MAP-121 CÁLCULO NUMÉRICO

Solução da lista de Exercicios n° 2

1. Desejamos aproximar $f(x)$, tabelada en n pontos distintos $x_1, x_2, ..., x_n$ mostrada na tabela em baixo, por uma função $g(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i g_i(x)$, onde $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = \cos x$, $g_2(x) = \sin x$.

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$f(x)$	-1	2	0	-2	1

Uma forma de aproximar é usando o MMQ. Para isso, devemos resolver o seguinte sistema normal

$$\begin{pmatrix} < g_0, g_0 > & < g_0, g_1 > & < g_0, g_2 > \\ < g_1, g_0 > & < g_1, g_1 > & < g_1, g_1 > \\ < g_2, g_0 > & < g_2, g_1 > & < g_2, g_2 > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < g_0, f > \\ < g_1, f > \\ < g_2, f > \end{pmatrix}$$

onde $< g, f >:= \sum_{i=1}^{n} g(x_i) f(x_i)$, sendo n o número de dados da tabela.

$$\begin{aligned}
< g_0, g_0 > &= \sum_{i=1}^{5} [g_0(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{4} [1]^2 = 5 \\
< g_0, g_1 > &= < g_1, g_0 >= \sum_{i=1}^{5} g_0(x_i).g_1(x_i) = \sum_{i=1}^{5} (1).cos(x_i) = cos(-\pi) + cos(-\pi/2) + cos(0) + \\
&\quad + cos(\pi/2) + cos(\pi) = -1 + 0 + 1 + 0 - 1 = -1 \\
< g_0, g_2 > &= < g_2, g_0 >= \sum_{i=1}^{5} g_0(x_i).g_2(x_i) = \sum_{i=1}^{5} (1).sen(x_i) = sen(-\pi) + sen(-\pi/2) + sen(0) + \\
&\quad + sen(\pi/2) + sen(\pi) = 0 - 1 + 0 + 1 + 0 = 0 \\
< g_1, g_1 > &= \sum_{i=1}^{5} [g_1(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{5} [cos(x_i)]^2 = (cos(-\pi))^2 + (cos(-\pi/2))^2 + (cos(0))^2 + \\
&\quad + (cos(\pi/2))^2 + (cos(\pi))^2 = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3 \\
< g_1, g_2 > &= < g_2, g_1 >= \sum_{i=1}^{5} g_1(x_i).g_2(x_i) = \sum_{i=1}^{5} cos(x_i).sin(x_i) = cos(-\pi).sen(-\pi) + \\
&\quad + cos(-\pi/2).sen(-\pi/2) + +cos(0).sen(0) + cos(\pi/2).sen(\pi/2) + cos(\pi).sen(\pi) = \\
&\quad = (-1)(0) + (0)(-1) + (1)(0) + (0)(1) + (-1)(0) = 0 \\
< g_2, g_2 > &= \sum_{i=1}^{5} [g_2(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{5} [sen(x_i)]^2 = (sen(-\pi))^2 + (sen(-\pi/2))^2 + (sen(0))^2 + \\
&\quad + (sen(\pi/2))^2 + (sen(\pi))^2 = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< g_0, f > &= \sum_{i=1}^{5} g_0(x_i).f(x_i) = \sum_{i=1}^{5} (1) f(x_i) = -1+2+0-2+1 = 0 \\
< g_1, f > &= \sum_{i=1}^{5} g_1(x_i).f(x_i) = \sum_{i=1}^{5} cos(x_i) f(x_i) = (-1)(-1)+(0)(2)+ \\
&\quad +(1)(0)+(0)(-2)+(-1)(1) = 0 \\
< g_2, f > &= \sum_{i=1}^{5} g_2(x_i).f(x_i) = \sum_{i=1}^{5} sen(x_i) f(x_i) = (0)(-1)+(-1)(2)+ \\
&\quad +(0)(0)+(1)(-2)+(0)(1) = -4
\end{aligned}
$$

Logo o sistema fica:

$$
\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

Resolvendo, temos:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -2 \\
a_1 &= 0 \\
a_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Portanto a função aproximante pelo MMQ será:

$$
g(x) = -2sen(x) \quad \diamondsuit
$$

2. Da tabela mostrada,

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6
$f(x)$	0.21	1.25	2.31	2.70	2.65

observa-se que o domínio de definição da função, $f(x)$, é distinto do domínio, onde foi definido o produto interno

$$
\langle u, v \rangle_1 = \sum_{s=-2}^{2} u(s)v(s).
$$

Entretanto, podemos relacioná-los por intermédio da transformação de variáveis

$$
x(s) = \frac{2}{5}(s+2),
$$

cuja inversa é dado por

$$
s(x) = \frac{5}{2}x - 2.
$$

A função $F(s) := f(x(s))$, está definida nos pontos desejados, e será a função a se aproximar.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
s & = & -2 & \rightarrow & F(-2) & = & f(0) & = & 0.21 \\
s & = & -1 & \rightarrow & F(-1) & = & f(0.4) & = & 1.25 \\
s & = & 0 & \rightarrow & F(0) & = & f(0.8) & = & 2.31 \\
s & = & 1 & \rightarrow & F(1) & = & f(1.2) & = & 2.70 \\
s & = & 2 & \rightarrow & F(2) & = & f(1.6) & = & 2.65
\end{array}
$$

Os valores dos polinômios nos pontos -2, -1, 0, 1, 2 são mostrados na seguinte tabela

s	$p_0(s)$	$p_1(s)$	$p_2(s)$	$p_3(s)$
-2	1	-1	1	-1
-1	1	-0.5	-0.5	2
0	1	0	-1	0
1	1	0.5	-0.5	2
2	1	1	1	1

Aproximamos $F(s)$ pela função $G(s) = a_0p_0(s) + a_1p_1(s) + a_2p_2(s) + a_3p_3(s)$ e, devido à ortogonalidade de $p_i(s)$, $0 \leq i \leq a$, com relação ao produto interno dado, os valores dos a_i são encontrados como se mostra a seguir

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{< F, p_0 >}{< p_0, p_0 >} \\
&= \frac{(0.21)(1) + (1.25)(1) + (2.31)(1) + (2.70)(1) + (2.65)(1)}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \\
&= \frac{9.12}{5} = 1.824 \\
a_1 &= \frac{< F, p_1 >}{< p_1, p_1 >} \\
&= \frac{(0.21)(-1) + (1.25)(-0.5) + (2.31)(0) + (2.70)(0.5) + (2.65)(1)}{(-1)^2 + (-0.5)^2 + 0^2 + (0.5)^2 + 1^2} \\
&= \frac{3.165}{2.5} = 1.26 \\
a_2 &= \frac{< F, p_2 >}{< p_2, p_2 >} \\
&= \frac{(0.21)(1) + (1.25)(-0.5) + (2.31)(-1) + (2.70)(-0.5) + (2.65)(1)}{(1)^2 + (-0.5)^2 + (-1)^2 + (-0.5)^2 + 1^2} \\
&= \frac{-1.425}{3.5} = -0.407 \\
a_3 &= \frac{< F, p_2 >}{< p_2, p_2 >} \\
&= \frac{(0.21)(-1) + (1.25)(2) + (2.31)(0) + (2.70)(-2) + (2.65)(1)}{(-1)^2 + (2)^2 + (0)^2 + (-2)^2 + 1^2} \\
&= \frac{-0.46}{10} = -0.046
\end{aligned}
$$

logo,

$$\begin{aligned} G(s) &= 1.824 + 1.266\frac{s}{2} - 0.407\frac{(s^2-2)}{2} - 0.046\frac{(5s^2-17s)}{6} \\ &= 1.824 + 0.633s - 0.2035(s^2-2) - 0.0077(5s^2-17s). \end{aligned}$$

Retornemos à variavel x, mediante, $s(x) = \frac{5}{2}x - 2$.
Temos:

$$\begin{aligned} g(x) &= G(s(x)) = 1.824 + 0.633(\frac{5}{2}x - 2) - \\ &- 0.2035[(\frac{5}{2}x-2)^2 - 2] - 0.0077[5(\frac{5}{2}x-2)^2 - 17(\frac{5}{2}x-2)]. \\ &= 0.7032 + 1.90975x - 0.2420(2.5x-2)^2 \end{aligned}$$

O calculo de $g(0.7) = 2.0249$. $\diamondsuit$

3. Para encontrar o polinômio que interpola o conjunto de dados na forma de Newton, temos que encontrar os valores da tabela de diferenças divididas abaixo

x_i	$y_i = f_0 = f(x_i)$	f_1	f_2
$x_0 = 0$	1		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 1$	-1		$f[x_0, x_1, x_2]$
		$f[x_1, x_2]$	
$x_2 = 4$	1		

onde

$$\begin{aligned} f[x_0,x_1] &= (f[x_1]-f[x_0])/(x_1-x_0) &&= \tfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0} &&= \tfrac{-1-1}{1-0} &&= -2 \\ f[x_1,x_2] &= (f[x_2]-f[x_1])/(x_2-x_1) &&= \tfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} &&= \tfrac{1-(-1)}{4-1} &&= 2/3 \\ f[x_0,x_1,x_2] &= (f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1)/(x_2-x_0) &&= \tfrac{\frac{2}{3}-(-2)}{4-0} &&= 2/3 \end{aligned}$$

logo:

a) O polinômio de grau ≤ 2 dado pela forma de Newton é:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\ &= 1 + (-2)x + \tfrac{2}{3}x(x-1) \\ &= \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{8}{3}x + 1 \end{aligned}$$

b) Valor de $p_2(3)$ será:

$$p_2(3) = \tfrac{2}{3}(3)^2 - \tfrac{8}{3} + 1 = -1$$

c) Sabe-se que o erro na interpolação polinomial está delimitado por:

$$|E(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|}{(2+1)!}M,$$

com $M = \max_{x\in[0,4]} |f^{(3)}(x)| = 1$
Logo

$$|E(3)| \leq \frac{|(3-0)(3-1)(3-4)|}{(3)!}1 \to |E(3)| \leq 1 \qquad \diamondsuit$$

4. $\int_2^7 \frac{dx}{x}$, nossa função integrando é : $f(x) = \frac{1}{x}$.
O erro no método dos Trapézios é delimitado por:

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|.$$

em nosso caso, temos:

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{(7-2)^3}{12n^2} \max_{x\in[2,7]} |f^{(2)}(x)|$$

Mas, $f^{(1)}(x) = \frac{-1}{x^2}$; $f^2(x) = \frac{2}{x^3}$ e $f^{(3)} < 0$ para $x \in [2,7]$, portanto $f^{(2)}$ é estritamente decrescente e atinge seu máximo em $x = 2$.

$$f^{(2)}(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

Então:

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{5^3}{12n^2}\frac{1}{4} \leq 5\times 10^{-9} \to n^2 \geq \frac{25\times 10^9}{12\times 4} \to n \geq 22821.773$$

Portanto para aproximar a integral de acima, precisamos aplicar pelo menos 22822 vezes o método dos Trapézios.

O erro no Método de Simpson é delimitado por:

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]}{}' |f^{(4)}(x)|$$

Para nosso caso será:

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{(7-2)^5}{2880n^4} \max_{x\in[2,7]}{}' |f^{(4)}(x)|,$$

mas, $f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$; $f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$; $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$ e $f^{(5)}(x) < 0$ para $x \in [2,7]$, então $f^{(4)}(x)$ é decrescente em $[2,7]$, portanto atinge seu máximo em $x = 2$, $f^{(4)}(2) = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4}$ logo:

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{(5)^5}{2880n^4}\frac{3}{4} \leq 5\times 10^{-9} \to n^4 \geq \frac{5^4\times 10^8}{96\times 4} \to n \geq \frac{5\times 10^2}{\sqrt{96\times 4}} = 112.95025$$

portanto, para aproximara integral precisamos de aplicar 113 vezes o método de Simpson. $\diamondsuit$

5. **(a)** Sabe-se que os polinômios de Lagrange são dados por

$$\mathrm{L}_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

onde os x_i são diferentes, $i = 0, 1, 2, ..., n.$. Logo para nosso caso:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-2.5)}{(0.5-1)(0.5-2)(0.5-2.5)} \\
&= -\frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-2.5) \\
\mathrm{L}_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0.5)(x-2)(x-2.5)}{(1-0.5)(1-2)(1-2.5)} \\
&= \frac{4}{3}(x-0.5)(x-2)(x-2.5) \\
\mathrm{L}_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0.5)(x-1)(x-2.5)}{(2-0.5)(2-1)(2-2.5)} \\
&= -\frac{4}{3}(x-0.5)(x-1)(x-2.5) \\
\mathrm{L}_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0.5)(x-1)(x-2)}{(2.5-0.5)(2.5-1)(2.5-2)} \\
&= \frac{2}{3}(x-0.5)(x-1)(x-2)
\end{aligned}$$

Logo, o polinômio interpolador de Lagrange é:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= f(x_0)\mathrm{L}_0(x) + f(x_1)\mathrm{L}_1(x) + f(x_2)\mathrm{L}_2(x) + f(x_3)\mathrm{L}_3(x) \\
&= (4.5)(\frac{-2}{3})(x-1)(x-2)(x-2.5) + (3)\frac{4}{3}(x-0.5)(x-2)(x-2.5) + \\
&+ (3) - \frac{4}{3}(x-0.5)(x-1)(x-2.5) + (3.3)\frac{2}{3}(x-0.5)(x-1)(x-2) \\
&= -3(x-1)(x-2)(x-2.5) + 4(x-0.5)(x-2)(x-2.5) - 4(x-0.5)(x-1)(x-2.5) + \\
&+ 2.2(x-0.5)(x-1)(x-2) \\
&= -0.8x^3 + 4.80x^2 - 8,80x + 7.8
\end{aligned}$$

(b) Para obtermos o polinômio interpolador na forma de Newton usamos a tabela abaixo

x_i	$y_i = f_0 = f(x_i)$	f_1	f_2	f_2
$x_0 = 0.5$	4.5			
		$f[x_0, x_1]$		
$x_1 = 1$	3		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_2 = 2$	3		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
$x_3 = 2.5$	3.3			

onde

$$
\begin{array}{lclclclcl}
f[x_0,x_1] & = & \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} & = & \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} & = & \frac{3-4.5}{1-0.5} & = & -3 \\
f[x_1,x_2] & = & \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} & = & \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & = & \frac{3-3}{2-1} & = & 0 \\
f[x_2,x_3] & = & \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} & = & \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} & = & \frac{3.3-3}{2.5-2} & = & 3/5 \\
f[x_0,x_1,x_2] & = & \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} & = & \frac{0-(-3)}{2-0.5} & = & 3/1.5{=}2 & & \\
f[x_1,x_2,x_3] & = & \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} & = & \frac{\frac{3}{5}-0}{2.5-1} & = & 2/5 & & \\
f[x_0,x_1,x_2,x_3] & = & \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} & = & \frac{\frac{2}{5}-2}{2.5-0.5} & = & -4/5 & &
\end{array}
$$

logo, o polinômio interpolador de Newton é :

$$
\begin{aligned}
\bar{p}_3(x) &= f[x_0] + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
&= 4.5 - 3(x-0.5) + 2(x-0.5)(x-1) - \frac{4}{5}(x-0.5)(x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

(c) Seja $R_3(x) = p_3(x) - \bar{p}_3(x)$ o polinômio de grau ≤ 3, com $p_3(x_i) = \bar{p}_3(x_i), i = 0,1,2,3$, logo $R_3(x_i) = 0, i = 0,1,2,3$.
Portanto, R_3 tem 4 raizes diferentes, sendo um polinômio de grau 3, isto só é válido para o polinômio identicamente nulo. Então $R_3(x) \equiv 0$.
Portanto:

$$p_3(x) = \bar{p}_3(x). \qquad \diamondsuit$$

6. No caso de ter tabelas com abscissas x_i igualmente espaçadas, o cálculo do polinômio interpolador pelo método de Newton é feito usando deferenças simples

x_i	f_i	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
$x_0 = 0$	3				
		$a-3$			
$x_1 = 1$	a		$4-2a$		
		$1-a$		$3a+b-6$	
$x_2 = 2$	1		$a+b-2$		$b^2-4b-4a+9$
		$b-1$		$b^2-3b-a+3$	
$x_3 = 3$	b		b^2-2b+1		
		b^2-b			
$x_4 = 4$	b^2				

O polinômio interpolador será:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta^1 f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2}\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{h^3}\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!} \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{h^4}\frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!}
\end{aligned}
$$

Mas, como queremos o grau de $p(x)$ seja 2, devemos ter: $\Delta^3 f(x_0) = 0$ e $\Delta^4 f(x_0) = 0$, isto é:

$$\begin{cases} 3a + b - 6 & = & 0 \\ b^2 - 4b - 4a + 9 & = & 0 \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $a = \frac{6-b}{3}$, substituindo na segunda, temos a equação quadratica em b : $b^2 - \frac{8}{3}b + 1 = 0$. Cujas soluções são $b_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \approx 2.22$, e $b_2 = \frac{4-\sqrt{7}}{3} \approx 0.4$. Logo: $a_1 = 1.26$ e $a_2 = 1.85$. $\diamondsuit$

7. Sabemos que o erro numa interpolação quadrática está dado por

$$|E(x)| \leq \frac{|(x - x_i)(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})|}{(2+1)!} M,$$

onde x_i, x_{i+1}, x_{i+2} são três pontos consecutivos qualesquer e $M = \max_{x \in [x_i, x_{i+2}]} |f^{(3)}(x)|$
Neste caso, $|x - x_j| \leq 2h, j = i, i+1, i+2$. onde h é o passo procurado.
Assim,

$$8h^3 \frac{\max_{x \in [x_i, x_{i+2}]} |f^{(3)}(x)|}{3!} \leq 10^{-2},$$

onde $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$, $f^{'}(x) = \frac{1/x}{\ln 2}$, $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 2}$ e $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3 \ln 2}$ $x \in [1, 2]$.
Então, $\max_{x \in [1,2]} |f^{(3)}(x)| = 2/\ln 2$, portanto

$$h^3 \leq \frac{10^{-2}}{8} . \frac{6}{2} \ln 2 \longleftrightarrow h \leq \left(\frac{3}{8} 10^{-2} \ln 2\right)^{1/3} \quad \diamondsuit$$

8. Como vamos aproximar $f(x) = cosx, x \in [-\pi/4, \pi/4]$ por um polinômio de segundo grau, precisamos calcular três polinômios ortogonais mônicos, segundo o produto interno

$$< P_n, P_m >= \int_{-2}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx.$$

Gerando os polinômios ortogonais :
$p_0(x) = 1$
$p_1(x) = x + a$,

$$\begin{aligned} < p_0, p_1 > \quad &= \quad \int_{-2}^{1} 1.(x + a) dx = \frac{x^2}{2}|_{-2}^{1} + ax|_{-2}^{1} = 0 \\ &=> \quad \frac{1}{2} - 2 + a(1 - (-2)) = 0 => a = \frac{1}{2} \\ &=> \quad p_1(x) = x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$p_2(x) = x^2 + ax + b$,

$$\begin{aligned} < p_0, p_2 > \quad &= \quad 0 = \int_{-2}^{1} 1.(x^2 + ax + b) dx = \frac{x^3}{3}|_{-2}^{1} + a\frac{x^2}{2}|_{-2}^{1} + bx|_{-2}^{1} \\ < p_1, p_2 > \quad &= \quad 0 = \int_{-2}^{1} (x + \frac{1}{2})(x^2 + ax + b) dx = \int_{-2}^{1} \left(x^3 + ax^2 + \frac{1}{2}x^2 + bx + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2}\right) dx \\ &= \quad \frac{x^4}{4}|_{-2}^{1} + \frac{a}{3}x^3|_{-2}^{1} + \frac{1}{6}x^3|_{-2}^{1} + \frac{b}{2}x^2|_{-2}^{1} + \frac{a}{4}x^2|_{-2}^{1} + \frac{b}{2}x|_{-2}^{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \Big(\frac{1}{3} - \frac{-8}{3}\Big) + \frac{a}{2}\Big(1-4\Big) + b\Big(1-(-2)\Big) = 0 \rightarrow 3b - \frac{3}{2}a = -3 \rightarrow b - \frac{a}{2} = -1,$$
$$\rightarrow \quad \Big(\frac{1}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\Big) + \frac{a}{3}\Big(1-(-8)\Big) + \frac{1}{6}\Big(1-(-8)\Big) + \frac{b}{2}(1-4) + \frac{a}{4}(1-4) + \frac{b}{2}\Big(1-(-2)\Big) = 0 \rightarrow a = 1$$
$$\rightarrow \quad b - \frac{a}{2} = -1 \rightarrow b - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow b = \frac{-1}{2}.$$

Logo:

$$p_2(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$$

Agora fazemos a transformação do intervalo $[-2,1]$ ao $[-\pi/4, \pi/4]$, por meio da função $t(x) = \frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12.}$.
Nosso novo problema é aproximar a função

$$\mathrm{F}(x) = f(t(x)) = \cos(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12}), -2 \leq x \leq 1.$$

Usando a função

$$\mathrm{G}(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k p_k(x), \qquad \text{onde} \qquad a_k = \frac{< \mathrm{F}, p_k >}{< p_k, p_k >}, \qquad \text{temos}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\int_{-2}^{1} \cos(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12})dx}{\int_{-2}^{1} 1dx} = \frac{\frac{6}{\pi} sen(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12})|_{-2}^{1}}{3} = \frac{2}{\pi}\Big[sen(\pi/4) - sen(-\pi/4)\Big] \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.9 \\
a_1 &= \frac{\int_{-2}^{1} \cos(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12})(x + \frac{1}{2})dx}{\int_{-2}^{1}(x+\frac{1}{2})^2 dx} = \frac{\frac{36}{\pi^2}\int_{-2}^{1} \cos(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12})(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12})d(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12})dx}{\int_{-2}^{1}(x+\frac{1}{2})^2 d(x+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{\frac{36}{\pi^2}\int_{-\pi/4}^{\pi/41} t\cos t dt}{\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2})^2|_{-2}^{1}} = 0 \\
a_2 &= \frac{\int_{-2}^{1} \cos(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{12})(x^2 + x - \frac{-1}{2})dx}{\int_{-2}^{1}(x^2+x-\frac{1}{2})^2 dx} = \frac{\frac{6}{\pi}\cdot\frac{36}{\pi^2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} cost.(t^2 - \frac{\pi^2}{36}\cdot\frac{3}{4}dt}{\int_{-2}^{1}\Big[(x+\frac{1}{2})^4 - \frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{9}{16}\Big]dx} \\
&\approx 0.8692.
\end{aligned}$$

Logo temos que

$$\mathrm{G}(x) = 0.9 + 0.8692(x^2 + x - \frac{1}{2}), \quad x \in [-2, 1].$$

Voltando a nossa variável original:

$$\begin{aligned}
g(t) &= G(x(t)) = 0.9 + 0.8692\Big[(\frac{6}{\pi}t - \frac{1}{2})^2 + (\frac{6}{\pi}t - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\Big], \quad t \in [-\pi/4, \pi/4] \\
g(t) &= 0.9 + 0.8692\Big[(1.9099t - 0.5)^2 + 1.9099t - 1\Big] \\
g(t) &= 3.1706t^2 + 0.2481
\end{aligned}$$

Erro :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \Big[\cos t - (3.1706t^2 + 0.2481)\Big]^2 dt \\
\mathrm{E} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/41} \cos^2 t dt - 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (3.1706t^2 + 0.2481)\cos t dt + \\
&+ \int_{-\pi/4} \pi/41(3.1706t^2 + 0.2481)^2 dt \\
\mathrm{E} &= 0.1990. \quad \diamondsuit
\end{aligned}$$

9. Sabe-se que $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Para aproximar está integral , pelo método de Simpson, com precisão 10^{-4}, precisamos calcular o valor de n, para poder dividir nosso intervalo $[1, 2]$ em $2n$ subintervalos. Para isto usaremos o fórmula dada para o erro no método de Simpson,

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x\in[a,b]}{}' |f^{(4)}(x)|$$

então

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{(2-1)^5}{2880n^4} \max_{x\in[1,2]}{}' |f^{(4)}(x)|; \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f^{(1)} = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(2)} = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(3)} = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)} = \frac{24}{x^5},$$

com $f^{(5)} < 0$ para $x \in [1, 2]$, portanto $f^{(4)}$ é decrescente no intervalo , e atinge seu máximo em $x = 1$: $f^{(4)}(1) = 24$.

$$|\mathrm{E}_T| \leq \frac{1}{2880n^4}.24 \leq 10^{-4} \to n^4 \geq \frac{10^4}{120} = \frac{10^3}{12} \to n \geq (\frac{250}{3})^{1/4} = 3.0213 \to n = 4.$$

Logo:

$$h = \frac{b-a}{2n} = 1/8 \to h = 0.125 \qquad x_i = 1 + ih, \qquad i = 0, 1, 2, ...8.$$

x_i	1	1.125	1.25	1.375	1.5	1.625	1.75	1.875	2.0
$f(x_i)$	1	0.89	0.80	0.73	0.67	0.62	0.57	0.53	0.50

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0.125}{3}\Big[1 + 4(0.89 + 0.73 + 0.62 + 0.53) + 2(0.80 + 0.67 + 0.57) + 0.50\Big]$$

então

$$\ln 2 \approx 0.6941. \qquad \diamondsuit$$

10. Dada a função periódica, com período $T = 1$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & , \quad -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Fazemos uma mudança de variáveis para obter $F(s) := f(x(s))$ com $s \in [0, 2\pi]$ e período 2π. $x(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}(s - 2\pi) = \frac{s}{2\pi} - \frac{1}{2}$. e $s(x) = 2\pi x + \pi$.
Agora calculamos os coeficientes da função aproximadora

$$G(s) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} \Big[a_k cos(ks) + b_k sen(ks)\Big]$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(s)ds \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(s)cos(ks)ds; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(s)sen(ks)ds \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$F(s) := f\big(x(s)\big) = \begin{cases} -2x(s) & ; \quad -\frac{1}{2} < x(s) \leq 0 \\ 2x(s) & ; \quad 0 < x(s) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(s) = \begin{cases} -\frac{s}{\pi} + 1 & ; \quad 0 < s \leq \pi \\ \frac{s}{\pi} - 1 & ; \quad \pi < s \leq 2\pi \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)ds\Big] \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi} + 1)ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{s}{\pi} - 1)ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[-\frac{s^2}{2\pi} + s|_0^{\pi} + (\frac{s^2}{2\pi} - 1)s|_{\pi}^{2\pi}\Big] = 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)cos(s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)cos(s)ds\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi} + 1)cos(s)ds + \int_{\pi}^{\pi} (\frac{s}{\pi} - 1)cos(s)ds \\ &= \frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)cos(2s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)cos(2s)ds\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi} + 1)cos(2s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{s}{\pi} - 1)cos(2s)ds\Big] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)cos(3s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)cos(3s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi}+1)cos(3s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{s}{\pi}-1)cos(3s)ds \\
&= \frac{4}{9\pi^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)sen(s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)sen(s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi}+1)sen(s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{s}{\pi}-1)sen(s)ds\Big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)sen(2s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)sen(2s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi}+1)sen(2s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{s}{2}-1)sen(2s)ds\Big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)sen(2s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)sen(2s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi}+1)sen(2s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{s}{\pi}-1)sen(2s)ds\Big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_3 &= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} F(s)sen(3s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} F(s)sen(3s)ds\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi} (-\frac{s}{\pi}+1)sen(3s)ds + \int_{\pi}^{2\pi} (\frac{s}{\pi}-1)sen(3s)ds \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}coss + \frac{4}{9\pi^2}cos(3s).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
g(x) &= G(s(x)) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}cos(2\pi x + \pi) + \frac{4}{9\pi^2}cos(6\pi x + 3\pi) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}cos(2\pi x) - \frac{4}{9\pi^2}cos(6\pi x). \qquad \diamondsuit
\end{aligned}
$$