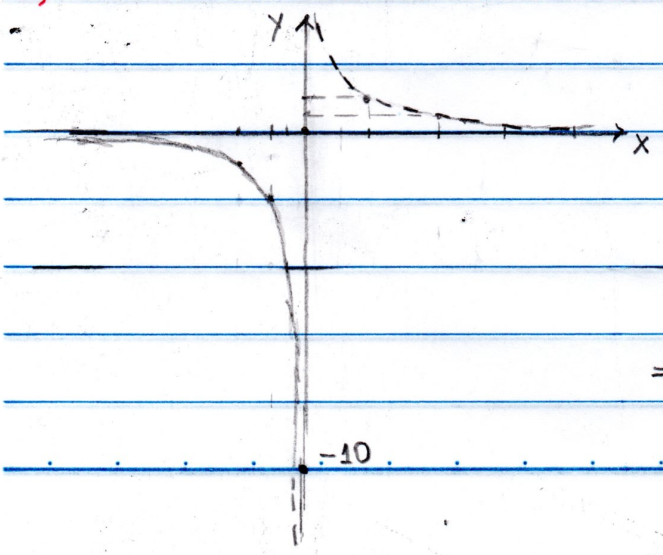
$$\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 t = y^2(t) ; \; 4\cos^2 t = x^2(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} t \geq \cos t \Rightarrow \pi/4 \leq t \leq 5\pi/4 \\ \operatorname{sen} t \geq -\cos t \Rightarrow -\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t), \; \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$$

b) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1 , x < 0 \text{ e } y > -10\}$



$$t \cdot 1/t = 1$$

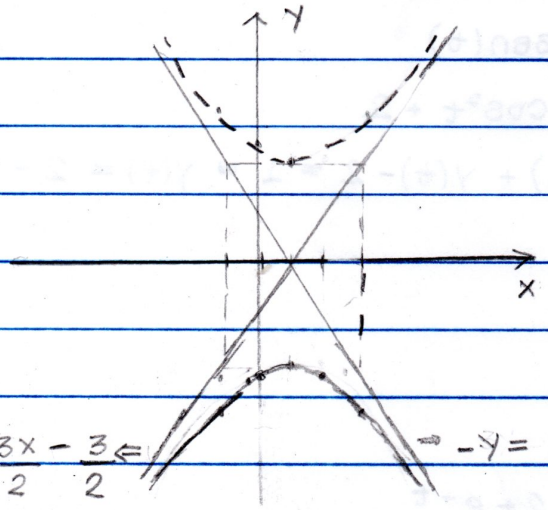
$$\Rightarrow x(t) = t , \; y(t) = 1/t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow t < 0 \\ y > -10 \Rightarrow 1/t > -10 \Rightarrow t < -1/10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t < -1/10$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = (t, 1/t), \; t < -1/10$$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2/9 - (x-1)^2/4 = 1 \text{ e } y < 0\}$



$\sec^2 t - tg^2 t = 1$

$\Rightarrow y^2(t) = 9\sec^2 t \; ; \; (x(t)-1)^2 = 4tg^2 t$

$\Rightarrow y < 0 \Rightarrow 3\sec t < 0 \Rightarrow \sec t < 0$

$\Rightarrow \cos t < 0 \Rightarrow -\pi/2 < t < 3\pi/2$

$\Rightarrow \gamma(t) = (2tg t + 1, 3\sec t), \; \pi/2 < t < 3\pi/2$

$y = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \Leftarrow \qquad \Rightarrow -y = \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}$

d) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),r) = d((x,y),P)\}$, $P = (0,3)$ $r: y = 4$

↳ definição de parábola (foco) (reta diretriz)

↳ Dados $r: Ax + By + C = 0$, $d(P,r) = \frac{|aA + bB + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

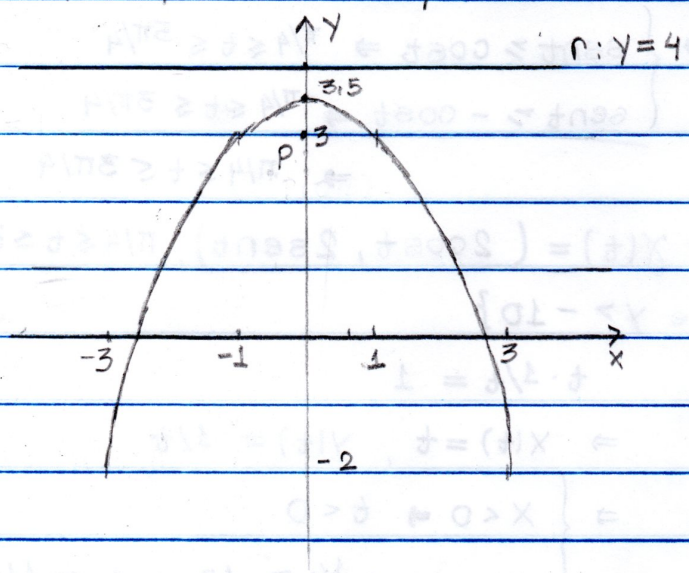
$P = (a,b)$

↳ Dados $P = (a,b)$, $d(P,Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

$Q = (c,d)$

$\Rightarrow C: \frac{|x \cdot 0 + y \cdot 1 - 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow (y-4)^2 = x^2 + (y-3)^2$

$\Rightarrow y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow 2y = -x^2 + 7 \Rightarrow y = -\frac{x^2 + 7}{2}$



$\gamma(t) = (t, (-t^2 + 7)/2), \; t \in \mathbb{R}$

e) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),P) + d((x,y),Q) = 10\}$, $P = (2,0)$ e $Q = (-2,0)$

↳ definição elipse (focos)

$\Rightarrow C: \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = 10$

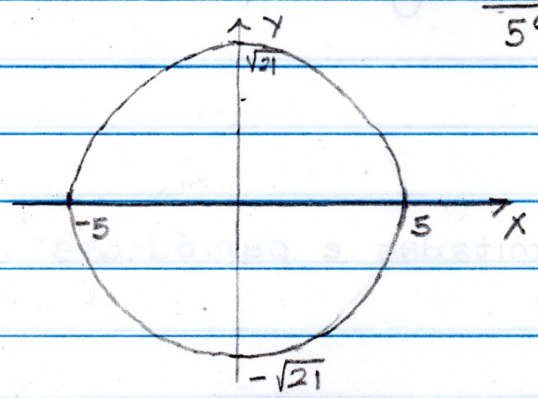
$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 10^2 - 20\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + (x+2)^2 + y^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$

$\Rightarrow 20\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 100 + 8x \Rightarrow 5\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 25 + 2x$

$\Rightarrow 25x^2 + 100x + 100 + 25y^2 = 625 + 100x + 4x^2$

$\Rightarrow 21x^2 + 25y^2 = 525 \Rightarrow \dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{21}^2} = 1$



$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, $t \in [0, 2\pi[$

$(y/\sqrt{21})^2 + (x/5)^2 = 1$

$\gamma(t) = (5\cos t, \sqrt{21}\,\text{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi[$

f) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |d(x,y,P) - d((x,y),Q)| = 1, x > 0\}$, $P = (2,0)$, $Q = (-2,0)$

↳ definição de hipérbole + restrição $x > 0$

Como $x > 0 \Rightarrow 4x > -4x \Rightarrow (x+2)^2 > (x-2)^2 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 > (x-2)^2 + y^2$

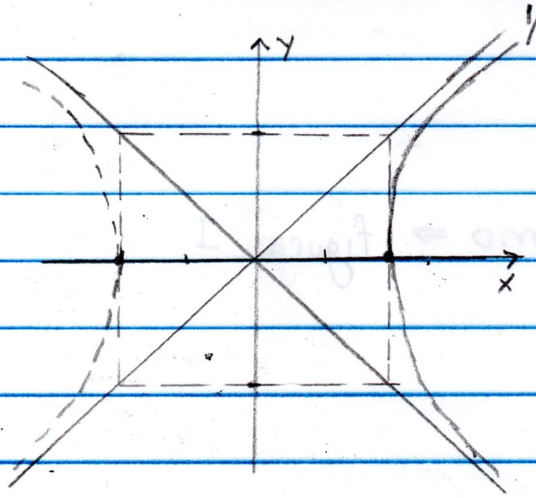
$\Rightarrow \left|\sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

Assim: $C: \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2$

$\Rightarrow 8x - 1 = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Rightarrow 64x^2 - 16x + 1 = 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2$

$\Rightarrow 60x^2 - 4y^2 = 15 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1/4} - \dfrac{y^2}{15/4} = 1$



$\sec^2 t - \text{tg}^2 t = 1$, $t \in]-\pi/2; \pi/2[$

$(x/1/4)^2 - (y/\sqrt{15}/2)^2 = 1$

$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sec t > 0 \Rightarrow t \in]-\pi/2, \pi/2[$

$\gamma(t) = \left(\dfrac{\sec t}{2}, \dfrac{\sqrt{15}\,\text{tg}\, t}{2}\right)$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

3a) $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 - t$

$\lim_{t \to +\infty} t^3 - 2t = +\infty$; $\lim_{t \to +\infty} t^2 - t = +\infty$

$\Rightarrow$ figura IV

$\lim_{t \to -\infty} t^3 - 2t = -\infty$; $\lim_{t \to -\infty} t^2 - t = +\infty$

b) $x = t^3 - 1$, $y = 2 - t^2$

$\lim_{t \to +\infty} t^3 - 1 = +\infty$; $\lim_{t \to +\infty} 2 - t^2 = -\infty$

$\Rightarrow$ figura VI

$\lim_{t \to -\infty} t^3 - 1 = -\infty$; $\lim_{t \to -\infty} 2 - t^2 = -\infty$

c) $x = \text{sen}(3t)$, $y = \text{sen}(4t)$

curva composta por funções limitadas e periódicas

$t = 0 \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$ $\Rightarrow$ figura V

d) $x = t + \text{sen}(2t)$, $y = t + \text{sen}(3t)$

$\lim_{t \to +\infty} t + \text{sen}(2t) = +\infty$ $\lim_{t \to +\infty} t + \text{sen}(3t) = +\infty$

$\Rightarrow$ figura III

$\lim_{t \to -\infty} t + \text{sen}(2t) = -\infty$ $\lim_{t \to -\infty} t + \text{sen}(3t) = -\infty$

e) $x = \text{sen}(t + \text{sen}t)$, $y = \cos(t + \cos t)$

$t = 0 \Rightarrow x = 0$, $y = \cos 1$

$t = \pi \Rightarrow x = 0$, $y = \cos(\pi - 1) = -\cos 1$

↳ Para o mesmo valor de x, há sempre dois valores em y

$\Rightarrow$ figura II

f) $x = \cos t$, $y = \text{sen}(t + \text{sen}(5t))$

$t = 0 \Rightarrow x = 1$ e $y = 0$

↳ único valor de y para x máximo $\Rightarrow$ figura I

Cálculo 2 - Lista 1 (Q4 na próxima página; Q5c) nas próximas * páginas)

5a) $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$

f é derivável em $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = L,\ L \in \mathbb{R}$

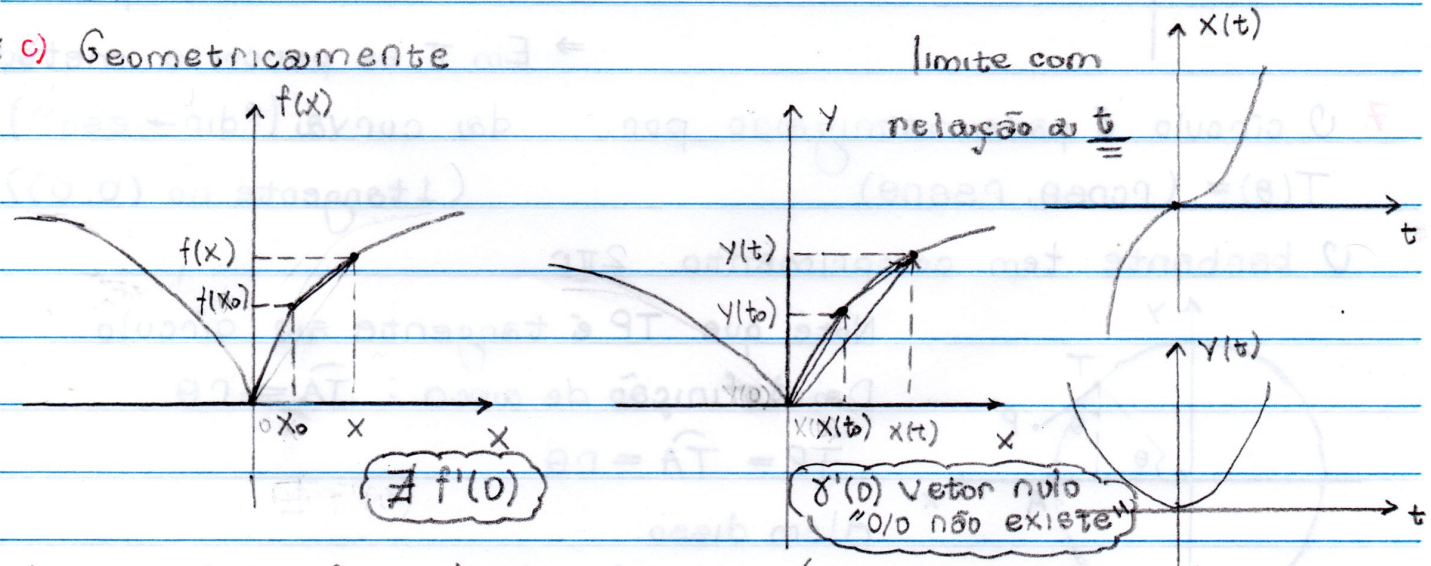
Mas: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}^2 - \sqrt[3]{0}^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \neq L \in \mathbb{R}$

$\therefore$ f não é derivável em $x=0$

b) Definindo $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, tem-se a curva tal que $\operatorname{Im}\gamma = \operatorname{Grf}$, pois:

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \Rightarrow x^2(t) = y^3(t) \Rightarrow y(t) = \sqrt[3]{x(t)}^2 \Rightarrow y = f(x) = \sqrt[3]{x(t)}^2$$

* c) Geometricamente



$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ $\qquad \gamma'(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{x(t)-x(0)}{t} ; \lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{t} \right)$

6. $\gamma: I \to \mathbb{R}$; $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\|\gamma(t)\| = C$, $\forall t \in I$

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, temos $\|\gamma(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$

Seja $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, temos $\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = x(t)\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t)$

Assim $\|\gamma(t)\| = C \Rightarrow \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = C \Rightarrow x(t)^2 + y(t)^2 = C^2$

Derivando no tempo ($\gamma(t)$ é diferenciável):

$2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0 \Rightarrow 2\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0 \Rightarrow \gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0$

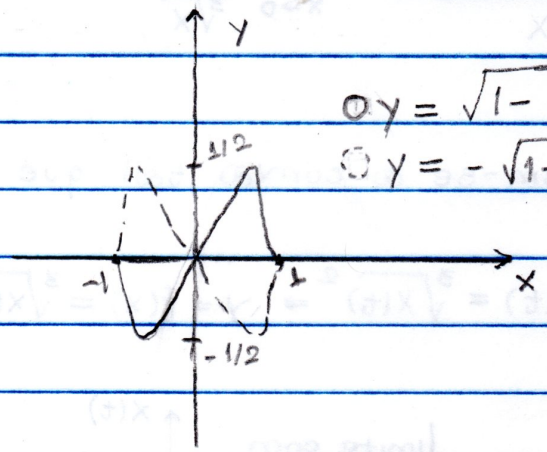
$\therefore$ $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, $\forall t \in I$.

4. $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t \cdot \cos t)$ Em $(0,0) \Rightarrow t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)$ $\gamma'(\pi/2) = (-1,-1)$; $\gamma'(3\pi/2) = (1,-1)$

$\Rightarrow$ duas tangentes

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \cdot \cos t \end{cases} \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}\cdot x$$



$y = \sqrt{1-x^2}\,x$

$y = -\sqrt{1-x^2}\,x$

$t = 0 \Rightarrow \gamma(0) = (1,0)$

$t = \pi/4 \Rightarrow \gamma(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, 1/2)$

$t = \pi/2 \Rightarrow \gamma(\pi/2) = (0,0)$

$t = 3\pi/4 \Rightarrow \gamma(3\pi/4) = (-\sqrt{2}/2; 1/2)$

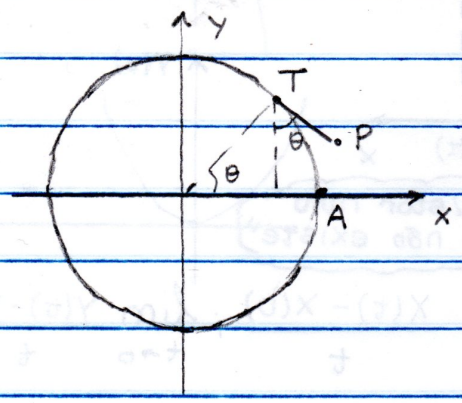
$t = \pi \Rightarrow \gamma(\pi) = (-1;0)$

$\Rightarrow$ Em π se percorre metade da curva ("dir $\to$ esq") (1 tangente no $(0;0)$)

7. O círculo é parametrizado por:

$T(\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

O barbante tem comprimento $2\pi r$



Note que TP é tangente ao círculo

Da definição de arco: $\widehat{TA} = r\theta$

$TP = \widehat{TA} = r\theta$

Além disso:

$P = (P_x, P_y) = (x(\theta), y(\theta))$

$P_x = r\cos\theta + TP\cdot\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta)$

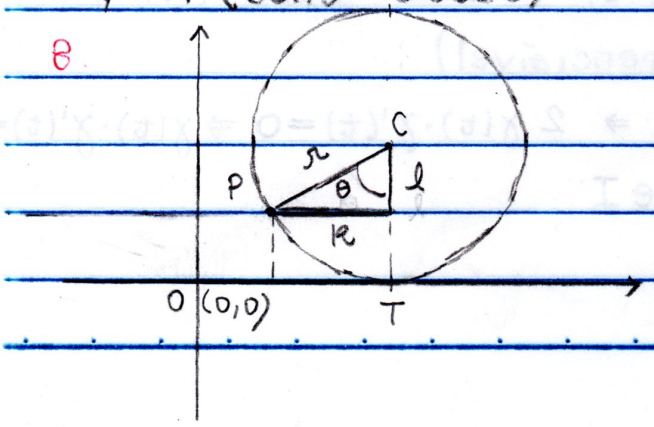
$P_y = r\operatorname{sen}\theta - TP\cdot\cos\theta = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$

Portanto:

$x = r(\cos\theta + \theta\operatorname{sen}\theta)$

$y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$

8.



Da definição de arco: $C(\theta) = (r\theta, r)$

$T(\theta) = (r\theta, 0)$

$x(\theta) = \overset{= \widehat{PT}}{OT} - R = r\theta - r\operatorname{sen}\theta$

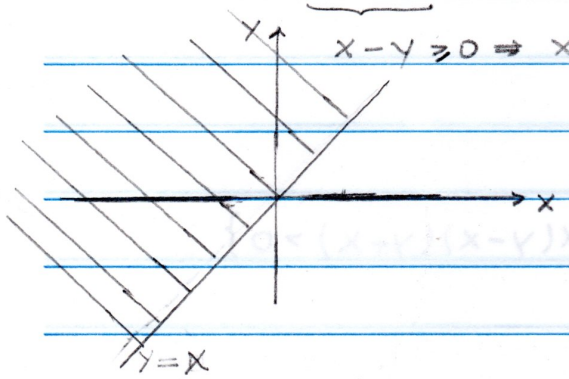
$y(\theta) = CT - l = r - r\cos\theta$

$P(\theta) = (r(\theta - \operatorname{sen}\theta); r(1-\cos\theta))$

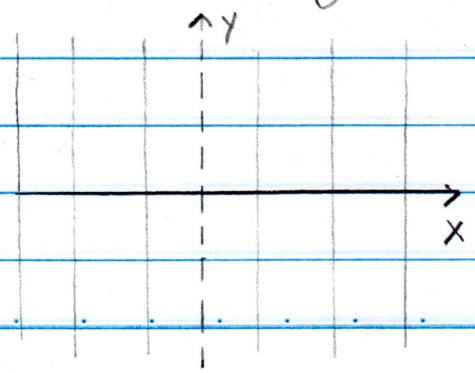
5c) A derivada de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um ponto x_0 é definida como $(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$, quando $x \to x_0$, o que pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto ($\Delta f(x)/\Delta x$, $\Delta x \to 0$). Para uma curva $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, as definições são análogas ($x'(t) = (x(t) - x(t_0))/(t - t_0)$ e $y'(t) = (y(t) - y(t_0))/(t - t_0)$, com $t \to t_0$). Ao se parametrizar uma função por uma curva γ, a interpretação geométrica da derivada em um ponto pode ser feita a partir da imagem de γ (já que $\mathrm{Im}\,\gamma = \mathrm{Grf}$), tomando novamente a inclinação $\Delta y(t)/\Delta x(t)$ com $\Delta x \to 0$. Como $x(t)$ e $y(t)$ são definidos na variável t, a diferenciabilidade de $x(t)$ e $y(t)$ não depende da função f original, mas, como $\mathrm{Im}\,\gamma = \mathrm{Grf}$, a razão $y'(t_0)/x'(t_0)$ só será uma operação válida quando a função f for derivável em x_0 ($x_0 = x(t_0)$; $f(x_0) = y(t_0)$).

No exercício em questão, em $(0,0)$ tem-se $\gamma'(t_0) = (0,0)$. A curva é diferenciável, mas $y'(t_0)/x'(t_0) = \underbrace{0/0}_{\text{operação inválida}} \Rightarrow f$ não é diferenciável em $x_0 = 0$

9a) $f(x,y) = \underbrace{\sqrt{x-y}}_{x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y} \Rightarrow Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$

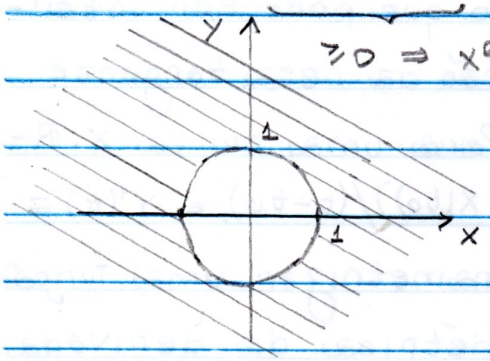


b) $f(x,y) = \mathrm{arctg}(y/x) \Rightarrow Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$



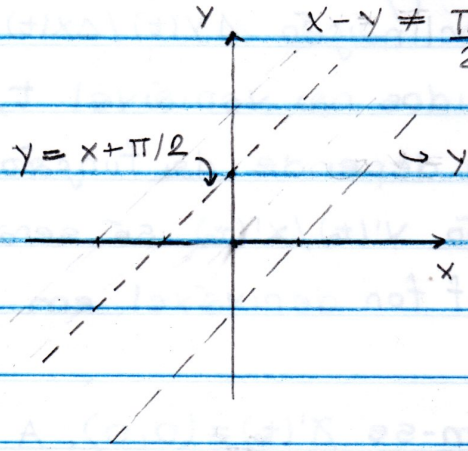
$\mathbb{R}^2 - \{0, y\}$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2-1}}_{\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 1}} \Rightarrow Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 1\}$



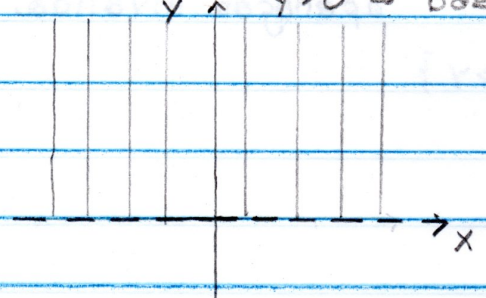
d) $f(x,y) = tg(\underbrace{x-y}) \Rightarrow Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$x - y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$



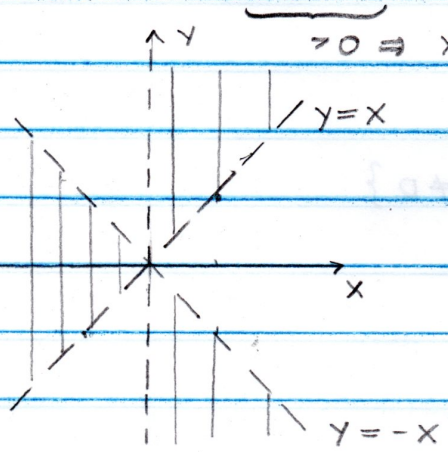
e) $f(x,y) = x/y^x \Rightarrow Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$y > 0 \Rightarrow$ base da exponencial deve ser positiva



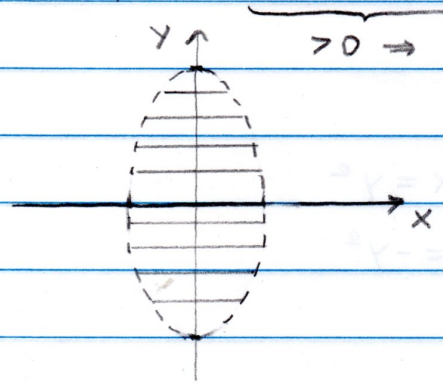
f) $f(x,y) = \ln(\underbrace{xy^2 - x^3}) \Rightarrow Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(y-x)(y+x) > 0\}$

$> 0 \Rightarrow x(y^2 - x^2) > 0$



g) $f(x,y) = \ln(\underbrace{16-4x^2-y^2}_{>0}) \Rightarrow D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x/2)^2+(y/4)^2<1\}$

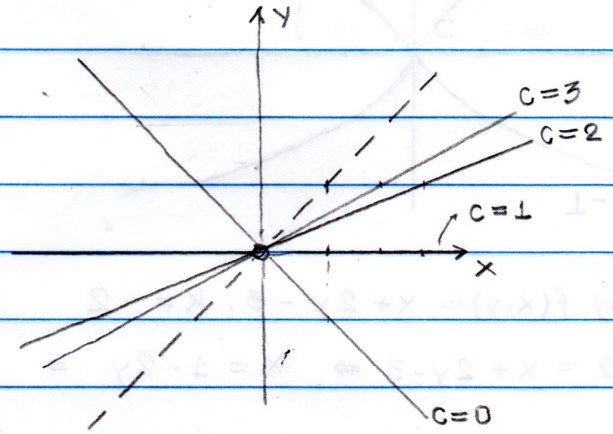
$>0 \Rightarrow 4x^2+y^2<16 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2<1$



10 a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$

$c = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow y(c+1) = x(c-1)$

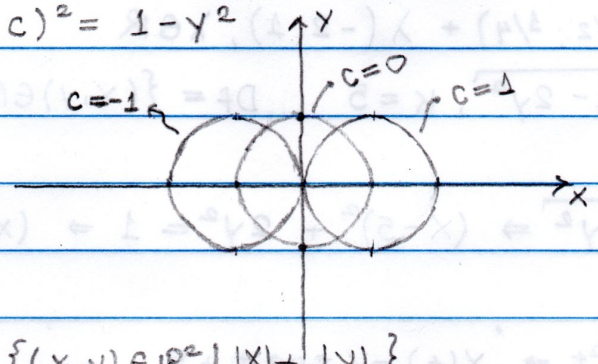
$\Rightarrow y = \frac{x(c-1)}{(c+1)}$



b) $f(x,y) = x-\sqrt{1-y^2}$, $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq y\leq 1\}$

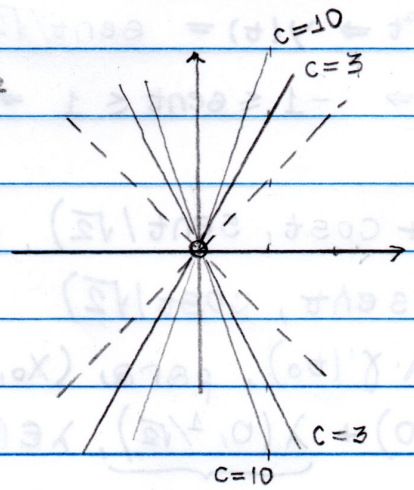
$c = x-\sqrt{1-y^2} \Rightarrow (x-c)^2 = 1-y^2$

$\Rightarrow (x-c)^2+y^2 = 1$



c) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y^2}$, $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\neq|y|\}$

$c(x^2-y^2) = x^2 \Rightarrow x^2(c-1) = y^2$

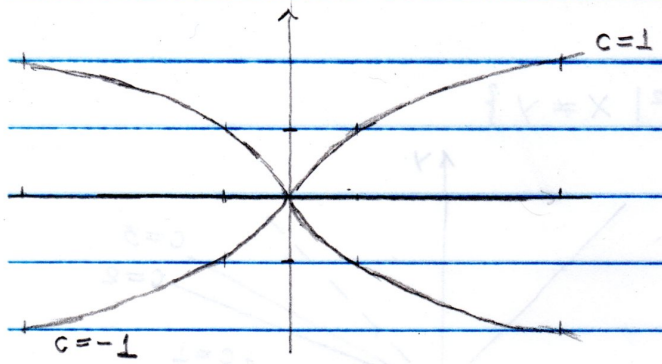


d) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0,0\}\}$

$c = 0 \Rightarrow 2xy^2 = 0 \Rightarrow (x,y) \notin D_f$

$c = 1 \Rightarrow x^2 + y^4 = 2xy^2 \Rightarrow (x - y^2)^2 = 0 \Rightarrow x = y^2$

$c = -1 \Rightarrow x^2 + y^4 = -2xy^2 \Rightarrow (x + y^2)^2 = 0 \Rightarrow x = -y^2$



10a) $f(x,y) = x + 2y - 3$, $k = -2$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

$-2 = x + 2y - 3 \Rightarrow x = 1 - 2y \Rightarrow \gamma(t) = (1 - 2t, t)$

$\gamma'(t) = (-2, 1)$

$X : (x_0, y_0) + \lambda \gamma'(t_0)$, para $(x_0, y_0) = (1/2 ; 1/4) \Rightarrow t_0 = 1/4$

Assim $X : (1/2 ; 1/4) + \lambda(-2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = x - \sqrt{1 - 2y^2}$, $k = 5$ $\quad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{-\sqrt{2}/2 \leq y \leq \sqrt{2}/2}_{1 - 2y^2 \geq 0}\}$

$\Rightarrow 5 = x - \sqrt{1 - 2y^2} \Rightarrow (x-5)^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow (x-5)^2 + \dfrac{y^2}{(1/2)^2} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = \cos^2 t \Rightarrow x(t) = \cos t + 5, \\ y^2/(1/2)^2 = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow y(t) = \operatorname{sen} t/\sqrt{2} \end{cases}$$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \Rightarrow t \in]-\pi/2 ; \pi/2[$

$\therefore \gamma(t) = (5 + \cos t, \operatorname{sen} t/\sqrt{2})$, $t \in]-\pi/2 ; \pi/2[$

$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t/\sqrt{2})$

$X : (x_0, y_0) + \lambda \cdot \gamma'(t_0)$, para $(x_0, y_0) = (6, 0) \Rightarrow t_0 = 0$

Logo: $X : (6 ; 0) + \underbrace{\lambda(0, 1/\sqrt{2})}_{\text{Note que } \lambda_1(0, 1/\sqrt{2}) = \lambda_2(0,1), \text{ pois } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \in \mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2}$, $K=1$ $\quad D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{|x| \neq |y|}_{x^2 \neq y^2}\}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{1}{x^2-y^2} \Rightarrow x^2-y^2=1$

$\begin{cases} x^2 = \sec^2 t \\ y^2 = tg^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \sec t \\ y(t) = tg\, t \end{cases}$, $\sec t \neq \pm tg\, t \Rightarrow \operatorname{sen} t \neq \pm 1$

$\Rightarrow t \neq \pm \pi/2$

$\Rightarrow t \in]-\pi/2; \pi/2[\cup]\pi/2; 3\pi/2[$

$\therefore \gamma(t) = (\sec t, tg\, t)$, $t \in]-\pi/2; \pi/2[\cup]\pi/2; 3\pi/2[$

$\gamma'(t) = (\sec t \cdot tg\, t, \sec^2 t)$

$X: (x_0, y_0) + \lambda \gamma'(t_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, p/ $(x_0,y_0) = (\sqrt{2}, 1) \Rightarrow t_0 = \pi/4$

Assim: $X: (\sqrt{2}, 1) + \lambda(\sqrt{2}, 2)$

d) $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4y^2}{x^2+y^2+1}$, $K = 1,2,3$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

• $K=1 \Rightarrow x^2+y^2+1 = 2x^2+4y^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{(1/\sqrt{3})^2} = 1$

$\begin{cases} x^2 = \cos^2 t \\ y^2/(1/\sqrt{3})^2 = \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t/\sqrt{3} \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi[$

$\therefore \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t/\sqrt{3})$, $t \in [0; 2\pi[$

• $K=2 \Rightarrow 2x^2+2y^2+2 = 2x^2+4y^2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -1$

$\therefore \gamma(t) = \gamma_1(t) \cup \gamma_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$ $\quad \gamma_1(t) = \underbrace{(t, 1) \quad (t, -1)}_{x \text{ pode assumir qqr valor}} = \gamma_2(t)$

• $K=3 \Rightarrow 3x^2+3y^2+3 = 2x^2+4y^2 \Rightarrow \dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2} - \dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

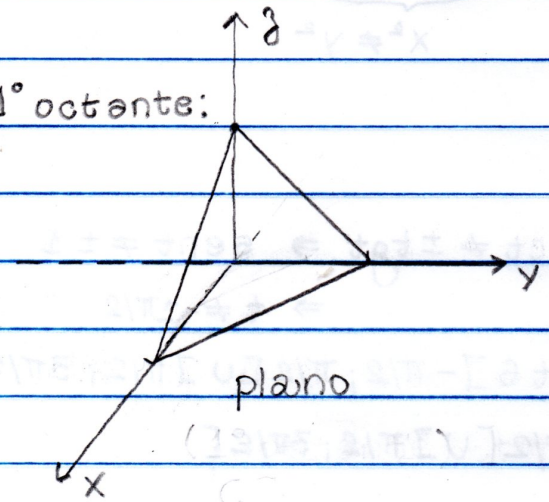
$\begin{cases} y^2/\sqrt{3}^2 = \sec^2 t \\ x^2/\sqrt{3}^2 = tg^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\sec t \\ \sqrt{3}\, tg\, t \end{cases}$, $t \in]-\pi/2; \pi/2[\cup]\pi/2; 3\pi/2[$

↳ domínio usual de $\sec x$

$\therefore \gamma(t) = (\sqrt{3}\, tg\, t, \sqrt{3}\sec t)$, $t \in]-\pi/2; \pi/2[\cup]\pi/2; 3\pi/2[$

12a) $f(x,y) = 1 - x - y \Rightarrow z = 1 - x - y$, $D_f = \mathbb{R}^2$

1° octante:



• Análise das intersecções

$z = 0 \Rightarrow x + y = 1$

$x = 0 \Rightarrow z = 1 - y$

$y = 0 \Rightarrow z = 1 - x$

• Curvas de nível: $c = f(x,y)$

$c = 1 \Rightarrow x = -y$

$c = -1 \Rightarrow y = 2 - x$

b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+1} \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, vamos analisar uma função de uma variável

• $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

-1: $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ 1

• $f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-2x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = 0$

$\Rightarrow -2x(x^4+2x^2+1) - 4(x^3+x)(1-x^2) = 0$

$\Rightarrow -2x^5 - 4x^3 - 2x - \cancel{4x^3} + 4x^5 - 4x + \cancel{4x^3} = 0$

$\Rightarrow 2x(x^4 - 2x^2 - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ ou $\cancel{x^2 = -1}$ ou $x = \pm\sqrt{3}$

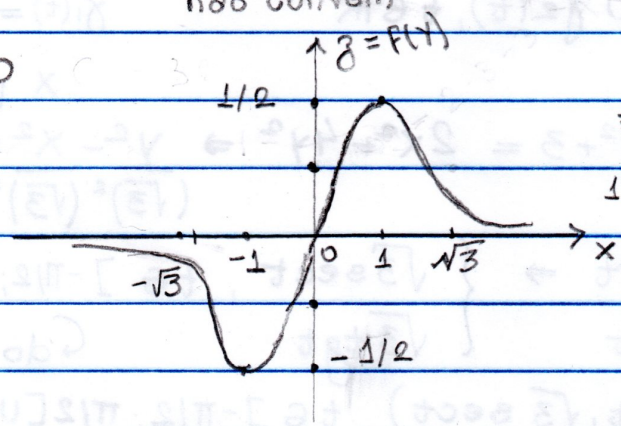
não convém

$-\sqrt{3}$: $\cap$ | 0: $\cup$ | $\sqrt{3}$: $\cap$ | $\cup$

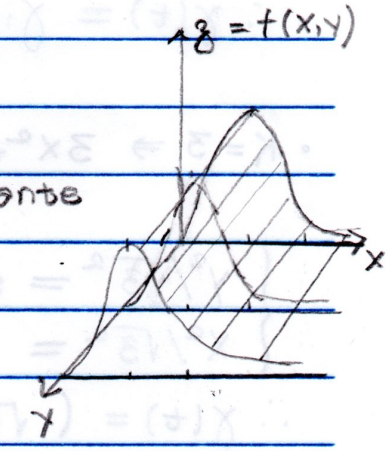
$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(1) = 1/2$

$f(-1) = -1/2$

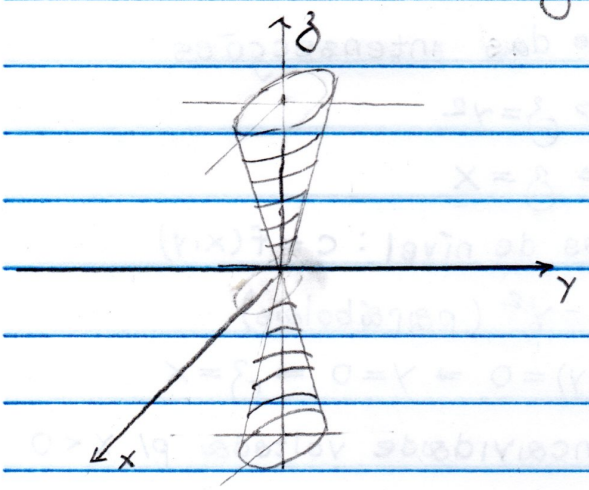


3D $\Rightarrow$ 1° octante



Depois de fazer o gráfico no eixo XZ, para plotá-lo no $\mathbb{R}^3$ basta reproduzi-lo para todos os valores de Y, de maneira idêntica à f(X), já que ao mudar Y não se altera a f(x,y) original.

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+9y^2} \Rightarrow z^2 = x^2+9y^2$ (cone), $Df = \mathbb{R}^2$



- análise das intersecções

$x=0 \Rightarrow z = \pm 9y$

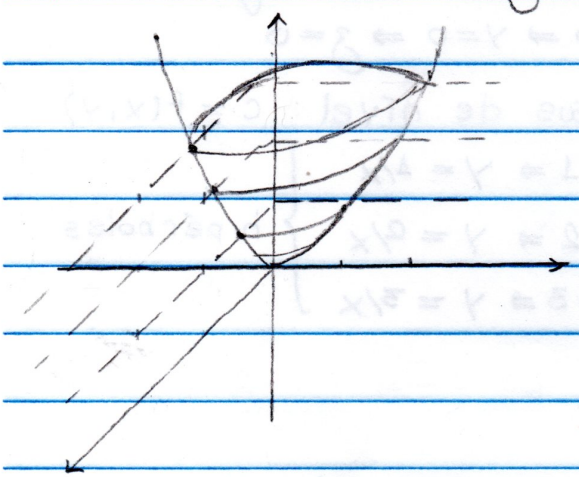
$y=0 \Rightarrow z = \pm x$

- curvas de nível: $c = f(x,y)$

$c=0 \Rightarrow x^2+9y^2=0 \Rightarrow (x,y)=(0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} c=1 \Rightarrow x^2+y^2/(1/3)^2=1 \\ c=2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2}/3)^2}=1 \end{array}\right\} \text{elipses}$$

d) $f(x,y) = 4x^2+y^2 \Rightarrow z = 4x^2+y^2$ (parabolóide elíptico) $Df = \mathbb{R}^2$



- análise das intersecções

$x=0 \Rightarrow z = y^2$

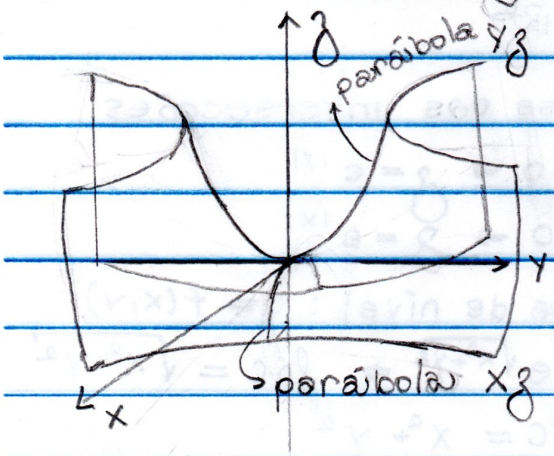
$y=0 \Rightarrow z = 4x^2$

- curvas de nível: $c = f(x,y)$

$c=0 \Rightarrow (x,y)=0$

$$\left.\begin{array}{l} c=1 \Rightarrow x^2/(1/2)^2+y^2=1 \\ c=2 \Rightarrow x^2/(\sqrt{2}/2)^2+y^2/\sqrt{2}^2=1 \end{array}\right\} \text{elipses}$$

e) $f(x,y) = y^2-x^2 \Rightarrow z = y^2-x^2$ (parabolóide hiperbólico), $Df = \mathbb{R}$



- análise das intersecções

$x=0 \Rightarrow z = y^2$

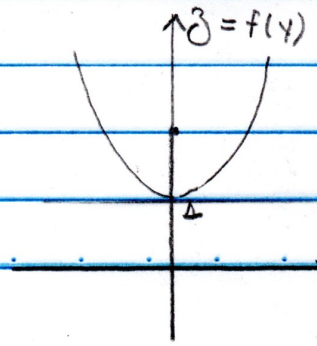
$y=0 \Rightarrow z = -x^2$

- curvas de nível: $c = f(x,y)$

$c=0 \Rightarrow x = \pm y$

$$\left.\begin{array}{l} c=1 \Rightarrow y^2-x^2=1 \\ c=4 \Rightarrow (y/2)^2-(x/2)^2=1 \end{array}\right\} \text{hipérboles}$$

f) $f(x,y) = y^2+1 \Rightarrow f(y) = y^2+1$ (função de uma variável) $Df = \mathbb{R}^2$

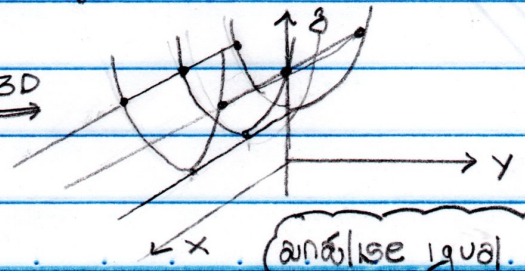


$f(y)=0 \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}$

$f'(y)=0 \Rightarrow y=0$

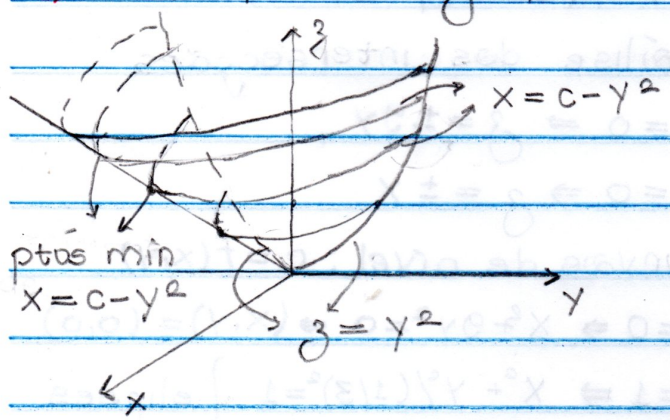
$f''(y)>0$

$\xrightarrow{3D}$



(análise igual ao b)

g) $f(x,y) = y^2 + x \Rightarrow z = y^2 + x$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$



· análise das intersecções

$x = 0 \Rightarrow z = y^2$

$y = 0 \Rightarrow z = x$

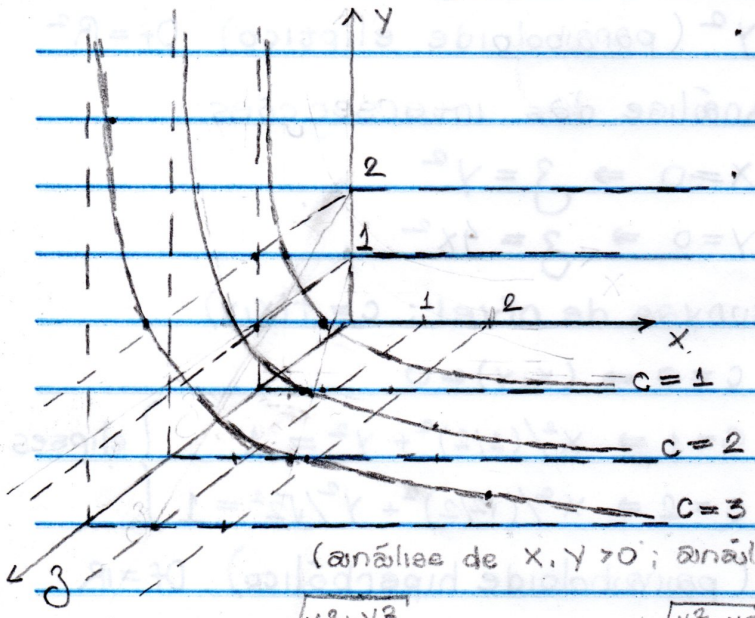
· curvas de nível : $c = f(x,y)$

$x = c - y^2$ (parábolas)

↳ $f'(y) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = x$

↳ concavidade voltada p/ $x < 0$

h) $f(x,y) = xy \Rightarrow z = xy$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$



· análise das intersecções

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$

· curvas de nível : $c = f(x,y)$

$c = 1 \Rightarrow y = 1/x$

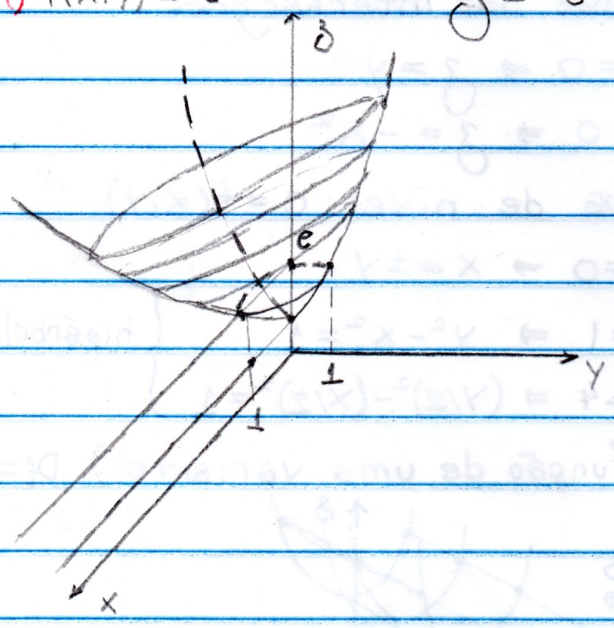
$c = 2 \Rightarrow y = 2/x$

$c = 3 \Rightarrow y = 3/x$

hipérboles

(análise de $x, y > 0$; análogo nos outros quadrantes

i) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$



· análise das intersecções

$x = 0 \Rightarrow z = e^{|y|}$

$y = 0 \Rightarrow z = e^{|x|}$

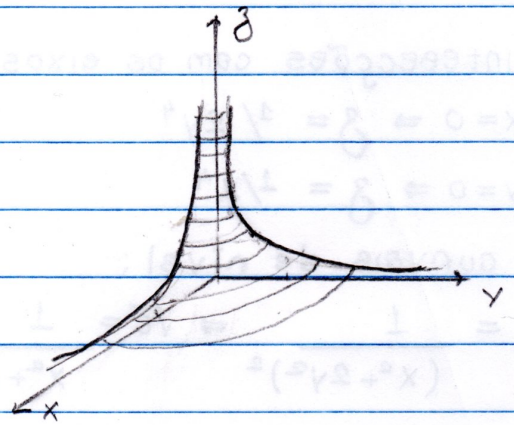
· curvas de nível : $c = f(x,y)$

$c = e^{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \ln c = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \ln^2 c = x^2 + y^2$

circunferências de raio $\ln c$

j) $f(x,y) = \dfrac{1}{4x^2+9y^2} \Rightarrow z = \dfrac{1}{4x^2+9y^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



· análise das intersecções

$x = 0 \Rightarrow z = 1/9y^2$

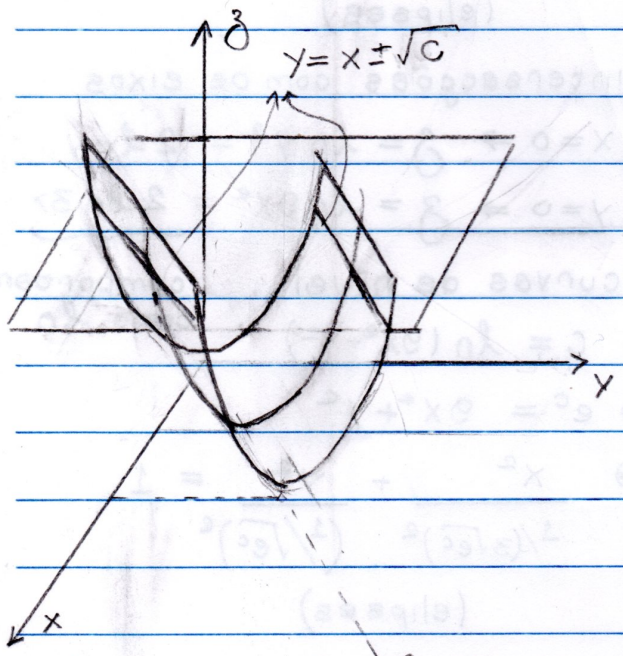
$y = 0 \Rightarrow z = 1/4x^2$

· curvas de nível: $c = f(x,y)$

$c = \dfrac{1}{4x^2+9y^2} \Rightarrow \dfrac{x^2}{(1/2\sqrt{c})^2} + \dfrac{y^2}{(1/3\sqrt{c})^2} = 1$

(elipses)

k) $f(x,y) = (x-y)^2 \Rightarrow z = (x-y)^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$



· análise das intersecções

$x = 0 \Rightarrow z = y^2$

$y = 0 \Rightarrow z = x^2$

· curvas de nível: $c = f(x,y)$

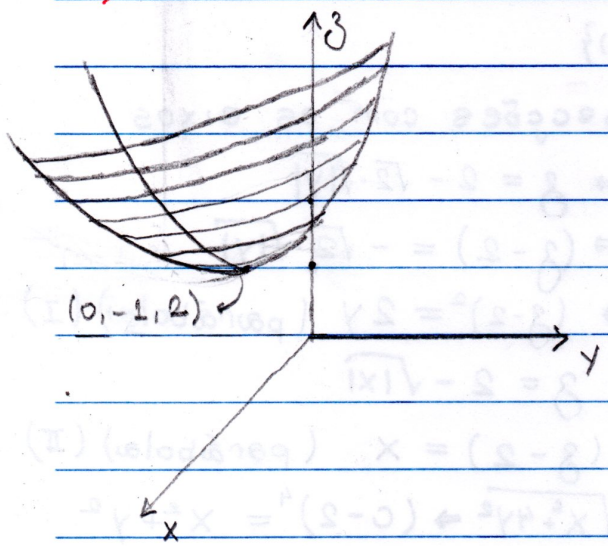
$c = (x-y)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{c} = x - y$

$\Rightarrow y = x \pm \sqrt{c}$

l) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 3 \Rightarrow z = x^2 + y^2 + 2y + 1 + 2 - 1$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow z = x^2 + (y+1)^2 + 2$

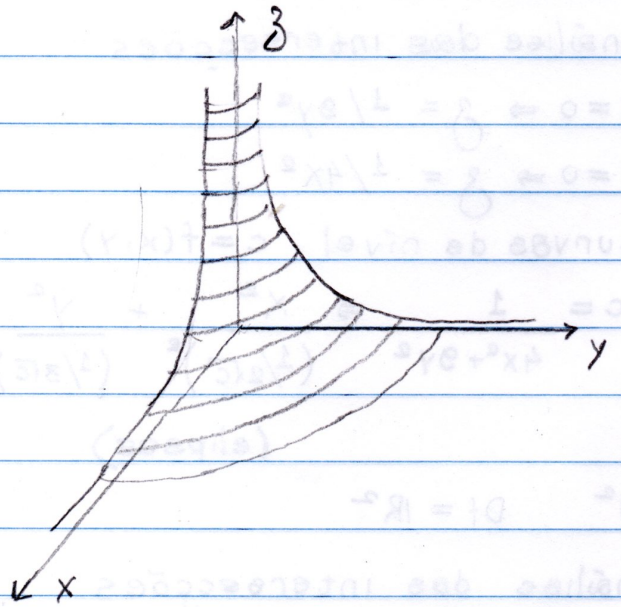
$\Rightarrow (z-2) = x^2 + (y+1)^2$



Note que o gráfico é idêntico ao $z = x^2 + y^2$ (parabolóide – parecido com d))

Com o ponto (0,0,0) deslocado ao ponto (0,-1,2).

m) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2} \Rightarrow z = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



• intersecções com os eixos

$x=0 \Rightarrow z = 1/2y^4$

$y=0 \Rightarrow z = 1/x^4$

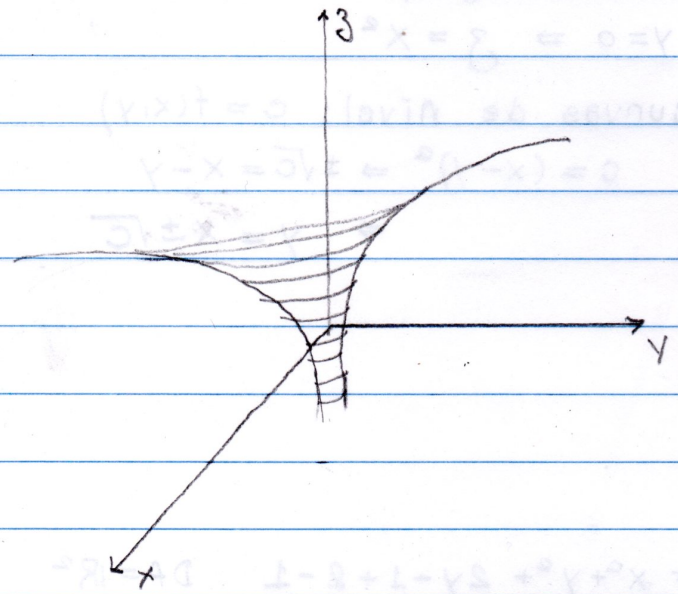
• curvas de nível:

$c = \dfrac{1}{(x^2+2y^2)^2} \Rightarrow \sqrt{c} = \dfrac{1}{x^2+2y^2}$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{(1/\sqrt{c})^2} + \dfrac{y^2}{(1/\sqrt{2c})^2} = 1$

(elipses)

n) $f(x,y) = \ln(9x^2+y^2)$ $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



• intersecções com os eixos

$x=0 \Rightarrow z = \ln y^2 = 2\ln y$

$y=0 \Rightarrow z = \ln 9x^2 = \underbrace{2\ln 3x}$

• curvas de nível: comportam como ln

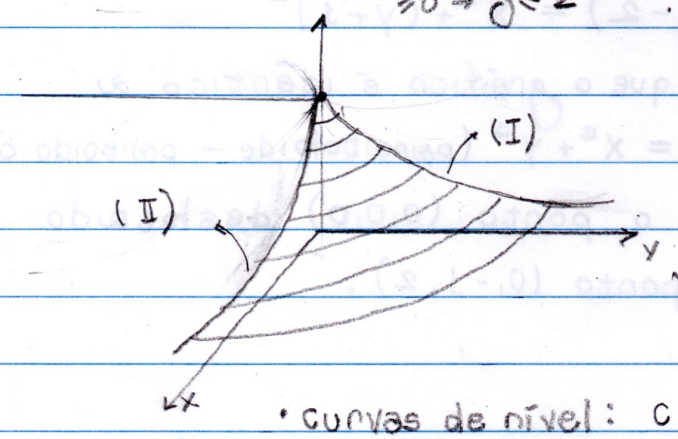
$c = \ln(9x^2+y^2)$

$\Rightarrow e^c = 9x^2+y^2$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{1/(3\sqrt{e^c})^2} + \dfrac{y^2}{(1/\sqrt{e^c})^2} = 1$

(elipses)

o) $f(x,y) = 2 - \underbrace{\sqrt[4]{x^2+4y^2}}_{\geq 0 \Rightarrow z \leq 2}$ $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$



• intersecções com os eixos

$x=0 \Rightarrow z = 2 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{|y|}$

$\Rightarrow (z-2) = -\sqrt{2}\cdot\sqrt{|y|}$

$\Rightarrow (z-2)^2 = 2y$ (parábola) (I)

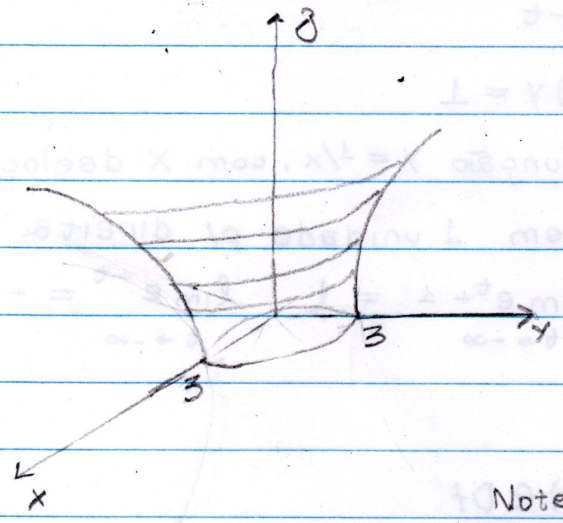
$y=0 \Rightarrow z = 2 - \sqrt{|x|}$

$(z-2) = x$ (parábola) (II)

• curvas de nível: $c = 2 - \sqrt[4]{x^2+4y^2} \Rightarrow (c-2)^4 = x^2+y^2$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{(1/(c-2)^2)^2} + \dfrac{y^2}{(1/(c-2)^2)^2} = 1$ (elipses)

p) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$, $Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 9\}$



• análise das intersecções

$x=0 \Rightarrow z^2 = y^2 - 9 \Rightarrow \underbrace{(y/3)^2 - (z/3)^2 = 1}_{\text{hipérboles}}$

$y=0 \Rightarrow z^2 = x^2 - 9 \Rightarrow (x/3)^2 - (z/3)^2 = 1$

• curvas de nível:

$c = \sqrt{x^2+y^2-9} \Rightarrow c^2+9 = x^2+y^2$

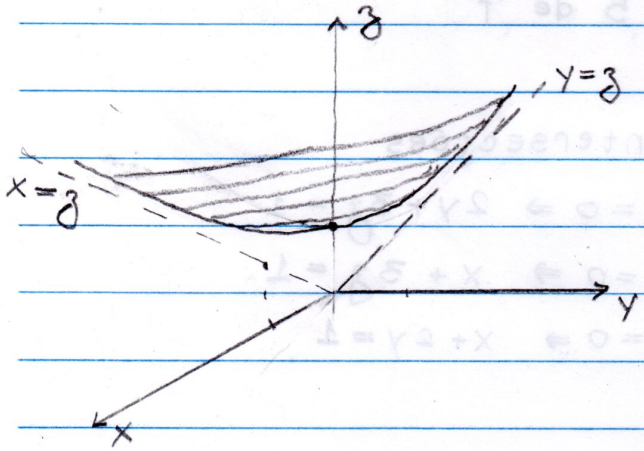
(circunferências)

Note que: $z^2 = x^2+y^2-9 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$

$\left(x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1 \Rightarrow \text{hiperboloide de uma folha} \right)$

q) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}$, $Df = \mathbb{R}^2 \Rightarrow z^2 = x^2+y^2+1$

$\Rightarrow z^2 - x^2 - y^2 = 1$ (hiperboloide de duas folhas)



• análise das intersecções

$x=0$ e $y=0 \Rightarrow z=1$

$x=0 \Rightarrow z^2 - y^2 = 1$ (hipérbole)

$y=0 \Rightarrow z^2 - x^2 = 1$ (hipérbole)

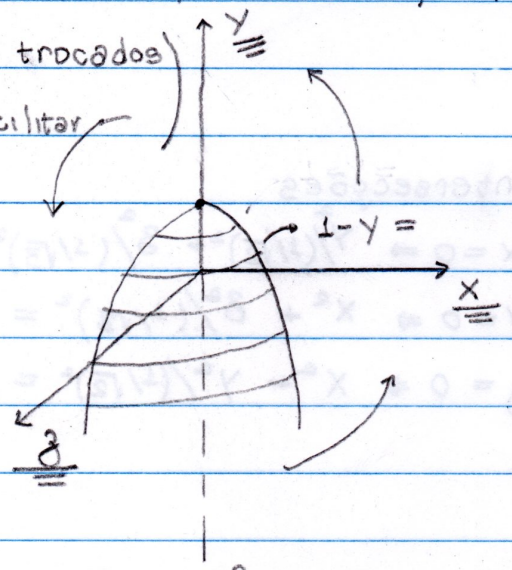
• curvas de nível

$c = \sqrt{x^2+y^2+1} \Rightarrow c^2 - 1 = x^2+y^2$

(circunferências

r) $f(x,y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$, $Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x^2+1\}$

(eixos trocados p/ facilitar)



$\Rightarrow z^2 = y - 2x^2 - 1$

$\Rightarrow (1-y) = z^2 + 2x^2$

$\left(\text{paraboloide elíptico: } y = \frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right)$

• intersecções p/ $x=0$ e $z=0 \Rightarrow$ parábolas

$(1-y) = 2x^2$; $(1-y) = z^2$

• curvas de nível: elipses

$(1-c) = z^2 + 2x^2 \Rightarrow \left(z/\sqrt{1-c}\right)^2 + \left(x/\sqrt{1-c}\right)^2 = 1$

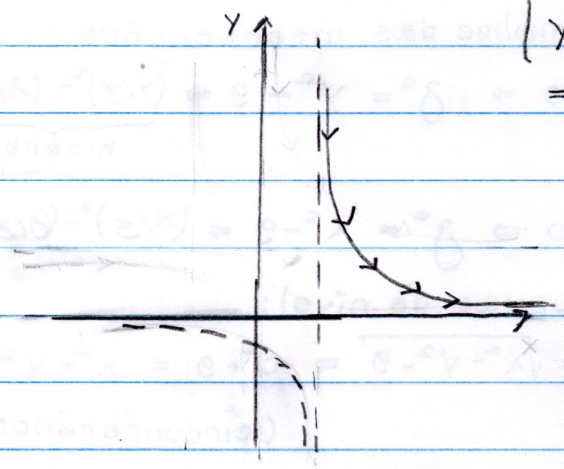
obs.: $1-y = z^2$ é como $-y = z^2$, com todo o comportamento deslocado uma unidade p/ cima (antes o máximo era em 0, passa a ser em 1, etc)

14a) $\gamma(t) = (e^t + 1 \quad e^{-t}) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^t + 1 \Rightarrow x = 1/y + 1 \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$

$\Rightarrow (x-1)y = 1$

↳ função $y = 1/x$, com x deslocado em 1 unidade p/ direita

↳ $\lim_{t \to -\infty} e^t + 1 = 1 \qquad \lim_{t \to -\infty} e^{-t} = +\infty$



b) $\operatorname{Im}\gamma \supset N_K \Leftrightarrow f(\gamma(t)) = K \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in Df$

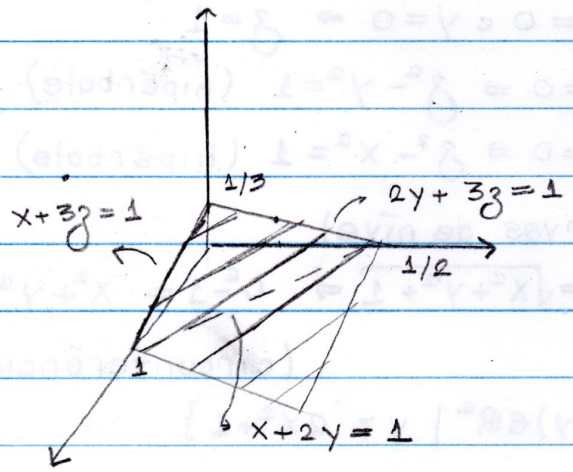
$f(\gamma(t)) = (e^t + 1)^2 \cdot (e^{-t})^2 - 2e^{-t} - (e^{-t})^2 + 4$

$= (e^{2t} + 2e^t + 1)(e^{-2t}) - 2e^{-t} - e^{-2t} + 4$

$= (e^0 + \cancel{2e^{-t}} + \cancel{e^{-2t}}) - \cancel{2e^{-t}} - \cancel{e^{-2t}} + 4 = 5$

$\therefore$ $\gamma(t)$ está contida no nível 5 de f

15a) $x + 2y + 3z = 1$ (plano)



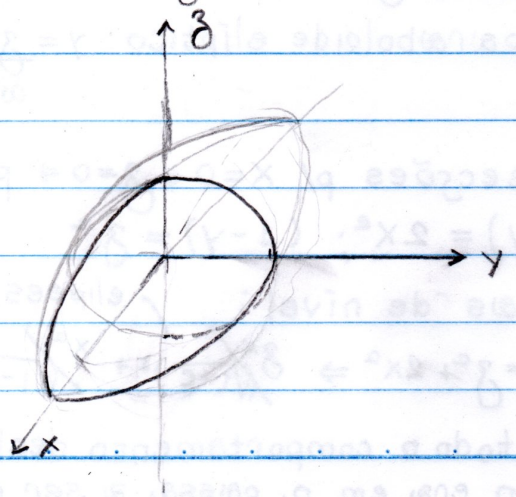
• intersecções

$x = 0 \Rightarrow 2y + 3z = 1$

$y = 0 \Rightarrow x + 3z = 1$

$z = 0 \Rightarrow x + 2y = 1$

b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (elipsoide)



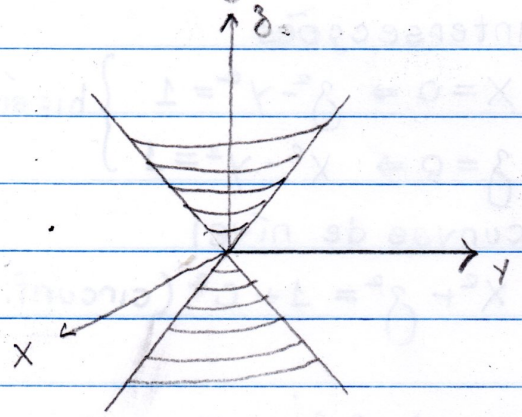
• intersecções

$x = 0 \Rightarrow y^2/(1/\sqrt{2})^2 + z^2/(1/\sqrt{3})^2 = 1$

$y = 0 \Rightarrow x^2 + z^2/(1/\sqrt{3})^2 = 1$

$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2/(1/\sqrt{2})^2 = 1$

c) $x^2+y^2-z^2=0$ (cone)



- intersecções

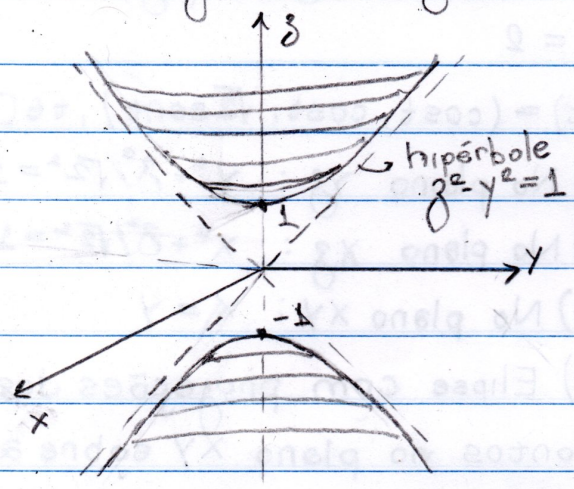
$x=0 \Rightarrow z=\pm y$

$y=0 \Rightarrow z=\pm y$

- curvas de nível

$x^2+y^2=c^2$ (circunferências)

d) $x^2+y^2-z^2=-1 \Rightarrow z^2-x^2-y^2=1$ (hiperboloide de duas folhas)



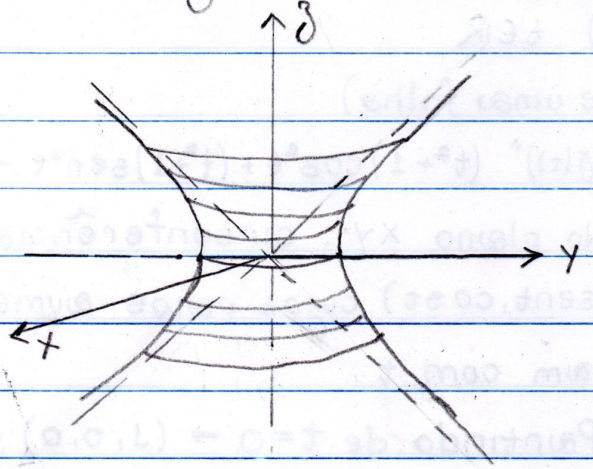
- intersecções

$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow z^2-y^2=1 \\ y=0 \Rightarrow z^2-x^2=1 \end{array}\right\}$ hipérboles

- curvas de nível

$x^2+y^2=1-c^2$ (circunferência)

e) $x^2+y^2-z^2=1$ (hiperboloide de uma folha)



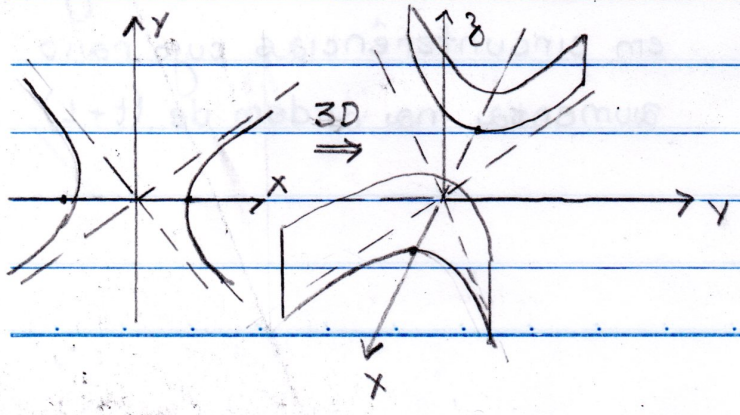
- intersecções

$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y^2-z^2=1 \\ y=0 \Rightarrow x^2-z^2=1 \end{array}\right\}$ hipérboles

- curvas de nível

$x^2+y^2=1+c^2$ (circunferência)

f) $x^2-y^2=1$ (cilindro de base hiperbólica)

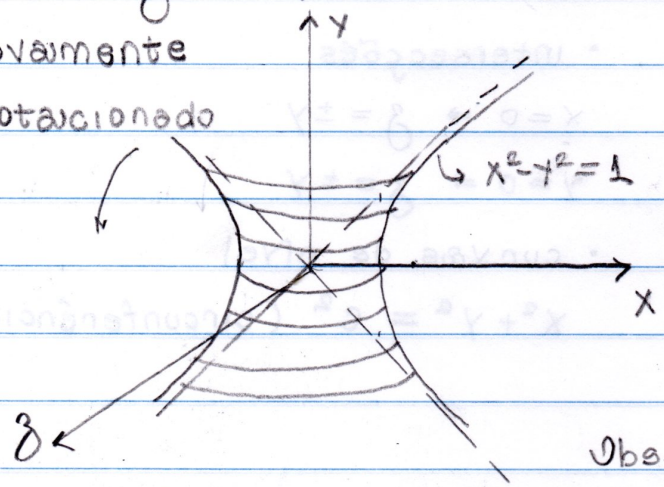


↳ hipérbole em xy

↳ "prolongado" para todos os valores de z

d) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ (hiperboloide de uma folha)

novamente rotacionado



- intersecções

$x = 0 \Rightarrow z^2 - y^2 = 1$
$z = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$ } hipérboles

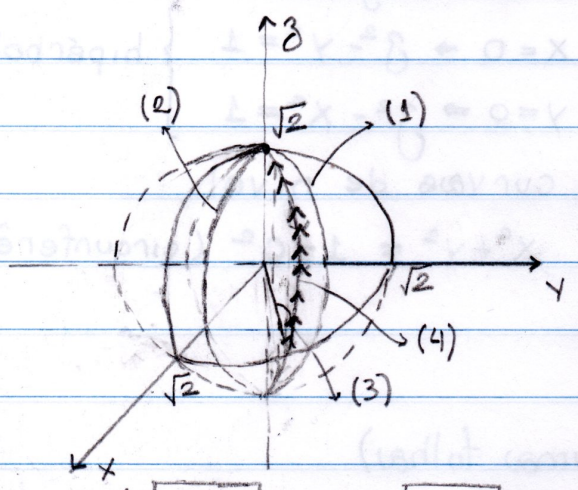
- curvas de nível

$x^2 + z^2 = 1 + c^2$ (circunf.)

Obs.: apenas a) é função

16a) $S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $\quad \forall (x,y) \exists! \, z \mid (x,y,z) \in S$

"$S(\gamma)$": $\cos^2 t + \cos^2 t + 2\,\text{sen}^2 t = 2$



$\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0; \pi]$

(1) No plano yz: $y^2 + z^2/\sqrt{2}^2 = 1$

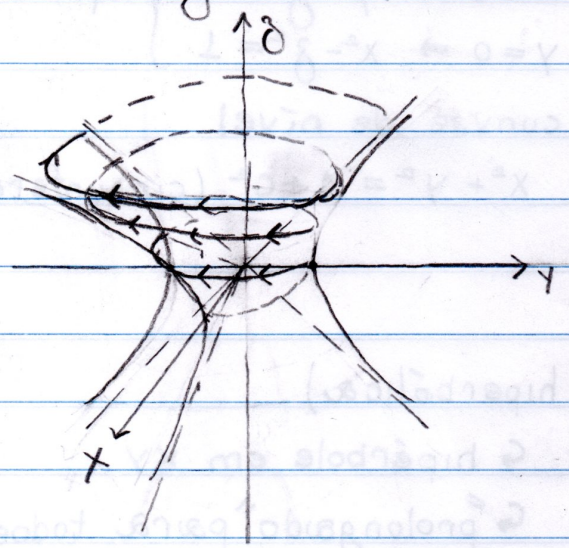
(2) No plano xz: $x^2 + z^2/\sqrt{2}^2 = 1$

(3) No plano xy: $x = y$

(4) Elipse com projeções dos pontos no plano xy sobre a reta $x = y$

b) $\gamma(t) = (\sqrt{t^2+1}\cos t, \sqrt{t^2+1}\,\text{sen}\,t, t)$, $t \in \mathbb{R}$

$S: x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (hiperboloide de uma folha)



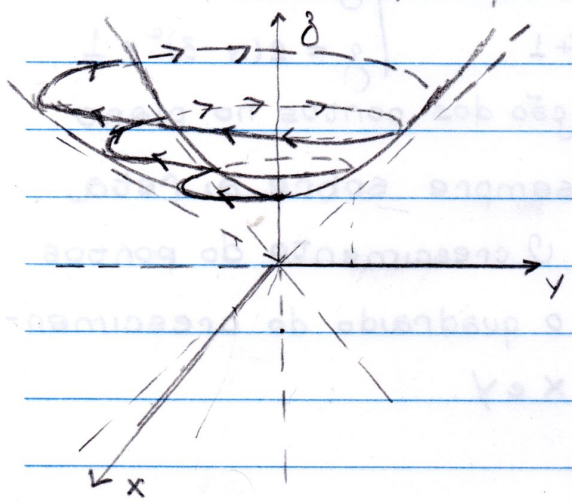
"$S(\gamma(t))$": $(t^2+1)\cos^2 t + (t^2+1)\,\text{sen}^2 t - t^2 = 1$

No plano xy: circunferências $(\text{sen}\,t, \cos t)$ cujos raios aumentam com t

Partindo de $t = 0 \to (1,0,0) \Rightarrow$ crescimento em espiral ($z(t) = t$) em circunferências cujo raio aumenta na ordem de $(t+1)$

c) $\gamma(t) = (t\cos t, t\,\text{sen}\,t, \sqrt{t^2+4}),\ t \geq 0$

S: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+4} \Rightarrow f(\gamma(t)) : t^2+4 = t^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t) + 4$



- Analisando $f(x,y)$:

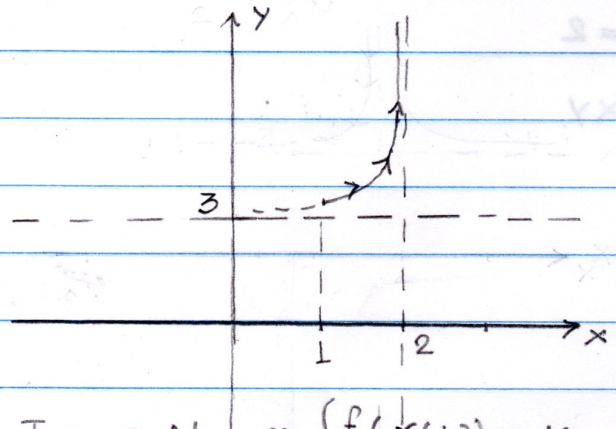
$$z^2 - x^2 - y^2 = 4$$

(hiperboloide de duas folhas, $z \geq 0$)

- No plano xy: circunferências $(\text{sen}\,t, \cos t)$ cujos raios aumentam com t

- Em $t=0 \Rightarrow (0,0,2) \Rightarrow$ crescimento em espiral $(\sqrt{t^2+4} = z(t))$

17. $\gamma(t) = (2-\cos t, \sec^2 t + 3),\ t \in [0, \pi/2[$ e $f(x,y) = ((x-2)^2(y-3))^{2/3} + 1$



$$\begin{cases} x(t) = 2 - \cos t \Rightarrow \cos t = 2 - x(t) \\ y(t) = \sec^2 t + 3 \Rightarrow 1/\cos^2 t = y(t) - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2-x)^2} = y - 3 \Rightarrow \underbrace{(y-3)(2-x)^2 = 1}_{\approx\, y = 1/x^2}$$

$t \in [0; \pi/2[\Rightarrow 1 < x < 2$

$$\text{Im}\,\gamma \subset N_K \Leftrightarrow \begin{cases} f(\gamma(t)) = K \\ (x,y) \in D_f = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\gamma(t)) = ((2-\cos t - 2)^2 \cdot (\sec^2 t + 3 - 3))^{2/3} + 1$$

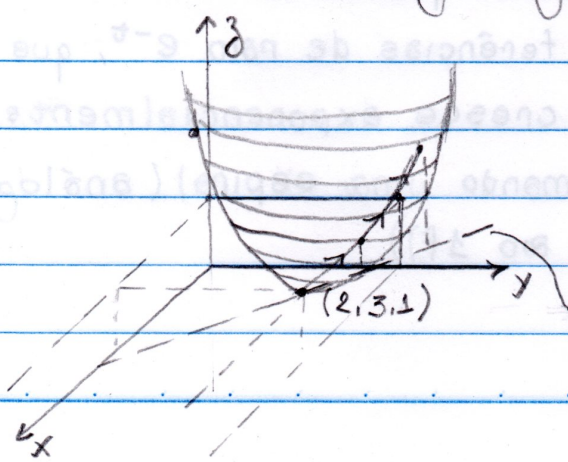
$$= (\cos^2 t \cdot \sec^2 t)^{2/3} + 1 = 2$$

$\Rightarrow K = 2$

18. $z(t) = g(\Gamma(t)) = (2-t-2)^2 + (3+t-3) + 1 \Rightarrow z(t) = 2t^2 + 1$

Assim $\text{Im}\,\Gamma(t) \subset Gr\,g$ $\quad g(x,y) = z = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$

$\Rightarrow z - 1 = (x-2)^2 + (y-3)^2$ (parabolóide)



- $\begin{cases} x = 2 \Rightarrow z - 1 = (y-3)^2 \\ y = 3 \Rightarrow z - 1 = (x-2)^2 \end{cases}$ parábola

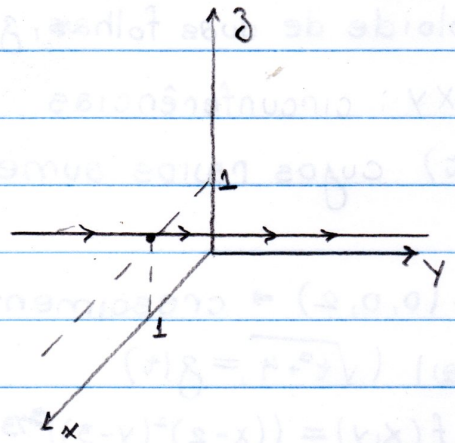
- $c - 1 = (x-2)^2 + (y-3)^2$ (circunf.)

$x + y = 5$

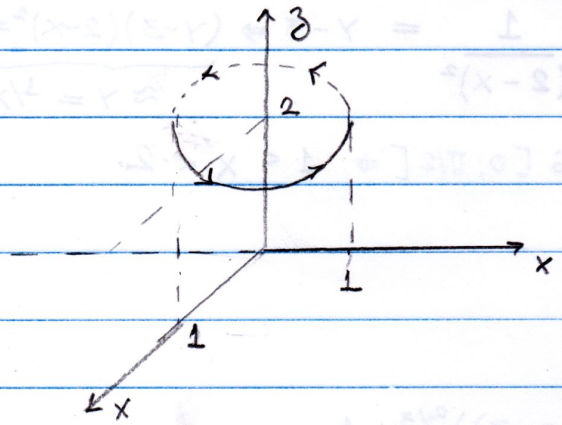
$\Gamma(t) = (2-t;\ 3+t;\ 2t^2+1) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2-t \\ y(t) = 3+t \\ z(t) = 2t^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ z = 2(2-x)^2+1 \\ z = 2(y-3)^2+1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ a projeção dos pontos no plano XY cai sempre sobre a reta $x+y=5$. O crescimento do pontos em z é o quadrado do crescimento em x e y.

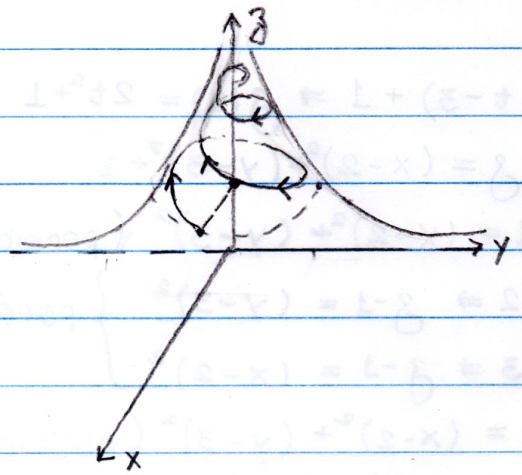
19 a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$



b) $\gamma(t) = (\underbrace{\cos t, \operatorname{sen} t}_{\text{circunferência em xy}}, 2)$ $\hookrightarrow$ z constante $= 2$



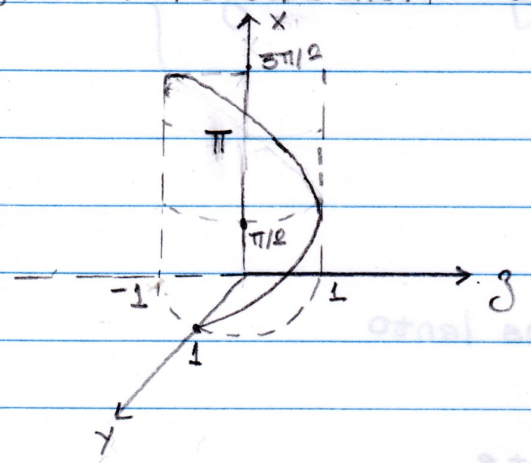
c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t})$



↳ e^{-t} tem máximo em $t=0$ ($e^{-0}=1$), depois decresce exponencialmente

↳ No plano XY tem-se circunferências de raio e^{-t}, que decresce exponencialmente formando uma espiral (análogo ao 1f))

d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \geq 0$

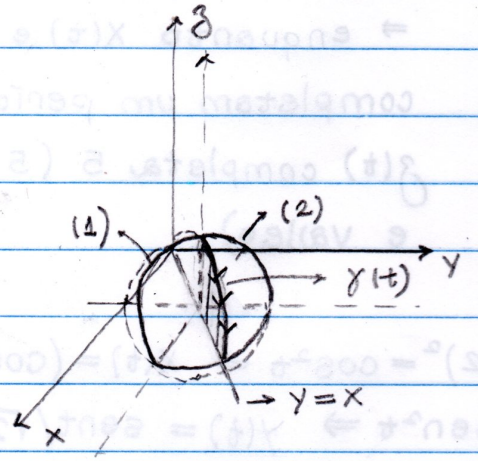


↳ circunferência em yz combinado com o crescimento linear em x ⇒ espiral

e) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

↳ olhar 16 a), a única mudança é o sentido de percurso, pois se trocou ($\cos t \to \operatorname{sen} t$, $\cos t \to \operatorname{sen} t$, $\sqrt{2}\operatorname{sen} t \to \sqrt{2}\cos t$)

f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$



↳ note que podemos desenhar $(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \cos t)$, transladando a origem para $(1,1,0)$

↳ análise de $(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \cos t)$

- circunferência de raio 1 nos planos xz e yz (1) e (2)
- projeção de $\gamma(t)$ no plano xy deve cair sobre $y = x$

20. a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ → cresc. linear em y } ⇒ V

↳ circunferência em xz

b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$

↳ curva sem simetria de sen t, cos t (~~I~~ ou VI)

↳ z(t) nunca assume o valor 0 ⇒ VI

c) $\gamma(t) = (t; 1/(1+t^2), t^2)$

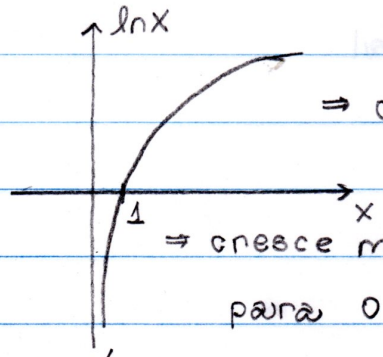
↳ curva sem simetria de sen t, cos t ⇒ I

d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t \cdot \cos t, \operatorname{sen} 3t \cdot \operatorname{sen} t, t)$ → crescimento linear } III

↳ circunferência modulada por sen 3t em xy

e) $\gamma(t) = (\underbrace{\cos t, \operatorname{sen} t}_{\text{circunferência em } xy}, \ln t)$ → cresc. logarítmico em z^* $\Big\} \Rightarrow$ II

* $f(x) = \ln x$



⇒ crescimento mais lento

⇒ cresce muito rapidamente para $0 < x \leq 1$

f) $\gamma(t) = (\underbrace{\cos t, \operatorname{sen} t}_{\text{circunferência em } xy}, \operatorname{sen} 5t)$ → comportamento como função seno com frequência 5 vezes maior do que $x(t)$ e $y(t)$

⇒ enquanto $x(t)$ e $y(t)$ completam um período, $z(t)$ completa 5 (5 picos e vales)

21a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (x+1)^2 = 1 \\ z = x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(x^2 + x + 1/4) + y^2 = 1/2 \\ z = x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4(x + 1/2)^2 + 2y^2 = 1 \\ z = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(x + 1/2)^2 = \cos^2 t \Rightarrow x(t) = (\cos t - 1)/2 \\ 2y^2 = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow y(t) = \operatorname{sen} t / \sqrt{2} \\ z = x + 1 \Rightarrow z(t) = (\cos t + 1)/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(t) = \left(\dfrac{\cos t - 1}{2} ; \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} ; \dfrac{\cos t + 1}{2} \right), t \in [0; 2\pi[$

$\Rightarrow \gamma'(t) = \left(\dfrac{-\operatorname{sen} t}{2} ; \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}} ; \dfrac{-\operatorname{sen} t}{2} \right), t \in \mathbb{R}$

$P = (-1/2; \sqrt{2}/2; 1/2) \Rightarrow t_0 = \pi/2 \Rightarrow \gamma'(t_0) = (-1/2; 0; -1/2)$

$\therefore X: (-1/2; \sqrt{2}/2; 1/2) + \lambda(-1/2; 0; -1/2), \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2+z^2-(x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(1-x)^2=1 \\ z=1-x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2-2x+y^2=0 \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x^2-x+1/4)+y^2=1/2 \\ z=1-x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(x-1/2)^2+y^2=1/2 \\ z=1-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(x-1/2)^2+2y^2=1 \\ z=1-x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4(x-1/2)^2=\cos^2 t \\ 2y^2=\operatorname{sen}^2 t \\ z=1-(\cos t+1)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=(\cos t+1)/2 \\ y(t)=\operatorname{sen} t/\sqrt{2} \\ z(t)=(1-\cos t)/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(t)=\left(\dfrac{\cos t+1}{2};\ \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1-\cos t}{2}\right),\ t\in[0;2\pi[$

$\Rightarrow \gamma'(t)=\left(\dfrac{-\operatorname{sen} t}{2};\ \dfrac{\cos t}{\sqrt{2}};\ \dfrac{\operatorname{sen} t}{2}\right)$

$P=(1/2;\sqrt{2}/2;1/2) \Rightarrow t_0=\pi/2 \Rightarrow \gamma(t_0)=(-1/2;0;1/2)$

$\therefore\ X:\ (1/2;\sqrt{2}/2;1/2)+\lambda(-1/2;0;1/2),\ \lambda\in\mathbb{R}$

c) $\begin{cases} z=y^2-x^2 \\ 1=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+1=2y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\operatorname{sen} t \\ z(t)=2\operatorname{sen}^2 t-1=-\cos 2t \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(t)=(\cos t;\ \operatorname{sen} t;\ -\cos(2t)),\ t\in[0;2\pi[$

$\Rightarrow \gamma'(t)=(-\operatorname{sen} t;\ \cos t;\ 2\operatorname{sen}(2t))$

$P=(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;0) \Rightarrow t_0=\pi/4 \Rightarrow \gamma'(t_0)=(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;2)$

$\therefore\ X:\ (\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;0)+\lambda(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;2),\ \lambda\in\mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=1 \\ y=2z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(2z+1)^2-2z^2=1 \\ y=2z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2z^2+4z=0 \\ y=2z+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2(z^2+2z+1)=2 \\ y=2z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2/2+(z+1)^2=1 \\ y=2z+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=\sqrt{2}\cos t \\ z(t)=\operatorname{sen} t-1 \\ y(t)=2\operatorname{sen} t-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t;\ 2\operatorname{sen} t - 1;\ \operatorname{sen} t - 1),\ t \in [0; 2\pi[$

$\gamma'(t) = (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t;\ 2\cos t;\ \cos t)$

$P = (-\sqrt{2}; -1; -1) \Rightarrow t_0 = \pi \Rightarrow \gamma'(t_0) = (0; -1; -2)$

$X: (-\sqrt{2}; -1; -1) + \lambda(0; -2; -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

e) $\begin{cases} x = z \\ x^2 + y^2 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x^2 + y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x^2 - x + 1/4 + y^2 = 1/4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ 4(x - 1/2)^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (\cos t + 1)/2 = z(t) \\ y(t) = \operatorname{sen} t/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(t) = \left(\dfrac{\cos t + 1}{2}, \dfrac{\operatorname{sen} t}{2}; \dfrac{\cos t + 1}{2}\right),\ t \in [0; 2\pi[$

$\Rightarrow \gamma'(t) = \left(-\dfrac{\operatorname{sen} t}{2}; \dfrac{\cos t}{2}; -\dfrac{\operatorname{sen} t}{2}\right)$

$P = (1/2; 1/2; 1/2) \Rightarrow t_0 = \pi/2 \Rightarrow \gamma'(t_0) = (-1/2; 0; -1/2)$

$\therefore X: (1/2; 1/2; 1/2) + \lambda(-1/2; 0; -1/2),\ \lambda \in \mathbb{R}$

f) $\begin{cases} z = \sqrt{4x^2 + y^2} \\ z = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = 4x^2 + y^2 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + y^2 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 1 = y^2 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(t) = t \\ x(t) = (t^2 - 1)/4 \\ z(t) = (t^2 + 1)/2 \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma(t) = \left(\dfrac{t^2 - 1}{4}; t; \dfrac{t^2 + 1}{2}\right),\ t \in \mathbb{R}$

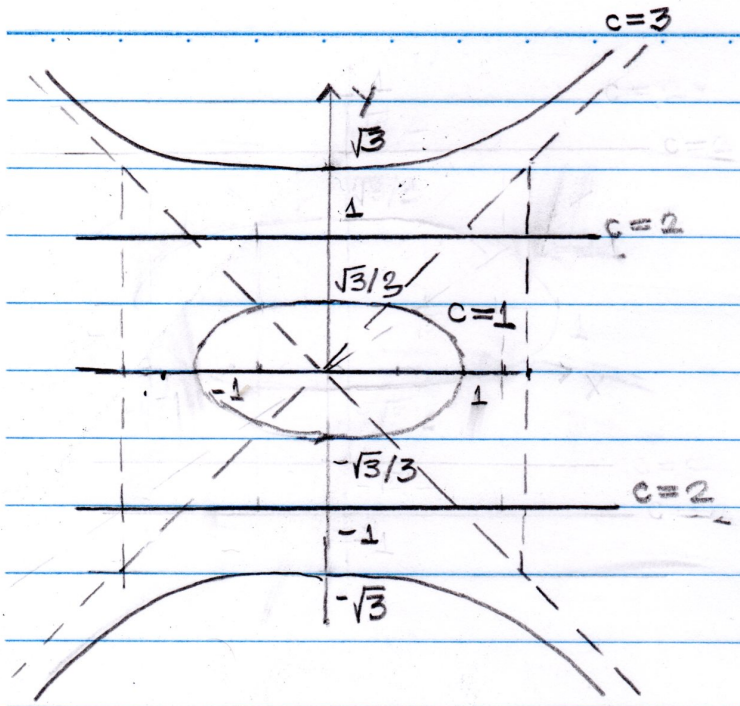
$\Rightarrow \gamma'(t) = (t/2; 1; t)$

$P = (0, 1, 1) \Rightarrow t_0 = 1 \Rightarrow \gamma'(t_0) = (1/2; 1; 1)$

$\therefore X: (0, 1, 1) + \lambda(1/2; 1; 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

22a) $f(x, y) = \dfrac{2x^2 + 4y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

- $c = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = 2x^2 + 4y^2 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 1$ (elipse)
- $c = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 = 2x^2 + 4y^2 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1$
- $c = 3 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3 = 2x^2 + 4y^2 \Rightarrow \dfrac{y^2}{\sqrt{3}^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{3}^2} = 1$ (hipérbole)



b) $c = 1 \Rightarrow x^2 + 3y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \gamma(t) = (\cos t;\ \operatorname{sen} t/\sqrt{3})$

$t \in [0; 2\pi[$

c) $P = (-1, 0) \Rightarrow t_0 = \pi$

$\gamma'(t) = \left(-\operatorname{sen} t;\ \dfrac{\cos t}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \gamma'(\pi) = (0, -\sqrt{3}/3)$

d) $\operatorname{Im} \Gamma \subset \operatorname{Gr} f \Rightarrow z(t) = f(\Gamma(t)) = \dfrac{2\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \cos^2 t + 1$

$\Rightarrow \Gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \cos^2 t + 1)$

$\Rightarrow \Gamma'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, -2\operatorname{sen} t \cos t)$

$\Rightarrow \Gamma'(\pi/3) = (1/2, -\sqrt{3}/2; -\sqrt{3}/2)$

① demonstração em a)

CÁLCULO II - Lista 1 (Limites e continuidade)

23a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ⇒ não existe, pois

Para $(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow (x\pm y)^2>0 \Rightarrow x^2\pm 2xy+y^2>0$

$\Rightarrow x^2+y^2 > \pm 2xy \Rightarrow \left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right| < 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < \underbrace{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{função limitada ①}} < \dfrac{1}{2}$

A demonstração de que a função é limitada servirá para outros itens.

Tome duas curvas $\gamma_1=(0,t)$ e $\gamma_2=(t,t)$, ambas são contínuas no $(0,0)$ e $\forall t\neq t_0=0 \Rightarrow \gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)\neq(0,0)$. Assim, se o limite em questão existir: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(\gamma_1) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(\gamma_2) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$, em que $f(x)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Mas: $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0\cdot t}{0^2+t^2} = 0 = L_1$

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t\cdot t}{t^2+t^2} = 1/2 = L_2$

Como $L_1\neq L_2 \Rightarrow$ o limite não existe

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{ltda ①}} \underbrace{\cos(x^2+y^2)}_{1} \cdot \underbrace{x}_{0} = 0$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{x^2+y^2}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\overbrace{(x+y)}^{0}\overbrace{(x^2+y^2)}^{1}}{(x^2+y^2)} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{(x+y)}^{0}\cdot\overbrace{\dfrac{(-xy)}{x^2+y^2}}^{\text{ltda ①}} = 0$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$ ⇒ não existe, pois para $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

$\gamma_1=(t,0) \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2\cdot 0}{2t^4+t^2 0+0^2} = 0 = L_1$

$\gamma_2(t) = \underbrace{(t, t^2)}_{(*)} \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 \cdot t^2}{2t^4 + t^2t^2 + t^4} = \dfrac{1}{4} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, o limite não existe

(*) Note que a escolha das curvas deve ser feita de modo que os limites retornem valores diferentes (para se provar que o limite não existe). Em geral, por γ_1 queremos $L_1 = 0$ (basta fazer com que o numerador zere e denominador não – o denominador tenderá a 0, mas não é 0). Por γ_2 queremos $L_2 \neq 0$ (o numerador não poderá zerar e procuramos fazer com que cada parcela do denominador tenha a mesma potência em t para somá-las).

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2} \Rightarrow$ não existe, pois para $f(x,y) = \dfrac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

$\gamma_1(t) = (t, 0) \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{2t^2 + 0 + 0}{3t^2 + 0} = \dfrac{2}{3} = L_1$

$\gamma_2(t) = (t, t) \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{2t^2 + 3t^2 + 4t^2}{3t^2 + 5t^2} = \dfrac{9}{8} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, o limite não existe

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \Rightarrow$ não existe, pois para $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

$\gamma_1(t) = (t, 0) \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{0}{t^4} = 0 = L_1$

$\gamma_2(t) = \underbrace{(t, t^2)}_{(*)} \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \dfrac{1}{2} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, o limite não existe

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^3 - y} \Rightarrow$ não existe, pois para $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^3 - y}$

$\gamma_1(t) = (t, 0) \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{0}{t^3} = 0$

① demonstração em a)

Para escolher $\gamma_2(t)$, vamos analisar as curvas de nível de $f(x,y)$:

$$c = \frac{xy}{x^3-y} \Leftrightarrow cx^3 - yc = xy \Rightarrow y = \frac{cx^3}{x+c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Então $\gamma_2(t) = \left(t, \frac{ct^3}{t+c}\right)$ é uma parametrização válida

E $\gamma_2(t_0) = (0,0)$ se $t_0 = 0$. Portanto:

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t \cdot ct^3}{t+c}\right) \Big/ \left(t^3 - \frac{ct^3}{t+c}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{ct^4}{t+c}\right) \Big/ \left(\frac{\cancel{ct^3} + t^4 - \cancel{ct^3}}{t+c}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{ct^4}{\cancel{t+c}} \cdot \frac{\cancel{t+c}}{\cancel{t^4}} = \lim_{t\to 0} c = c = L_2$$

Tomando qualquer $c \neq 0 \Rightarrow L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ o limite não existe

h) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 \cdot \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}_{\text{ltda ②}} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}_{\to 0} = 0$$

{ Para $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq x^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq x^2+y^2 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{função limitada ②}} \leq 1$$ }

Note que para chegar na função do exercício substituímos x por x^2, o que não muda a demonstração de ②

i) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3+3x^2y+3xy^2}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3+x^2y+xy^2+2xy(x+y)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overset{\to 0}{(x+y)}\overset{\to 1}{(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} + \lim \underbrace{\frac{2xy}{x^2+y^2}}_{\text{ltda ①}} \underbrace{(x+y)}_{\to 0} = 0$$

① demonstração em a)
② " em h)

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$= \lim\limits_{(x,y)} \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{ltda ② (olhar h))}} \cdot \operatorname{sen}\left(\underbrace{\dfrac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{ltda ① (olhar a))}}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$

o argumento de seno tende a 0 ⇒ seno → 0

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$ não existe, pois para $f(x,y)=\dfrac{x^3y+y^4+x^4}{x^3y-xy^3}$

$\gamma_1(t)=(t,2t) \Rightarrow \lim\limits_{t\to0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^3\cdot 2t+16t^4+t^4}{t^3\cdot 2t-t\cdot 8t^3} = -\dfrac{19}{6} = L_1$

p/ evitar zerar o denominador

$\gamma_2(t)=(t,-2t) \Rightarrow \lim\limits_{t\to0} f(\gamma_2(t)) = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{t^3\cdot(-2t)+16t^4+t^4}{t^2\cdot(-2t)-t(-8t^3)} = \dfrac{15}{6} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ o limite não existe

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{y^4+\operatorname{sen}(x^2+y^2)} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\overset{0}{x}\cdot\overset{\text{ltda ②}}{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}} + \overset{1\ ③}{\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}}{\underset{0}{y^2}\cdot\underset{\text{ltda ②}}{\dfrac{y^2}{x^2+y^2}} + \underset{1\ ③}{\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}} = 1$

dividindo todos os termos por x^2+y^2

Suponha que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ e $\lim\limits_{u\to L_1} h(u) = L_2$.

Então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(f(x,y)) = \lim\limits_{u\to L_1} h(u) = L_2$ (limite da composta)

ex.: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{u\to0}\dfrac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$ ③

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$ não existe, pois para $f(x,y)=\dfrac{x^3y^4+x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$

$\gamma_1(t)=(t,0) \Rightarrow \lim\limits_{t\to0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{0}{t^6} = 0 = L_1$

Para escolher $\gamma_2(t)$, vamos lembrar o que foi dito em (*) no

② demonstração em h)
③ teorema em 23 l)

item d) deste exercício, Vamos tomar uma parametrização que iguale os expoentes de x e y no denominador. Tal como

$$\gamma_2(t) = (t^4, t^3) \Rightarrow \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim \frac{t^{12}\cdot t^{12} + t^{20}\cdot t^{12/3}}{t^{24}+t^{24}} = 1 = L_2$$

Como $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ o limite não existe

n) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}\,\frac{(1+\cos(x^2+y^2))}{(1+\cos(x^2+y^2))}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(1-\cos^2(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3\cdot(1+\cos(x^2+y^2))} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\,\mathrm{sen}^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3(1+\cos(x^2+y^2))}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overset{\to 0}{x}\cdot \underbrace{\frac{x^2}{(x^2+y^2)}}_{\text{ltda ②}} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\right)^2}_{1\ \text{(limite composta) ③}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos(x^2+y^2)}}_{\to 1} = 0$$

24 a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(u)}{u} = 1 \quad \text{(limite da composta) ③}$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{u\to 0^+} u\cdot \ln u = \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln u}{1/u}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{1/u}{-1/u^2} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u}\cdot\frac{-u^2}{1} = \lim_{u\to 0^+} -u = 0 \quad \left(\text{limite da composta}\right) ③$$

25

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} \to g(x,y) & , (x,y)\neq(0,0) \text{ e } (x,y)\neq(1,1) \\ 1 & , (x,y)=(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(1,1) \end{cases}$$

Para que a função seja contínua em (0,0) e em (1,1) devemos ter que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = f(0,0) = 1$ e $\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) = f(1,1) = 0$

Mas, se tomarmos $\gamma = (t,t)$, $t_0 = 0$, verificamos que

$$\lim_{t\to t_0} g(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2-t^2)(t-1)^2}{(t^2+t^2)((t-1)^2+(t-1)^2)} = 0 \neq 1 \Rightarrow$$ a função não é contínua em (0,0)

Agora vamos verificar a continuidade em (1,1):

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)\left[(x-1)^2+(y-1)^2\right]}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \cancel{(x-y)}^{\,0} \cdot \cancel{\frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2}}^{\,2} \cdot \cancel{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}} = 0$$

limitada ②

Com $\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) = 0 = f(1,1) \Rightarrow f(x,y)$ é contínua em (1,1)

Assim $f(x,y)$ é contínua em $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$

26.

$$f(x,y) = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{x^4}{x^4+y^2}\,\mathrm{sen}\left(e^{-1/(x^2+y^2)}\right)}_{g(x,y)}, & (x,y)\neq 0 \\ L, & (x,y)=0 \end{cases}$$

Existe L para que f seja contínua em (0,0) desde que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = L$, $L\in\mathbb{R}$.

Vamos calcular esse limite por partes:

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-1}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0^+} -\dfrac{1}{u} = -\infty$ (a)
- $\lim_{u\to-\infty} e^t = 0 \overset{(a)}{\Rightarrow} \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/(x^2+y^2)} = 0$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{sen}\,(\underbrace{e^{-1/(x^2+y^2)}}_{\text{argumento do seno}\to 0}) = 0$ (b)

Por fim:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}^{\text{ltda ②}} \cdot \cancel{\mathrm{sen}\left(e^{-1/(x^2+y^2)}\right)}^{\,0} = 0 = L$$

∴ Para $L=0$, f é contínua em (0,0)

27 $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2}$

a) • $f(x,y) = 1 = \dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2} \Rightarrow 3x^2-6x+3+y^2-2y+1 = x^2-y^2$

completar quadrados

$\Rightarrow 2x^2-6x+2y^2-2y+4=0 \Rightarrow 2(x^2-3x+9/4)+2(y^2-y+1/4) = -3/2$

$\Rightarrow 2(x-3/2)^2+2(y-1/2)^2 = 3/2 \Rightarrow \dfrac{(x-3/2)^2}{(\sqrt{3}/2)^2}+\dfrac{(y-1/2)^2}{(\sqrt{3}/2)^2} = 1$

• $f(x,y) = 3 = \dfrac{3(x-1)^2+(y-1)^2}{x^2-y^2} \Rightarrow 3x^2-6x+3+y^2-2y+1 = 3x^2-3y^2$

$\Rightarrow 4y^2-2y-6x+4=0 \Rightarrow x = \dfrac{2y^2-y-2}{3}$

A parte de esboçar curvas de nível já foi bastante explorada, por isso deixei de fazer o esboço da elipse e da parábola acima.

b) Pela definição de curva de nível, todos os pontos (x,y) que satisfazem a equação da elipse acima ($\gamma_1(t)$) são tais que $f(x,y)=1$. Em notação $f(\gamma_1(t))=1$, desde que $(x,y)\in Df$. O mesmo vale para a parábola ($\gamma_2(t)$) no nível 3, $f(\gamma_2(t))=3$, $\forall (x,y)\in Df$.

Verifique que o ponto $(1,1)$ pertence tanto à $\gamma_1(t)$ quanto à $\gamma_2(t)$, mas não a Df. Como $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ são curvas contínuas, que passam uma única vez pelo ponto $(1,1)$, temos que: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ se existir é $\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) = 1 = L_1$

Mas também, se existir, é $\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma_2(t)) = 3 = L_2$

Como $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

{ Obs.: $\underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}_{\text{se existir}} = \underbrace{\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma(t))}_{\text{qqr } \gamma(t)}$, se $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$; $\gamma(t)\neq(x_0,y_0)$, $\forall t\neq t_0$
$\gamma(t)\subset Df$, $\forall t\neq t_0$; γ contínua em t_0 }

Observação final: faltou verificar na questão 6 se dado que $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo t então $\|\gamma(t)\| = C, C \in \mathbb{R}$ (é isso que significa verificar se a recíproca é verdadeira).

$$\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0 \Rightarrow x(t)\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{dx}{dt} + y\cdot\frac{dy}{dt} = 0$$

Integrando no tempo: $\int x\frac{dx}{dt}dt + \int y\frac{dy}{dt}dt = \int 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 = C_2, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\gamma(t)\| = C, C \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ Sim, a recíproca é verdadeira

Observação final 2: algumas das resoluções podem pecar em formalismo matemágico. De qualquer forma, espero ter ajudado :)

Boa prova a todos!

Eterna Turma 06