

Questão 1. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \int_1^3 \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx = \int_1^3 \frac{x+1}{(x-1)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{x+1}{(\frac{x-1}{2})^2+1} dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2+2u}{u^2+1} 2du$$

$$(*) \quad \boxed{x = 1 + 2u \Rightarrow dx = 2du \quad \text{e} \quad x + 1 = 2 + 2u}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2}{u^2+1} + \frac{2u}{u^2+1} \right] du = \int_0^1 \frac{1}{u^2+1} du + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u}{u^2+1} du = \arctg(u) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u}{u^2+1} du \stackrel{(**)}{=}$$

$$(**) \quad \boxed{v = u^2 + 1 \Rightarrow dv = 2u du}$$

$$= (\arctg(1) - \arctg(0)) + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln|v| \Big|_1^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (\ln|2| - \ln|1|) = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

$$b) \int \frac{\arctg(7x)}{x^3} dx \stackrel{(*)}{=} -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x^2(1+49x^2)} dx = -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} + \frac{7}{2} \int \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+49x^2} \right] dx \stackrel{(**)}{=}$$

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \arctg(7x) & du = \frac{7}{1+49x^2} dx \\ dv = \frac{1}{x^3} dx & v = -\frac{1}{2x^2} \end{array}}$$

$$(**) \quad \boxed{A = 0 \quad B = 1 \quad C = 0 \quad D = -49}$$

$$= -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} + \frac{7}{2} \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{-49}{1+49x^2} \right] dx \stackrel{(***)}{=} -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} - \frac{7}{2x} + \frac{7}{2} \int \frac{-7}{1+u^2} du$$

$$(***) \quad \boxed{u = 7x \quad du = 7 dx}$$

$$= -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} - \frac{7}{2x} - \frac{49}{2} \arctg(u) + k = -\frac{\arctg(7x)}{2x^2} - \frac{7}{2x} - \frac{49}{2} \arctg(7x) + k.$$

Questão 2.

a) Esboce o gráfico de $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$ e f é contínua $\Rightarrow$ não existem assíntotas verticais.

$f'(x) = (-2x^3 - 2x)e^{-x^2} = -2x(x^2 + 1)e^{-x^2} \Rightarrow x = 0$ é o único ponto crítico de f .

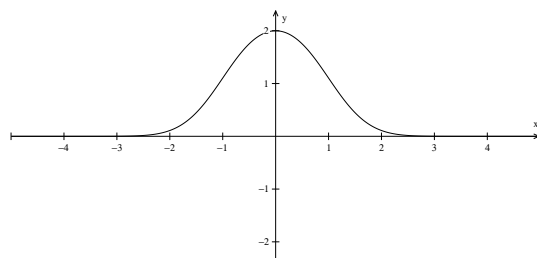
$f''(x) = (4x^4 - 2x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

$\nearrow \quad \searrow$			f		
$\hline + \quad \quad - \quad \hline$			f'		
0					

$\cup$		$\cap$		$\cup$		f	
$\hline + \quad \quad - \quad \quad + \quad \hline$		$\hline$		f''			
-1		1					

$\Rightarrow x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ é uma assíntota horizontal $\Rightarrow \nexists$ assíntotas oblíquas.

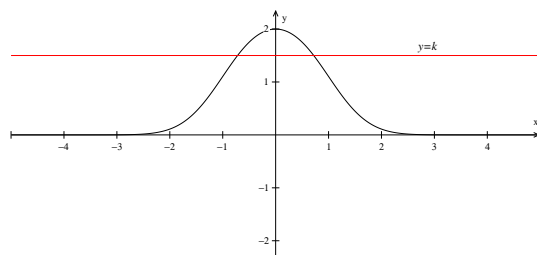


b) Para que valores de k a curva $y = \sqrt{\ln(x^2 + 2) - \ln(k)}$ corta a reta $y = x$?

Se x é um ponto de intersecção das duas curvas, temos:

$$x = \sqrt{\ln(x^2 + 2) - \ln(k)} \Rightarrow x^2 = \ln(x^2 + 2) - \ln(k) \Rightarrow x^2 = \ln\left(\frac{x^2 + 2}{k}\right) \Rightarrow e^{x^2} = \frac{x^2 + 2}{k} \Rightarrow \boxed{k = (x^2 + 2)e^{-x^2}}.$$

Ou seja, $0 < k \leq (c^2 + 2)e^{-c^2}$, onde c é o ponto de máximo de $(x^2 + 2)e^{-x^2} = f(x)$.



Pelo item (a) temos que $c = 0$, portanto $0 < k \leq f(0) = 2$.

(2,0) **Questão 3.** Um edifício com base retangular de $2000m^2$ deve ser construído num lote com lados paralelos ao do edifício, sendo exigido recuos de $5m$ na frente e no fundo, e recuos de $4m$ nas laterais. Ache as dimensões do lote com menor área onde esse edifício pode ser construído.

sejam x, y as dimensões do prédio. Então $x \cdot y = 2.000$
se A é a área do terreno:

$$A = (x+10) \cdot (y+8) = (x+10) \cdot \left(\frac{2000}{x} + 8\right)$$

$$\therefore A(x) = 2.080 + \frac{20000}{x} + 8x$$

$$A'(x) = -\frac{20000}{x^2} + 8 = \frac{8x^2 - 20000}{x^2} = \frac{8}{x^2} \cdot (x^2 - 2500)$$

$\underbrace{\quad}_{>0}$



Logo, A decresce até $x_0 = 50$ e cresce a partir de 50

Lote de menor área: 60×48 ($x_0 + 10 \times y_0 + 8$)

Questão 4. Seja $F(x) = \int_0^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} \sin(t^2) dt$.

(1,0) a) Calcule $F'(x)$ para $x \neq 0$.

(1,5) b) Verifique se F é derivável em $x_0 = 0$. Em caso afirmativo, calcule $F'(0)$.

Note que $F(x) = x^{1/3} \cdot \int_0^{x^{1/3}} \sin(t^2) dt$.

$$\begin{aligned} a) F'(x) &= \frac{1}{3} x^{-2/3} \cdot \int_0^{x^{1/3}} \sin(t^2) dt + x^{1/3} \cdot \sin(x^{1/3})^2 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} \\ &= \frac{1}{3} \left[x^{-2/3} \int_0^{x^{1/3}} \sin(t^2) dt + \sin(x^{2/3}) \cdot x^{-1/3} \right], \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

b) Como $\sqrt[3]{\cdot}$ é derivável em zero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/3} \cdot \int_0^{x^{1/3}} \sin(t^2) dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^{1/3}} \sin(t^2) dt}{x^{2/3}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{2/3}) \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}}{\frac{2}{3} x^{-1/3}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(x^{2/3})}{x^{2/3}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{x^{1/3}}_{\rightarrow 0} = 0$$

$$\therefore F'(0) = 0$$