MAT2454 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia II

2º semestre de 2006 - 3ª Prova - 04/12/2006

Gabarito

A

Nome : _____

NºUSP : _____

Turma: _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Justifique todas as respostas

1ª Questão: (1,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$ tem equação $3x - 6y - 2z - 8 = 0$. Determine a derivada direcional de f no ponto $(1, -1)$ na direção do vetor $\vec{u} = (1, 1)$.

Escrevendo a equação do plano tangente, temos:

$\frac{3}{2}x - 3y - 4$. Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{3}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -3$

f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, para $\vec{w} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$(-1,1) = \langle \nabla f(-1,1), \vec{w} \rangle = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$

Gabarito A

2ª Questão: (1,5 pontos) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Seja S uma superfície de nível de F e seja P um ponto de S. Sabe-se que:

i) a reta normal a S em P é paralela a $\left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$;

ii) o maior valor da derivada direcional $\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(P)$ é 3 $\quad (||\vec{u}|| = 1)$;

iii) Para $\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, temos $\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Calcule $\nabla F(P)$.

Sabemos que $\nabla F(P)$ é normal ao plano tangente a S em P e portanto, por i), $\nabla F(P)$ é paralelo a $\left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$, isto é, $\nabla F(P) = \lambda\left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$ para algum λ real (*)

Sabemos que o maior valor de $\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(P)$, quando $||\vec{u}|| = 1$, é igual a $||\nabla F(P)||$ e portanto, por ii) e por (*), temos $3 = ||\nabla F(P)|| = |\lambda|\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = |\lambda|\frac{3}{2}$.

Logo $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$.

Se $\lambda = -2$, então $\nabla F(P) = (-1, 2, 2)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) = \left\langle (-1,2,2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se $\lambda = 2$, então $\nabla F(P) = (1, -2, -2)$ e

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) = \left\langle (1,-2,-2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

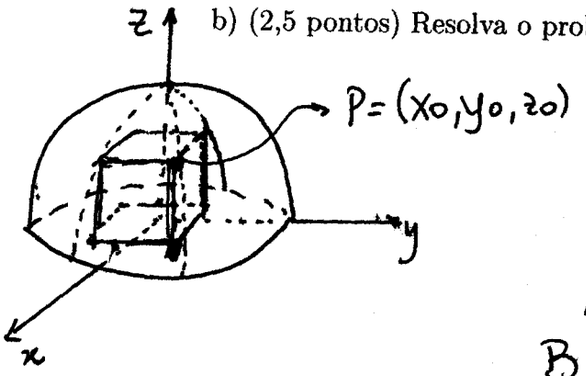
Como queremos $\frac{\partial F}{\partial \vec{w}}(P) \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, então $\lambda = -2$ e

3ª Questão: Considere o seguinte problema:

"Determinar as dimensões de um paralelepípedo de volume máximo, com faces paralelas aos planos coordenados, de modo que uma das faces está contida no plano $z = 0$ e a correspondente face oposta tem os seus vértices no parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$".

a) (0,5 ponto) Mostre que o problema tem solução.

b) (2,5 pontos) Resolva o problema.



a) Por simetria, podemos considerar o problema no 1º octante. A intersecção do parabolóide com o 1º octante é $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 4 - x^2 - y^2,\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq$

B é um conjunto fechado e limitado (compacto) de $\mathbb{R}^3$.

Queremos determinar $P = (x_0, y_0, z_0) \in B$ tal que o volume do paralelepípedo seja máximo, ou seja, queremos $P \in B$ que maximiza a função $V(x,y,z) = 4xyz$

Como B é fechado e limitado (compacto) e $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é contínua, o teor. de Weierstrass garante que V tem máximo e mínimo em B.

b) • Se $(x,y,z) \in B$ com $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$, temos que $V(x,y,z) = 0$ e, portanto, (x,y,z) é um ponto de mínimo de V em B (repare que $V(x,y,z) \geq 0$ $\forall (x,y,z) \in B$).

* Procuramos, então, um ponto $(x,y,z) \in B$ com $x \neq 0, y \neq 0$ e $z \neq 0$ tal que $V(x,y,z)$ seja máximo.

Substituindo $z = 4 - x^2 - y^2$, temos $V = 4xy(4 - x^2 - y^2)$
$= 16xy - 4x^3 - 4xy^3$

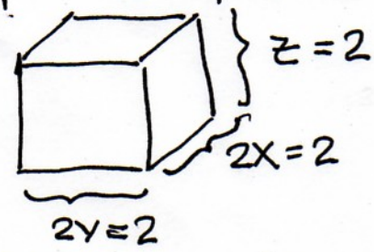
Basta analisar os pontos críticos de $F(x,y) = 4xy - x^3y - xy^3$ em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y >$ e $x^2 + y^2 < 4\} =$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x(4 - 3y^2 - x^2) = 0$

As soluções deste sistema são $(0, \pm 2), (\pm 2, 0), (0,0), \pm(1,1)$ e $\pm(-1,1)$. No conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ considerado, só temos $(x,y) = (1,1)$

Conclusão: $x = y = 1 \Rightarrow z = 4 - x^2 - y^2 = 2$ e o paralelepípedo é o cubo $2 \times 2 \times 2$



<u>OBS</u> 1) A partir de * é possível solucionar o problema utilizando multiplicadores de Lagrange:

Procuramos, então, um ponto $(x,y,z) \in B$ com $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$ tal que $V(x,y,z)$ seja máximo. (cuja existência já foi estabelecida).

$V(x,y,z) = 4xyz$ com a restrição $G(x,y,z) = 4 - x^2 - y^2 - z = 0$.

$\nabla V = \lambda \nabla G$ nos dá o sistema
$$\begin{cases} 4yz = -2\lambda x \\ 4xz = -2\lambda y \\ 4xy = -\lambda \\ 4 - x^2 - y^2 - z = 0 \end{cases}$$

e a única solução em B é $(x,y,z) = (1,1,2)$

2) É possível resolver o problema sem fazer a redução para o 1º octante e tomando, no lugar de B, $B' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 4 - x^2 - y^2 \text{ e } z \geq 0\}$ que também é fechado e limitado em $\mathbb{R}^3$.

4ª Questão: (2,0 pontos) Considere a função

$$f(x,y) = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$$

Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

A

- PONTOS CRÍTICOS :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ① \; 8xy - 8x = 0 \\ ② \; 4y^3 + 4x^2 - 16y = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \overset{②}{\Rightarrow} 4y^3 - 16y = 0$ $\begin{cases} y = 0 \\ y \neq 0 \Rightarrow 4y^2 - 16 = 0 \Rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$

$x \neq 0 \Rightarrow 8y - 8 = 0 \Rightarrow y = 1$

$\overset{②}{\Rightarrow} 4 + 4x^2 - 16 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 = 12$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ $\boxed{(0,0),\ (0,2),\ (0,-2),\ (\sqrt{3},1),\ (-\sqrt{3},1) \text{ SÃO OS PONTOS CRÍTICOS !}}$

- CLASSIFICAÇÃO :

$$H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 8y-8 & 8x \\ 8x & 12y^2-16 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8y - 8$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -8 < 0$ e $H_f(0,0) = (-8)(-16) = 128 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ máx. local.}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) = 8 > 0$ e $H_f(0,2) = 8 \cdot 32 = 256 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,2) \text{ mín. local}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2) = -24 < 0$ e $H_f(0,-2) = (-24) \cdot 32 = -768 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,-2) \text{ SELA}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{3},1) = 0$ e $H_f(\sqrt{3},1) = -192 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(\sqrt{3},1) \text{ SELA}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{3},1) = 0$ e $H_f(-\sqrt{3},1) = -192 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(-\sqrt{3},1) \text{ SELA}}$

5ª Questão: (2,0 pontos) Determine o valor máximo e o valor mínimo da função $S(x,y) = xy$ nos pontos da elipse $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0$

A

- PELO TEOREMA DE WEIERSTRASS, O PROBLEMA ADMITE SOLUÇÃO.

- VAMOS ENCONTRÁ-LA USANDO OS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

$$\nabla S(x,y) = \lambda\left(10x + 6y,\ 10y + 6x\right)$$

$\therefore$

$$\begin{cases} (1)\ y = \lambda(10x + 6y) \\ (2)\ x = \lambda(10y + 6x) \end{cases}$$

OBS.: $y = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = \lambda(10x)$ $\begin{cases} \lambda = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$x = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 0 = \lambda(10y)$ $\begin{cases} \lambda = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

ASSIM: $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

(E $(0,0)$ É SOLUÇÃO!)
(MAS NÃO ESTÁ NA ELIPSE)

ASSIM, PODEMOS SUPOR $x \neq 0$ e $y \neq 0$

DIVIDINDO: $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{10x + 6y}{10y + 6x} \Leftrightarrow 10y^2 + 6xy = 10x^2 + 6xy$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \pm x}$ (3)

MAS $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 64 = 0 \ \therefore \underset{(3)}{\Rightarrow} 5x^2 + 5x^2 \pm 6x^2 - 64 = 0$

$\Rightarrow 16x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 2$

ou $\Rightarrow 4x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 4$

$\therefore$ $(0,0)$, $(2,2)$, $(-2,-2)$, $(-4,+4)$, $(+4,-4)$ SÃO OS CANDIDATOS!

CALCULANDO:

$S(0,0) = 0$
$S(2,2) = 4$
$S(4,-4) = -16$
$S(-2,-2) = 4$
$S(-4,4) = -16$

$\therefore$

$(2,2)$, $(-2,-2)$	MÁXIMOS
$(4,-4)$, $(-4,4)$	MÍNIMOS