(NUMÉRICO)

Método das Aproximações Sucessivas

1º PASSO: definir uma função de recorrência $\phi(x)$

→ FAZEMOS ISSO CRIANDO UMA FUNÇÃO CUJO ZERO (OU CUJA RESPOSTA) SEJA O VALOR DESEJADO, DAÍ ISOLAMOS O x E TEMOS $\phi(x)$

ISTO SE DEVE POIS $\phi(\bar{x})$ É UMA FUNÇÃO CUJO ZERO É O PRÓPRIO $\bar{x}$ ($\phi(\bar{x}) = \bar{x}$)

EXEMPLO:

QUEREMOS CALCULAR $\sqrt{2}$

$x^2 - 2 = 0$

$x^2 + x - x - 2 = 0$

$x(x+1) = x+2$

$x = \frac{x+2}{x+1}$ | outro exemplo

A FUNÇÃO SERÁ: $x^2 - 2 = 0 = f(x)$

ISOLANDO x TEREMOS $x = \frac{2}{x}$ ∴ $\phi(x) = \frac{2}{x}$

2º PASSO: DEFINIR UM INTERVALO QUE CONTENHA $\bar{x}$

→ ESTE INTERVALO DEVE SER PENSADO DE FORMA QUE:

$\phi(x)$ SEJA CONTÍNUA; $f(x)$ SEJA CONTÍNUA; $f(x)$ SEJA ESTRITAMENTE CRESCENTE OU DECRESCENTE (O QUE GARANTE QUE HAJA SOMENTE UMA RAIZ); $f(x)$ TROQUE DE SINAL NO INTERVALO (TEOREMA DE BOLZANO)

* (MÉTODO P/ DEFINIR INTERVALO ADIANTE)

3º PASSO: VERIFICAR A CONVERGÊNCIA DE $\phi(x)$

→ Determinada $\phi(x)$ temos que verificar se ela converge:

I) ϕ e ϕ' têm que ser contínuas no intervalo.

II) Mostrar que ϕ é uma M-contração: Fazemos isso provando que $|\phi'| < 1$, ou seja o máximo do módulo de ϕ' no intervalo deve ser menor que 1, isto é fácil de fazer calculando ϕ' nos extremos e nos pontos em que $\phi'' = 0$, e vendo se seus módulos são < 1

III) VERIFICAR SE $x_{n+1} = \phi(x_n)$ CAI SEMPRE DENTRO DO INTERVALO. FAZEMOS ISSO CALCULANDO MÁX e MÍN DE ϕ NO INTERVALO, DE MODO ANÁLOGO AO ITEM (II).

SE AS TRÊS CONDIÇÕES FOREM SATISFEITAS, ϕ IRÁ CONVERGIR. SE NÃO, NADA PODEMOS AFIRMAR, ENTÃO É MELHOR ESCOLHER OUTRA $\phi(x)$.

4° PASSO: ESCOLHER x_0, PARA COMEÇAR O PROCESSO.

SENDO I O INTERVALO ESCOLHIDO = $[a,b]$

e $c = \frac{a+b}{2}$

CALCULAMOS $\phi(c)$

SE $\phi(c) < c \Rightarrow x_0 = a$

SE $\phi(c) > c \Rightarrow x_0 = b$

SE $\phi(c) = c \Rightarrow c = \bar{x}$

5° PASSO: EXECUTAR AS ITERAÇÕES

P/ DETERMINAR O NÚMERO DE PASSOS FAZER: $|x_n - \bar{x}| \leq M^n |x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$

$M^n |x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$

$M^n \cdot c < \varepsilon$

$n \cdot \log M < \log \varepsilon/c$

ONDE: → M É O MÁXIMO DE $|\phi'(x)|$ NO INTERVALO, O QUAL JÁ ENCONTRAMOS P/ CONFIRMAR CONTRAÇÃO;

→ $|x_0 - \bar{x}| = c$, POIS ESTA SERÁ A PIOR HIPÓTESE DE $|x_0 - \bar{x}|$ (NO CASO DE $x_0 = c$)

→ N É O Nº DE PASSOS

OUTROS MÉTODOS DE PARADA:

- (I) $\frac{M}{1-M}|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ → VALE SEMPRE QUE $M < 1$

(II) $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ → VALE SE SEQUÊNCIA É ALTERNADA
↳ $\phi(x)$ decrescente no Intervalo

→ SE $\frac{M}{1-M} > 1$, PARAMOS QUANDO (II)

→ SE $\frac{M}{1-M} < 1$, PARAMOS QUANDO (I)

- CASO ϕ SEJA MONOTÔNICA, USAMOS MÉTODO PARECIDO C/ O DE NEWTON ↳ $\phi(x)$ CRESCENTE NO INTERVALO

→ $x_{n+1} = \phi(x_n \pm 2\varepsilon)$

E PARAMOS QUANDO $x_{n+1} > x_n - 2\varepsilon$ OU $x_{n+1} < x_n + 2\varepsilon$

* MÉTODO PARA DEFINIR INTERVALO:

→ PEGAMOS UM t_0 INICIAL DE MODO QUE $|\phi'(t_0)| < 1$, QUE É UMA DAS GARANTIAS DA M-CONTRAÇÃO

EX.: $\phi(t) = -2e^{-t}$

$\phi'(t) = 2e^{-t} \Rightarrow 2e^{-t} < 1 \Rightarrow e^{-t} < 1/2 \Rightarrow -t < -0{,}69 \Rightarrow t > 0{,}69$

$\boxed{t_0 = 1}$

→ DEFINIDO t_0, TEMOS QUE ENCONTRAR $t_1 > t_0$ (POIS $t > 0{,}69$) DE MODO QUE $f(t_1) \cdot f(t_0) < 0$, SATISFAZENDO O TEOREMA DE BOLZANO.

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $x_n \in I$ onde $x_{n+1} = \phi(x_n)$

↳ sequência

Método de Newton

1.º Passo → Definir $f(x)$

2.º Passo → $\phi(x)$:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

3.º Passo: Definir Intervalo

→ Verificar Teorema de Bolzano

→ Verificar se existe apenas 1 raiz ($f'(x)$ estritamente crescente ou decrescente)

→ Verificar se $F(x)$ não muda de concavidade

4º Passo: Escolha de x_0, no intervalo $[a,b]$ definido

→ Analisar $f'(x)$ e $f''(x)$

→ Se $f'(x)$ e $f''(x)$ tiverem o mesmo sinal: $x_0 = b$

→ Se $f'(x)$ e $f''(x)$ tiverem sinais contrários: $x_0 = a$

5º Passo: Tabela com precisão pré fixada

x_n	$x_n + 2\varepsilon$ (ou $x_n - 2\varepsilon$)	$f(x_n \pm 2\varepsilon)$

Parar quando $f(x_n \pm 2\varepsilon)$ mudar de sinal

$$\bar{x} = x_n \pm \varepsilon$$

- $\bar{x}$: valor com aproximação que queremos
- x_n: último valor de x_n da tabela
- ε: precisão pré-fixada

Obs.: Como provar convergência do método de Newton?

→ Critério geral ($f(x) \cdot f''(x) < 0$ ou $f'(x) \cdot f''(x) > 0$)

ou

→ Definido um intervalo $[a,b]$ que contenha $\bar{x}$, ver p/ qual dos extremos, $\phi(a)$ ou $\phi(b)$ cai dentro do intervalo. Se $\phi(b)$ cair, p.ex., então converge p/ $x_0 = a$. Se der certo para a e b, $\phi(x)$ converge p/ qualquer $x \in I$

Método da Bissecção

1.º Passo: Definir $f(x)$

2º Passo: Definir Intervalo $I = [a, b]$

→ Mesmo que método de Newton

3º Passo: Determinar número de passos

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

4º Passo: Iterações

→ Sendo $c = \frac{a+b}{2}$

→ se $f(a) \cdot f(c) < 0$, então $b = c$
senão, se $f(c) \cdot f(b) < 0$, então $a = c$
senão, $c = \bar{x}$

ex (n=3)

	a	c	b	f(c)·f(a)	f(c)·f(b)
	0	0,5	1	<0	
1	0,5	0,75	1		<0
2	0,5	0,625	0,75		<0
3	0,5	0,5625	0,625		

$$\bar{x} = c$$

$\bar{x} = 0,5625$

SISTEMAS LINEARES
e
REFINAMENTO DE SOLUÇÕES

→ MONTAR MATRIZ COM OS COEFICIENTES E RESPOSTAS

→ ESCALONAR E RESOLVER NORMALMENTE O SISTEMA

• LEMBRAR SEMPRE:

→ PERMUTAR LINHAS DE MODO QUE O PIVÔ FIQUE COM O MAIOR VALOR ABSOLUTO

→ FAZER O ARREDONDAMENTO IMEDIATAMENTE APÓS CADA CONTA.

→ FAZER AS CONTAS DA ESQUERDA PARA A DIREITA

→ APÓS O ESCALONAMENTO | FICAM OCUPADOS COM OS MULTIPLICADORES USADOS PARA ZERÁ-LOS. → OS ESPAÇOS ZERADOS

• COMO ARREDONDAR:

→ TRANSFORMAMOS O NÚMERO NUMA POTÊNCIA DE 10 DO TIPO "$0,____ \times 10^{?}$"

EXEMPLOS: $119 = 0,119 \cdot 10^3$; $0,0045 = 0,45 \cdot 10^{-2}$

→ PEGAMOS O NÚMERO DE CASAS APÓS A VÍRGULA CORRESPONDENTES AO NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS QUE QUEREMOS.

EXEMPLOS: 2 A.S. $\Rightarrow 119 = 0,119 \cdot 10^3 = 120$

$\Rightarrow 0,0045 = \underbrace{0,45}_{2} \cdot 10^{-2} = 0,0045$

3 A.S $\Rightarrow 0,0045 = 0,450 \cdot 10^{-2} = 0,00450$

$\Rightarrow 1,345 = \underbrace{0,1345}_{3} \cdot 10^{\#1} = 1,35$

→ 5 SEMPRE ARREDONDA PARA CIMA

2. AS $\Rightarrow 2,25 = 0,225 \cdot 10 = 0,23 \cdot 10 = 2,3$

REFINAMENTO:

- SISTEMA LINEAR $Ax = b$
- $\tilde{A}$ É A MATRIZ ESCALONADA
- $x^{(0)}$ É A SOLUÇÃO APROXIMADA (PRIMEIRA SOLUÇÃO ENCONTRADA)
- $r^{(0)} = b - A x^{(0)}$ É O RESÍDUO CALCULADO COM PRECISÃO DUPLA
- A CORREÇÃO c É OBTIDA RESOLVENDO-SE O SISTEMA $A \cdot c = \tilde{r}^{(0)}$

EXEMPLO com 2 A.S. (algarismos significativos)

$$\begin{cases} 3.1x + 1.2y + 2.3z = 1.0 \\ 2.4x - 2.5y + 1.1z = 2.0 \\ -4.3x + 1.3y + 2.7z = 3.0 \end{cases} \qquad P_1 = 3 \quad P_2 = 3$$

b

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -4.3 & 1.3 & 2.7 \\ -0.72 & 2.1 & 4.2 \\ -0.56 & -0.86 & 6.2 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.21 \\ -0.48 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

1º PASSO: CÁLCULO DO RESÍDUO COM PRECISÃO DUPLA

$$r^{(0)} = b - A x^{(0)}$$

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.1 & 1.2 & 2.3 \\ 2.4 & -2.5 & 1.1 \\ -4.3 & 1.3 & 2.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.21 \\ -0.48 \\ 1.0 \end{bmatrix} \qquad 4 \text{ A.S.}$$

$$r^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 3.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (3.1)(-0.21) + (1.2)(-0.48) + (2.3)(1.0) \\ (2.4)(-0.21) + (-2.5)(-0.48) + (1.1)(1.0) \\ (-4.3)(-0.21) + (1.3)(-0.48) + (1.1)(1.0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.07300 \\ 0.2040 \\ 0.02100 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2 \text{ A.S.}} \quad r^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.073 \\ 0.20 \\ 0.021 \end{bmatrix}$$

2° PASSO: OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE $\pi^{(0)}$ (PERMUTAÇÕES PRIMEIRO)

1	-0.073	p 3	0.021	· (+0.72) · (+0.56)
2	.0.20	→ 1	-0.073	↵ +
3	0.021	2	0.20	↵ +

$$\begin{bmatrix} 0.021 \\ -0.058 \\ 0.21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot (+0.86) \\ \hookleftarrow + \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.021 \\ -0.058 \\ 0.16 \end{bmatrix} = \tilde{\pi}^{(0)}$$

3° PASSO: SOLUÇÃO DO SISTEMA ESCALONADO $\tilde{A} \cdot c = \tilde{\pi}^{(0)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4.3 & 1.3 & 2.7 & 0.021 \\ & 2.1 & 4.2 & -0.058 \\ & & 6.2 & 0.16 \end{array}\right]$$

$c_3 = \frac{0.16}{6.2} = 0.026 \quad c_2 = \frac{(-0.58) - (4.2)c_3}{2.1} = -0.081 \quad c_1 = -0.014$

$$\therefore c = \begin{bmatrix} -0.014 \\ -0.081 \\ 0.026 \end{bmatrix}$$

4° PASSO: REFINAR $x^{(0)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + c^{(0)}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.21 \\ -0.48 \\ 1.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.014 \\ -0.081 \\ 0.026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.22 \\ -0.56 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

5°: Critério de Parada

Prosseguimos enquanto a variação relativa for maior que o desejado

$$Var(a,b) = \left| \frac{b-a}{b} \right| \quad \text{se } b \neq 0$$

$Var(a,b) = 0$ se $a = b = 0$

$Var(a,b) = 1$ se $a \neq 0$ e $b = 0$

No exemplo $Var\left(x^{(0)}, x^{(1)}\right) = \max Var\left(\begin{bmatrix} -0.21 \\ -0.48 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.22 \\ -0.56 \\ 1.0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \max \left\{ \frac{0.01}{0.22}, \frac{0.08}{0.56}, 0 \right\}$$

$$= \max \left\{ 0.045, 0.14, 0 \right\} = 0.14 = 14\%$$

Sistemas Lineares

Método de Jacobi:

Em cada linha do sistema, isolamos uma incógnita. Chutamos valores iniciais para essas incógnitas e fazemos as iterações.

Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{ISOLANDO}} \begin{cases} x = \dfrac{6 - y}{4} \\ y = \dfrac{7 - x}{3} \end{cases}$$

Fazemos $x_0 = 0$, $y_0 = 0$

$$x_{k+1} = \frac{6 - y_k}{4}$$

$$y_{k+1} = \frac{7 - x_k}{3}$$

x_k	y_k
0	0
6/4	7/3
0.91	1.83
1.04	2.03

Método de Gauss Seidel:

A ideia é basicamente a mesma do método de Jacobi. Isolamos as incógnitas e fazemos as iterações. A diferença é que ao passo que calculamos as próximas incógnitas, já usamos os valores atualizados das incógnitas anteriores

mesmo exemplo:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{6 - y_k}{4} \\ y_{k+1} = \dfrac{7 - x_{k+1}}{3} \end{cases}$$

x_k	y_k	
0	0	← Escolhe uma aprox. inicial
1.5	1.83	
1.04	1.99	

- **Sistema 2x2** : Gauss-Seidel convergirá $\Leftrightarrow$

$$M = \left| \frac{a_{12}\, a_{21}}{a_{11}\, a_{22}} \right| < 1$$

- **Sistemas n x n: (Quadrados)**

Critério das Linhas:

Para cada linha da matriz, somamos todos os coeficientes (em módulo) que não forem da diagonal principal e dividimos pelo coeficiente que fizer parte da diagonal principal. A esse valor chamamos λ_i. Se, para todas as linhas dessa matriz, $\lambda_i < 1$, então o método irá convergir. Note que podemos permutar as linhas da matriz para que possamos satisfazer o critério.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 5 > 2+1 \ \checkmark \\ 7 > 3+2 \ \checkmark \\ 3 > 1+1 \ \checkmark \end{matrix} \quad \therefore \lambda_{max} = 5/7 < 1$$

$$\begin{cases} -2x - 4x + z = 1 \\ 8x + y + 2z = 2 \\ x + 4y + 6z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 8x + y + 2z = 2 \\ -2x - 4x + z = 1 \\ x + 4y + 6z = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} 8 > 2+1 \ \checkmark \\ 4 > 2+1 \ \checkmark \\ 6 > 4+1 \ \checkmark \end{matrix}$$

CRITÉRIO DE SASSENFIELD (VÁLIDO SOMENTE P/ GAUSS SEIDEL)

DEFINIMOS:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} \qquad \beta_1 = \frac{1+2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 |a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} \qquad \beta_2 = \frac{3}{8} \cdot 2 + 1 = \frac{7}{16} < 1$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 |a_{31}| + \beta_2 |a_{32}|}{|a_{33}|}$$

$$\beta_i = \frac{\beta_1 |a_{i1}| + \beta_2 |a_{i2}| + \dots + \beta_{i-1} |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots |a_{in}|}{|a_{ii}|}$$

OU SEJA, OS β SÃO SEMELHANTES AOS λ DO CRITÉRIO DAS LINHAS, COM A DIFERENÇA DE QUE OS COEFICIENTES ANTES DO DA DIAGONAL PRINCIPAL FICAM MULTIPLICADOS POR UM FATOR βi (i = coluna) CALCULADOS PREVIAMENTE

SE O MÁXIMO DE $\beta i < 1$, ENTÃO GAUSS SEIDEL CONVERGIRÁ PARA QUALQUER VALOR DE x_0, y_0:

EXEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \frac{1+2}{4} = 3/4$$

$$\beta_2 = \frac{1 \cdot \beta_1 + 1}{2} = 7/8$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 2}{3} = \frac{5}{6}$$

$\beta_{MAX} = 7/8 < 1$ ∴ GAUSS SEIDEL CONVERGE!

SENDO $M = \beta_{max}$ e ε A PRECISÃO DESEJADA

TEMOS QUE $\boxed{Erro_k \leq M^k Erro_0 < \varepsilon}$

ONDE $Erro_k$ É O ERRO APÓS K ITERAÇÕES

E $Erro_0$ É O MAIOR ERRO POSSÍVEL INICIALMENTE

ASSIM, SABENDO M e $Erro_0$ PODEMOS DETERMINAR O NÚMERO DE ITERAÇÕES (K) NECESSÁRIAS

TAMBÉM TEMOS QUE:

$$\boxed{\| x^{(k)} - \bar{x} \|_\infty \leq \frac{M}{1-M} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty}$$

NOTE QUE $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ SÃO VETORES : $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$ SIGNIFICA PEGAR A MAIOR DIFERENÇA ENTRE AS COORDENADAS.

EX. $x^{(k)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $x^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ ENTÃO $\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty = 5 \ (7-2)$

APÓS CADA ITERAÇÃO CALCULAMOS $\frac{m}{1-m} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_\infty$ E

CONTINUAMOS ATÉ QUE O VALOR ENCONTRADO SEJA MENOR QUE ε

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

DADA UMA TABELA COM OS PONTOS x E OS VALORES DA FUNÇÃO f NAQUELES PONTOS, O OBJETIVO DO MMQ É APROXIMAR ESSES PONTOS POR UM TIPO DE FUNÇÃO CONHECIDA, DE MODO QUE O ERRO QUADRÁTICO SEJA O MÍNIMO POSSÍVEL.

O ERRO QUADRÁTICO É DADO PELA SOMA QUADRÁTICA DAS DIFERENÇAS ENTRE OS PONTOS DADOS E O VALOR OBTIDO PELA FUNÇÃO DESCOBERTA.

OU SEJA, SE APROXIMARMOS f POR UMA FUNÇÃO g TEMOS:

$$EQ = (f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2 + (f_3 - g_3)^2 + \dots$$

O QUE FAZEMOS ENTÃO É GENERALIZAR A FUNÇÃO PELA QUAL APROXIMAREMOS. POR EXEMPLO, PARA APROXIMARMOS PONTOS POR UMA RETA, FAREMOS $ax + b$, POR UMA PARÁBOLA, $ax^2 + bx + c$, ...

FINALMENTE, PARA O ERRO SER MÍNIMO, DEVEMOS ACHAR ENTÃO A PROJEÇÃO ORTOGONAL DE f NO SUBSPAÇO DE x E 1 (NO CASO DE UMA RETA, POIS $a \cdot x + b \cdot 1$), ENCONTRANDO ASSIM OS COEFICIENTES a E b.

FAZEMOS ISSO RESOLVENDO O SISTEMA NORMAL:

$$\begin{array}{c} \\ x \rightarrow \\ 1 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \downarrow x & \downarrow 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \langle x, x \rangle & \langle 1, x \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle 1, 1 \rangle \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \downarrow f \\ \begin{bmatrix} \langle f, x \rangle \\ \langle f, 1 \rangle \end{bmatrix} \end{array}$$

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	1

$$f \overset{mmQ}{\sim} a\,x + b\cdot 1$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \sim a\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\langle x,x\rangle = (0,1,2)(0,1,2) = 5$

$\langle x,1\rangle = \langle 1,x\rangle = 3$

$\langle 1,1\rangle = 3$

$\langle f,x\rangle = 3$

$\langle f,1\rangle = 2$

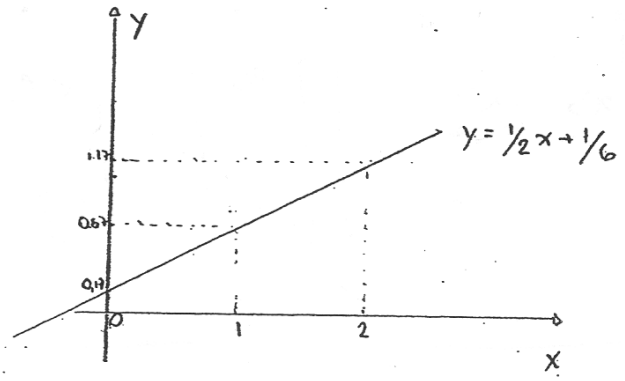
$$\begin{matrix} & x & 1 \\ x & \langle x,x\rangle & \langle 1,x\rangle \\ 1 & \langle x,1\rangle & \langle 1,1\rangle \end{matrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle f,x\rangle\\ \langle f,1\rangle\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \Rightarrow a = 1/2 \quad b = 1/6$$

$$1: \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \sim \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,17\\0,67\\1,17\end{bmatrix}$$

$$\boxed{f(x) \overset{mmQ}{\sim} 1/2\,x + 1/6}$$

$$EQ = (0-0.17)^2 + (1-0.67)^2 + (1-1.17)^2 = 0,1667$$



REGRESSÃO QUADRÁTICA

APROXIMAR $f(x) \overset{mmq}{\sim} ax^2 + bx + c$, RESOLVENDO

$$\begin{matrix} & x^2 \downarrow & x \downarrow & 1 \downarrow \\ x^2 \rightarrow \\ x \rightarrow \\ 1 \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \langle x^2, x^2 \rangle & \langle x, x^2 \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x^2, x \rangle & \langle x, x \rangle & \langle 1, x \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x, 1 \rangle & \langle 1, 1 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{matrix} f \downarrow \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \langle f, x^2 \rangle \\ \langle f, x \rangle \\ \langle f, 1 \rangle \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Aproximar

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	1	1

por parábola ax^2+bx+c

$$f(x) \overset{mmq}{\sim} ax^2 + bx + c \cdot 1$$

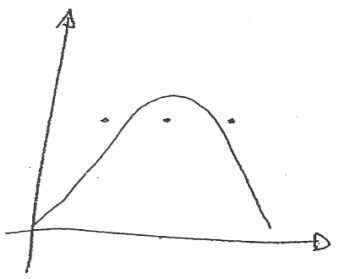
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -0.25 \\ b = 1.05 \\ c = 0.05 \end{matrix}$$

$$\boxed{f(x) \overset{mmq}{\sim} -0.25x^2 + 1.05x + 0.05}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.85 \\ 1.15 \\ 0.95 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{EQ = 0.05}$$



Aproximar

$f(x)$	0	1	1

por y

$$f(x) \overset{mmq}{\sim} a\sqrt{x} + b\cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sim a\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \sqrt{x} \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \sqrt{x} & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{array}{c} f \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{6}$$

Sistemas Sobredeterminados

Usamos também o MMQ para aproximar soluções de sistemas com mais linhas que colunas

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3y = 2 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} f \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \overset{mmq}{\sim} x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ u \\ v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 14 \end{bmatrix} \end{array}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{array}{c} f \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$x = \ldots$

$y = \ldots$

mmq com pesos

EXEMPLO:

DADA:

x	0	1	2
f(x)	1	3	6
W(x)	0.5	2	1

Aproximar $f(x) \underset{N}{\overset{mmq}{\sim}} ax+b$

$$\langle u, v \rangle_w = u_1 \cdot v_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot v_2 \, w_2 + u_3 \, v_3 \, w_3 \dots$$

$$f \underset{N}{\overset{mmq}{\sim}} a\,x + b\,1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \sim a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\langle x, x \rangle = 0^2(0.5) + 1^2(2) + 2^2(1) = 6$

$\langle x, 1 \rangle = 0 \cdot 1 (0.5) + 1 \cdot 1 (2) + 2 \cdot 1 (1) = 4$

$\langle 1, 1 \rangle = 1^2 (0.5) + 1^2 (2) + 1^2 (1) = 3.5$

$\langle f, x \rangle = 18 \qquad \langle f, 1 \rangle = 12.5$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

$a = 2.6$

$b = 0.6$

$$f(x) \underset{N}{\overset{mmq}{\sim}} 2.6x + 0.6$$

$$EQ = \| \dots \|_w^2 = (1 - a.0 - b)^2 \cdot (0.5) + (3 - a - b)^2 (2) + (6 - 2a - b)^2 (1)$$

$\| \ \|_N^2 = \langle \ , \ \rangle_N$

$$f \sim \begin{bmatrix} 0.6 \\ 3.2 \\ 5.8 \end{bmatrix}$$

$EQ_w = 0,2$

APROXIMAR UMA FUNÇÃO DADA POR MEIO DE OUTRA FUNÇÃO
(O QUE MUDA É O PRODUTO INTERNO, DADO AGORA POR UMA INTEGRAL)

Exemplo:

Aproximar $f(x) = e^x$ por uma RETA DE MODO A MINIMIZAR O EQ

$$\boxed{EQ = \int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 \, dx}$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) \cdot v(x) \, dx$$

$$e^x \underset{[0,1]}{\overset{mmq}{\sim}} ax + b \cdot 1$$

$$f \sim ax + b \cdot 1$$

$$\begin{matrix} & x & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e-1 \end{bmatrix}$$

$\langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$

$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x \, dx = 1/2$

$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \, dx = 1$

$\langle e^x, x \rangle = \int_0^1 e^x \cdot x \, dx = 1$

$\langle e^x, 1 \rangle = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$

$a \cong 1.69 \qquad b \cong 0.87$

$$\boxed{e^x \underset{[0,1]}{\overset{mmq}{\sim}} 1.69x + 0.87}$$

MMQ CONTÍNUO C/ PESOS

mesmo exemplo

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x) \cdot v(x) \cdot x \, dx$$

→ peso $w(x) = x$
(O PESO CRESCE CONFORME X AUMENTA, OU SEJA, DAMOS MAIOR IMPORTÂNCIA CONFORME OS PONTOS FICAM MAIS PRÓXIMOS DE 1)

$$EQ = \int_0^1 (f(x) - ax - b)^2 \cdot x \, dx$$

PERCEBEMOS QUE SE QUEREMOS APROXIMAR PONTOS, OU UMA FUNÇÃO POR UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE VETORES $(a_0\vec{v}_0 + a_1\vec{v}_1 + \dots)$ NOSSAS CONTAS FICARÃO MUITO FACILITADAS SE OS VETORES ESCOLHIDOS FOREM ORTOGONAIS, (P.EX. APROXIMAR e^x por $a_0 \operatorname{sen}x + a_1 \cos x + a_2 \cdot 1$; os vetores $(1, \operatorname{sen}x, \cos x)$ são ortogonais) EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO, POIS O $\langle\ ,\ \rangle$ ENTRE VETORES ORTOGONAIS $= 0$; ASSIM NO SISTEMA NORMAL APARECERÁ UMA MATRIZ DIAGONAL.

PROBLEMA: DADO UM INTERVALO $[a,b]$ COMO ENCONTRAR UMA FAMÍLIA DE POLINÔMIOS ORTOGONAIS EM RELAÇÃO AO PRODUTO INTERNO USUAL $\{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots\}$?

EXEMPLO: DETERMINAR OS 3 PRIMEIROS POLINÔMIOS MÔNICOS ORTOGONAIS NO INTERVALO $[-1, 1]$

SOLUÇÃO: $p_0(x) = 1$

$p_1(x) = x + m \Rightarrow p_1(x) = x$ (DEDUÇÃO)

$p_2(x) = x^2 + ax + b$

1) MÉTODO INGÊNUO

$$\begin{cases} \langle p_0, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + ax + b)\,dx = 0 \\ \langle p_1, p_2 \rangle = \int_{-1}^{1} (x)(x^2 + ax + b)\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2/3 + 0 + 2b = 0 \\ 0 + \frac{2a}{3} + 0 = 0 \end{cases}$$

$a = 0$

$b = -1/3$

$$\therefore \begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x \\ p_2(x) = x^2 - 1/3 \end{cases}$$

CASO QUISESSEMOS $p_3(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ faríamos

$$\begin{cases} \langle p_0, p_3 \rangle = 0 \\ \langle p_1, p_3 \rangle = 0 \\ \langle p_2, p_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\rho_{K+1} = x\rho_K + a_{K-1}\rho_{K-1} + a_K\rho_K$$

$$a_j = -\frac{\langle \rho_K, x\rho_j \rangle}{\langle \rho_j, \rho_j \rangle}$$

Obs.: A CADA ITERAÇÃO CALCULAR NOVOS a_K e a_{K-1}

No método ENGENHOSO SUPÕE-SE QUE SE SAIBA DE ANTEMÃO OS DOIS PRIMEIROS POLINÔMIOS ORTOGONAIS. MAS ISSO DE FATO É SABIDO SEMPRE.

$$\rho_0 = 1$$
$$\rho_1 = x - m$$

ONDE m é o ponto médio do intervalo de integração.

OBS.: PARA APROXIMAR UMA FUNÇÃO F POR MMQ e SENDO OS POLINÔMIOS EM QUESTÃO ORTOGONAIS, ENTÃO OS SEUS COEFICIENTES SE DARÃO POR

$$a_i = \frac{\langle f, \rho_i \rangle}{\langle \rho_i, \rho_i \rangle}$$

QUE É A MESMA COISA QUE MONTAR O SISTEMA TODO E RESOLVER

Mudanças de Variáveis

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c}$$

$$\frac{\langle u(x), v(x)\rangle}{(b-a)} = \frac{\langle U(y), V(y)\rangle}{(d-c)}$$

$$\int_a^b u(x)v(x)\frac{dx}{(b-a)} = \int_c^d U(y)V(y)\frac{dy}{(d-c)}$$

onde $u(x)$ e $v(x)$ são polinômios na variável x

e $U(y)$ e $V(y)$ " " " " y

$$f(x) \underset{[a,b]}{\overset{\text{mmq}}{\sim}} a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \dots + a_n p_n(x)$$

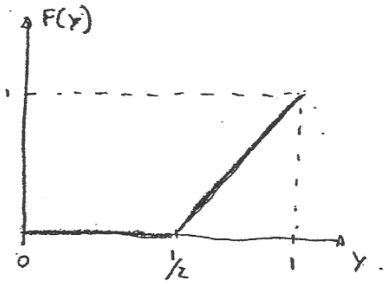
$$F(y) \underset{[c,d]}{\overset{\text{mmq}}{\sim}} \tilde{a}_0 P_0(y) + \tilde{a}_1 P_1(y) + \dots + \tilde{a}_n P_n(y)$$

$$a_j = \frac{\langle f(x), p_j(x)\rangle}{\langle p_j(x), p_j(x)\rangle} = \tilde{a}_j$$

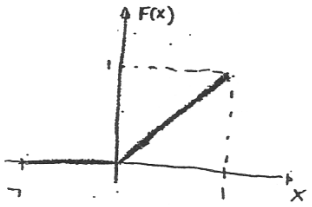
QUANDO p_i forem ORTOGONAIS

Os polinômios $1,\ x,\ x^2 - 1/3$ são ortogonais em $[-1, 1]$

Utilizo-os para aproximar a função abaixo usando mmq



$$\begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1}} \qquad \Longrightarrow$$



$$f(x) \underset{[-1,1]}{\overset{mmq}{\sim}} a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x)$$

$$a_0 = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{\int_{-1}^{1} f(x) \cdot x \, dx}{\int_{-1}^{1} x^2 \, dx} \Rightarrow \left(f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \end{cases} \right) = \frac{\int_0^1 x^2 \, dx}{\int_{-1}^{1} x^2 \, dx} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{\langle f(x), x^2 - 1/3 \rangle}{\langle x^2 - 1/3, x^2 - 1/3 \rangle} = \frac{\int_0^1 x \, (x^2 - 1/3) \, dx}{\int_{-1}^{1} (x^2 - 1/3)^2 \, dx} = 45/96 = 15/32$$

$$f(x) \underset{[-1,1]}{\overset{mmq}{\sim}} 1/4 + 1/2 \, x + \frac{15}{32} (x^2 - 1/3)$$

$x = 2y - 1$

$$\boxed{F(y) \underset{[0,1]}{\overset{mmq}{\sim}} 1/4 + \frac{1}{2}(2y - 1) + \frac{15}{32}\left((2y-1)^2 - 1/3\right)}$$

MMQ

Análise Harmônica

$$f(x) \underset{[-L,L]}{\sim} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

a_0 é o valor médio de $f(x)$ sobre $[-L, L] = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\,dx$$

$\frac{x+L}{L} = \frac{t}{\pi} + 1$

$x = \frac{tL}{\pi} + L$

→ Se $f(x)$ for ímpar $\Rightarrow a_k = 0$

→ Se $f(x)$ for par $\Rightarrow b_k = 0$

Sen x → ímpar

cos x → par.

ímpar → $f(x) = -f(-x)$

par → $f(x) = f(-x)$

- a_0, a_k e b_k → coeficientes de Fourier
- As parcelas $\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}\right)$ são chamadas de harmônicos de ordem k.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

→ FÓRMULA DO TRAPÉZIO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{f''(c)h^3}{12}$$

→ REGRA DOS n TRAPÉZIOS:

$$x_j = a + jh \quad (0 \leq j \leq n)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_T = \frac{-h^2}{12}(b-a)f''(c)$$

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$$

} FÓRMULAS DO ERRO

DADA UMA PRECISÃO ε, FAZEMOS $E_T < \varepsilon$ E USAMOS $f''(c)$

COMO $\max_{[a,b]} |f''|$ (O MÁXIMO DE f'' NO INTERVALO $[a,b]$). UTILIZAMOS ESSAS FÓRMULAS P/ DESCOBRIR n E h

---

Exemplo: $\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx$; $\varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow |E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{[a,b]} |\operatorname{sen} x| < \varepsilon$

$f'' = -\operatorname{sen} x$

→ $\frac{1}{12n^2} \cdot \operatorname{sen}(1) < 10^{-3} \Rightarrow \boxed{n \geq 9}$ $\quad h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \boxed{h = 1/9}$

→ FÓRMULA DE SIMPSON

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$$

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2n}$$

$$x_1 = x_0 + h$$

FÓRMULA DO ERRO

$$|E_s| \leq \frac{n \cdot h^5}{90} f^{(4)}(c)$$

onde $f^{(4)}(c) = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 4f_{2N-3} + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N}\right)$$

FÓRMULA DE N-SIMPSON

$$|E_s| \leq \frac{n \cdot h^5}{90} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$$